Lista 7 - Álgebra Linear

Determinantes

1 — Encontre o determinante de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

2 — Encontre o determinante da matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 — Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

4 — Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} = 2.$$

5 — Se A e B são matrizes quadradas das mesmas dimensões e $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$, encontre $\det(A^2B^{-1})$.

6 — Calcule os determinantes de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \text{ e } \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

7 — Para cada uma das matrizes abaixo calcule sua adjunta e utilize estes cálculos para calcular a matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8 — Calcule os seguintes determinantes

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 10 & 100 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 100 & e & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$

9 — Determine a matriz de cofatores e a a matriz adjunta das seguintes matrizes:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

10 — Calcule as inversas das matrizes dos exercícios anteriores.

11 — Resolva os seguintes sistemas, com a, b, c constantes, por dois métodos: (a) Gauss-Jordan e (b) escrevendo o sistema na forma matricial $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e encontrando a inversa da matriz A.

a)

$$\begin{cases} 2x & +\, y & = & a \\ 3x & +\, 6y & = & b \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x & +\, y & +\, z = & a \\ 2x & & +\, 2z = & b \\ & 3y & +\, 3z = & c \end{cases}$$

12 — Mostre que toda solução do sistema $Ax = \mathbf{b}$, pode ser escrita como a soma de uma solução particular mais uma solução do sistema homogêneo associado $Ax = 0$. (Qual é a relação desse resultado com o exercício 7?)