Lista 9 - Álgebra Linear

Diagonalização

1 — Calcule para cada transformação linear do **Exercício 2** da **Lista 8** a dimensão do autoespaço $E(\lambda)$ para cada autovalor λ.

2 — Referente aos **Exercícios 2 e 6** da **Lista 8**, para as matrizes A diagonalizáveis, exiba a base que torna a matriz diagonal e a matriz mudança de base C tal que $C^{-1}AC$ é diagonal. Calcule então $C^{-1}AC$.

3 — Sejam A e B matrizes $n \times n$ com $\det A = \det B$ e $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. Mostre que se $n = 2$ então A e B têm o mesmo polinômico característico. Exiba A e B duas matrizes 3×3 com $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ e polinômios característicos distintos.

4 — Em cada caso abaixo encontre C tal que $C^{-1}AC$ é diagonal ou explique por que tal C não existe.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5 — Mostre que nos itens abaixo A não possui três autovalores distintos, mas tem três autovetores linearmente independentes. Encontre C tal que $C^{-1}AC$ é diagonal.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6 — Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, i.e., encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Verifique que $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A.

7 — Sendo A a matriz do exercício 6, calcule A^2, A^4 e A^{10}. Utilize $A^2 = (M^{-1}DM)(M^{-1}DM) = M^{-1}D^2M$, onde D é a matriz diagonal após diagonalização. Calcule A^2 explicitamente e compare.