Lista 5 - Álgebra Linear

Transformações Lineares II

1 — a) Seja $T \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$ dada por $T(p) = p'$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C, e com relação à base B formada pelos vetores

$$u = (1, 1, 2), v = (-1, 1, 0), w = (-1, -1, 1).$$

2 — Seja $T \in L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dada por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$ Encontre as matrizes de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$.

3 — Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, T(x, y, z) = z - 2x, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + 2y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4 — Determinar bases para núcleo e para a imagem das transformações que sejam lineares do exercício 1 da lista 4.

5 — Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$T(e_1) = (2, 3, 1), T(e_1 + e_2) = (5, 2, 7) \text{ e } T(e_1 + e_2 + e_3) = (-2, 0, 7).$$

a) Encontre $T(x, y, z)$ para $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

6 — Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ um operador linear tal que

$$(T(p_0))(t) = 1 + t, (T(p_1))(t) = t + t^2 \text{ e } (T(p_2))(t) = 1 + t - t^2,$$

onde $p_i(t) = t^i, i = 0, 1, 2$.

a) Encontre $T(p)$ para $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

c) T é injetora? Justifique sua resposta.

d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

7 — Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,4)\}$ é $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

8 — Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que

$$T(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3, T(e_2) = e_1 + e_2, T(e_3) = e_2 + e_3$$

e

$$S(e_1) = 3e_1 + 2e_2, S(e_2) = e_1 - e_2 - e_3, S(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3.$$

Determine as seguintes matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$, $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$, $\left[S^2 + I\right]_{\mathcal{B}}$ e $\left[T^3 - S^2\right]_{\mathcal{B}}$.

9 — Seja $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de U e V respectivamente. Encontrar $T \in L(U, V)$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ seja a matriz;

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$