ANÁLISE REAL: PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Todos os exercícios valem a mesma nota.
- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- Uma questão totalmente correta vale, em geral, mais do que duas parcialmente corretas.
- Em geral, não é necessário acertar 100% da prova para ter conceito A. Algo como 85% de acerto pode acarretar num conceito A.
- O conceito F é usualmente usado para provas com menos de 50% de acerto.
- Visto que é bem diferente uma prova 0% correta e uma 45% correta (ambas com conceito F), nas provas dividirei o conceito F em F-, F e F+ (do menor para o maior).
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. (a) Prove que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;
(b) Mostre que o conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ é enumerável;
(c) Mostre que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Exercício 2. Mostre utilizando o Axioma do Supremo que todo conjunto $X \in \mathbb{R}$ limitado inferiormente tem um ínfimo.

Exercício 3. Mostre que se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_{n+1}/x_n) = a < 1$ então $\lim x_n = 0$.

Exercício 4. Diz-se que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.
(a) Mostre que $(1/n)$ é uma sequência de Cauchy.
(b) Mostre que uma sequência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

Exercício 5. (a) Mostre que a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Encontre sua soma.
(b) Use a convergência de $\sum \frac{2}{n(n+1)}$ para provar que $\sum 1/n^2$ é convergente.