

Lista 3 - Álgebra Linear

Produtos Internos

1 — Mostre que $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$ é um produto interno em \mathbb{R}^3

2 — Dado $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores em \mathbb{R}^n , Determine se $\langle x, y \rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.

- a) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- b) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i |y_i|$
- c) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$
- d) $\langle x, y \rangle = |\sum_{i=1}^n x_i y_i|$

3 — Em \mathbb{R}^4 determine se $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ é um produto interno.

4 — Dado S o subespaço de \mathbb{R}^3 definido como:

$$S = \{(x, y, z) | x - y + z = 0\}$$

- a) Determine uma base ortonormal em relação ao produto interno canônico para esse subespaço de \mathbb{R}^3
- b) Determine S^\perp em relação ao produto interno usual.
- c) Determine uma base ortonormal para S , se considerarmos \mathbb{R}^3 com o produto interno:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

- d) Determine também S^\perp em relação ao produto interno anterior.

5 — No espaço de todos os polinômios, determine se $\langle x, y \rangle$ é um produto interno ou não. E se não for que axiomas falham.

- a) $\langle f, g \rangle == f(1)g(1)$
- b) $\langle f, g \rangle == \int_0^1 f(x)g(x)dx$
- c) $\langle f, g \rangle == \int_0^1 f(x)g'(x)dx$
- d) $\langle f, g \rangle == \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$

6 — No espaço de todos os polinômios, seja

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^x f(x)g(x)dx.$$

- a) Prove que $\langle x, y \rangle$ é um produto interno
- b) Calcule $\langle x, y \rangle$ onde $f(x) = (x+1)^2$ e $g(x) = x^2 - 2$

7 — Para as afirmações a seguir determine se são verdadeiras ou falsas. Demonstre as verdadeiras e em caso contrário forneça contraexemplos.

- a) $\langle x, y \rangle = 0$ se e somente se $\|x+y\| = \|x-y\|$
- b) $\langle x, y \rangle = 0$ se e somente se $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- c) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

8 — Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^4 munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ e $u_2 = (-1, 1, -1, 1)$. Pede-se:

- a) Mostre que $(2, 1, 3, 1)$ não pertence a U .
- b) Determine a melhor aproximação do elemento $v = (2, 1, 3, 1)$ no subespaço U .
- c) Determine um subespaço W de modo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Justifique sua resposta

9 — No espaço das matrizes 2×2 considere:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^t)$$

- a) Prove que $\langle A, B \rangle$ definido acima é um produto interno.
- b) Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt construa uma base ortonormal para esse espaço partindo da base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

10 — No espaço dos polinômios reais considere o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

seja $f_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Prove que as funções

$$f_0(t) = 1 \quad f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1) \quad f_2(t) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1)$$

formam um conjunto ortogonal para o subespaço gerado por f_0, f_1, f_2 .

11 — No espaço real $C(0, 2)$, com o produto

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(t)g(t)dt,$$

mostre que o polinômio constante mais próxima a $f(x) = e^x$ é a função $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$. Calcule a distância entre f e g .

12 — Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1; -1; 1; 1)$ e $u_2 = (1; 2; 0; 1)$.

a) Determine uma base para o subespaço U^\perp .

b) Calcule a projeção ortogonal do elemento $u = (2; 1; 1; -1)$ no subespaço U

13 — Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

a) A partir da base canônica $1, t, t^2$ do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, construir uma base ortogonal para esse espaço.

14 — Considere o espaço vetorial real $C([-1, 1])$ munido do produto interno usual. Determine o polinômio $p(x) = a + bx$, mais próximo da função

$$f(x) = \sin(x)$$

Dê uma interpretação geométrica para o polinômio $p(x)$.