Lista 6 - Álgebra Linear

Sistemas Lineares e Mudança de Base

1 — Resolva os seguintes sistemas pelo método de Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = -10 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z & = & 4 \\ 2x + 5y - 2z & = & 3 \\ x + 7y - 7z & = & 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z & = & 1 \\ x - y + z & = & 3 \\ x - y - 3z & = & -3 \\ 3x + 3y - 5z & = & 0 \\ -x + y + z & = & 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 5y + 6z & = & 0 \end{cases}$

2 — Prove que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t & = & a \\ 2x - 5y - 3z + 12t & = & b \\ 7x + y + 8z + 5t & = & c \end{cases}$$

admite solução se, e somente se, $37a + 13b = 9c$. Ache a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

3 — Quanto à existência e unicidade de soluções de sistemas lineares, quais os possíveis cenários quando se tem 10 equações e 9 variáteis? E quais são os cenários possíveis quando se tem 9 equações e 10 variáveis? Justifique baseando-se em propriedades da transformação linear associada à matriz de coeficientes.

4 — Encontre as matrizes de mudança de base de β para β' ($[I]^{\beta}_{\beta'}$) e de β' para β ($[I]^{\beta'}_{\beta}$) no espaço vetorial V. Escreva v na base β e u na base β'

a) $V = \mathbb{R}^3,\ \beta = \{(1,2,0),(0,3,1),(1,0,1)\},\ \beta' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$
$v = (1,2,3)_{\beta'},\ u = (1,2,3)_{\beta};$

b) $V = \mathbb{R}^3,\ \beta = \{(1,2,0),(0,3,1),(1,0,1)\},\ \beta' = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\},$
$v = (1,2,0)_{\beta'},\ u = (1,0,3)_{\beta};$

c) $V = \mathbb{R}^3,\ \beta = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\},\ \beta' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$
$v = (1,2,3)_{\beta'},\ u = (1,2,3)_{\beta};$

d) $V = \mathcal{P}(3),\ \beta = \{1,t,t^2,t^3\},\ \beta' = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\},$
$v = (1,0,3,0)_{\beta'},\ u = (1,0,3,0)_{\beta}.$