Lista 4 - Álgebra Linear

Transformações Lineares

1 — Quais das transformações abaixo são lineares?

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, 2^y, 2^z).$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3x, 2, 5z).$

c) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z, w) = (x - w, y - w, x + z).$

d) $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(A) = (A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}).$

e) $T : C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}), \quad T(f) = 3f'' - 2f' + 1.$

f) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$

g) $T : C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T(f) = \int_a^b f(x)dx$

h) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (|x|, 2x + 2y).$

i) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_3 + a_2 - a_1, a_0).$

j) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{11} + A_{12}).$

k) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(A) = (A_{11} - A_{12}, A_{21} + A_{22}, 2A_{11} - A_{21})$

l) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

m) $T : M_2 \to \mathbb{R}$
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \det A$

n) $T : M_2 \to M_2$
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

o) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto xy$

p) $T : P_2 \to P_3$
$ax^2 + bx + c \mapsto ax^3 + bx^2 + c$

q) $T : \mathbb{R}^2 \to M(2, 2)$
$(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix}$

2 — Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e $V' \subset V, W' \subset W$ subespaços vetoriais. Mostre que $T(V')$ é subespaço de W e que $T^{-1}(W')$ é subespaço de V.

3 — Dados os vetores $u_1 = (2, -1), u_2 = (1, 1), u_3 = (-1, -4), v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 3), v_3 = (-5, -6)$ decida se existe ou não uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3.$

4 — Determine $T : V \longrightarrow W$ conhecendo os valores de T na base de V.

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que
$T(1,3,-1) = (1,1,-1,0), T(2,0,1) = (0,0,1,-1)$ e $T(0,-1,1) = (1,0,-1,0)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$T(2,1) = (1,0)$ e $T(0,1) = (1,-1)$.

c) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$T(2t) = (1,1)$ e $T(-1) = (0,3)$.

d) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1,0),\ T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = (2,1),$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0,1),\ T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (-1,1).$$

5 — a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) =< (1,0,-1),(1,2,2) >$.

b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{N}(T) =< (1,0,-1) >$.

6 — Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

a) Mostre que se $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ são L.I. então $v_1, \dots, v_n \in V$ são L.I.

b) Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ geram V então os vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ geram V

7 — Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que se $u \in \mathrm{N}(T)$ e $v \in \mathrm{Im}(T)$ então $T(u) \in \mathrm{N}(T)$ e $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$.

8 — Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

9 — Assinale Verdadeiro ou Falso:

a) Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é sobrejetora se e somente se $\dim \mathrm{N}(T) = \dim(V) - \dim(W)$.

b) Dada a transformação linear $T : V \longrightarrow W$, para todo $w \in W$ fixado, o conjunto $G = \{v \in V : T(v) = w\}$ é um subespaço de V.

c) Toda transformação linear $T : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injetora é também sobrejetora.

d) O núcleo de toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3.

10 — Seja $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(p) = 5p - 4p' + p''$. Mostre que se núcleo é $\{0\}$ e conclua que para todo polinômio $b(x)$ existe um polinômio $p(x)$ tal que $b(x) = 5p(x) - 4p'(x) + p''(x)$.

11 — Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(U) \subset \mathrm{N}(T)$.

12 — Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)).$$

13 — Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear bijetora. Mostre que T leva retas em retas.

14 — Existe uma transformação linear injetora $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

15 — Sejam $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = AX - XA$. Encontre o núcleo e a imagem de T.

16 — Ache a transf. linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$ (i.e. encontre $T(x, y, z)$). Encontre v tal que $T(v) = (3, 2)$. Qual a imagem de T? Qual é o núcleo de T? Quanto é dim(Im(T)) e dim(ker(T))? Vale o teorema do núcleo e da imagem?

17 — Determinar um $T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $1+x^3$ e $1-x^2$.

18 — Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathcal{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.

19 — Mostre que se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita tais que dim$U$ = dim V e se $T \in L(U, V)$ então as seguintes condições são equivalentes:

a) T é sobrejetora;
b) T é injetora;
c) T é bijetora;
d) T leva bases de U em bases de V.

20 — a) Seja V um espaço vetorial de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.

b) Utilize a parte a) para mostrar que se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ não são todos nulos então $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ tem dimensão $n - 1$.

21 — a) Mostre que o espaço das matrizes simétricas reais de ordem n é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

b) Mostre que o espaço das matrizes anti-simétricas reais de ordem n é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

c) Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = a + (a + b)x$ é um isomorfismo.

22 — Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(x, y) = (x, y - f(x)).$$

Mostre que T é um isomorfismo.

23 — a) É $W = \{p \in \mathcal{P}_3 (\mathbb{R} : p(-1) = 0)\}$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

b) É $W = \{p \in \mathcal{P}_3 (\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$ isomorfo a $\mathbb{R}$? Em caso afirmativo forneça uma prova; em casa negativo forneça um contraexemplo.

24 — Mostre que $W = \{A \in M_{2\times 2} (\mathbb{R}) : A_{11} = A_{12} \text{ e } A_{22} = A_{21}\}$ é isomorfo a $\mathcal{P}_1 (\mathbb{R})$.