ANÁLISE REAL I: LIÇÃO DE CASA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

- Esta lista deve ser entregue resolvida até o dia 30/09/2013.
- A lista resolvida valerá até $3,0$ pontos que serão somados na nota da P1 (valendo então $1,5$ pontos na média final).

Exercício 1. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ e $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Mostre que:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$$

Encontre expressões análogas para $\inf(A+B)$ e $\inf(A - B)$.

Exercício 2. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Mostre que:

(a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;
(b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$;
(c) Se $A \subset B$ então $\sup A \leq \sup B$.

Exercício 3. Seja $X \subset \mathbb{R}$.Uma função é dita limitada se $f(X) \subset R$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

(a) Mostre que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada
(b) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$
(c) Conclua que $\sup(f + g) \leqslant \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geqslant \inf f + \inf g$
(d) Dê exemplos para os quais valham as desigualdades estritas
(e) Mostre que o produto de duas funções limitadas é limitada
(f) Mostre que $f \cdot g(X) \subset f(X) \cdot g(X)$
(g) Conclua que se forem ambas positivas $\sup(f \cdot g) \leqslant \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geqslant \inf f \cdot \inf g$

Exercício 4. Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$ então $\lim y_n = a$.

Exercício 5. Mostre que para todo $A \subset \mathbb{R}$, A' é fechado.

Exercício 6. Mostre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercício 7. Dado $int(E)$ o conjunto dos pontos interiores de E.

(a) Mostre que $int(E)$ é aberto.
(b) Se $D \subset E$ e D é aberto então $D \subset int(E)$.
(c) Mostre que $int(S) = \overline{(S^c)}^c$
(d) Mostre que $int(S \cap T) = int(S) \cap int(T)$

Exercício 8. Prove que os extremos dos intervalos removidos formam um subconjunto enumerável denso no conjunto de Cantor.

Exercício 9. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ bijeção contínua. Mostre que:

(a) $f^{-1} : Y \to X$ não é necessariamente contínua.
(b) Se X é um intervalo de $\mathbb{R}$ então f é monótona e sua inversa é contínua.
(c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.

Exercício 10. Dada $f : X_1 \to X_2$ com $X_1 \subset \mathbb{R}$ e $X_2 \subset \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:

(a) A função f é contínua.
(b) Para todo fechado $F \subset X_2$ o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em X_1
(c) Para todo $A \subset X$ o conjunto $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
(d) Para todo $B \subset X_2$ o conjunto $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$