ANÁLISE REAL I: LISTA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Conjuntos Finitos e Infinitos

Exercício 1. Seja $\mathcal{F}(X,Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$. Se $\#X = m$ e $\#Y = n$, prove que $\#\mathcal{F}(X,Y) = n^m$.

Exercício 2. Prove o Princípio das Casas de Pombo: se $m > n$ não existe função injetiva $f : I_m \to I_n$ (quando $m > n$, para alojar m pombos em n casas é preciso que pelo menos uma casa abrigue mais de um pombo)

Exercício 3. Dada $f : X \to Y$, prove:

(a) Se X é infinito e f é injetiva, então Y é infinito.
(b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.

Exercício 4. Dê um exemplo de uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuja intersecção $\cap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

Exercício 5. Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das partes de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

Exercício 6. Sejam Y enumerável e $f : X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.

Números Reais

Exercício 7. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $-A = \{-x, x \in A\}$. Mostre que

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

Exercício 8. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ e $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Mostre que:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$$

Encontre expressões análogas para $\inf(A + B)$ e $\inf(A - B)$.

Exercício 9. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Mostre que:

(a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
(b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

Exercício 10. Seja $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Mostre que $\inf X = 0$.

Exercício 11. Seja $X \subset \mathbb{R}$.Uma função é dita limitada se $f(X) \subset R$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

(a) Mostre que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada
(b) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$
(c) Conclua que $\sup(f + g) \leqslant \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geqslant \inf f + \inf g$
(d) Dê exemplos para os quais valham as desigualdades estritas
(e) Mostre que o produto de duas funções limitadas é limitada
(f) Mostre que $f \cdot g(X) \subset f(X) \cdot g(X)$
(g) Conclua que se forem ambas positivas $\sup(f \cdot g) \leqslant \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geqslant \inf f \cdot \inf g$

Exercício 12. Prove que o supremo do conjunto $A = (a, b)$ é b.

Exercício 13. Usando a caracterização dos reais como (o único) corpo ordenado completo, demonstre que:

(a) $1^{-1} = 1$
(b) $-(a + b) = -a - b$
(c) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
(d) Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$
(e) $1 > 0$
(f) Se $a < c$ e $c < d$ então $a + b < c + d$
(g) Se $a > 0$ então $1/a > 0$
(h) Se $a < 0$ então $1/a < 0$
(i) Se x tem a propriedade que $0 \leqslant x < b$ para todo número real positivo b então $x = 0$
(j) Dados x, y números reais tais que $x < y$ prove que existe um racional z tal que $x < z < y$.
(k) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Sequências de Números Reais

Exercício 14. Mostre que se a sequência a_n é monotonicamente decrescente então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercício 15. Mostre que a sequência (a_n), onde $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, é estritamente decrescente e ache seu limite.

Exercício 16. Mostre que a convergência da sequência (a_n) implica na convergência da sequência $(|a_n|)$. A reciproca é verdadeira?

Exercício 17. Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$ então $\lim y_n = a$.

Exercício 18. Seja $x_n \neq 0$. Mostre que se existirem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$0 < \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq c < 1$$

para todo $n > n_0$. Então $\lim x_n = 0$.

Exercício 19. Uma sequência de números reais (x_n) é dita **sequência de Cauchy** se:

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$.

Mostre que:

(a) Toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy.
(b) Toda sequência de Cauchy é limitada.
(c) Mostre que toda sequência de Cauchy é convergente.

Exercício 20. Mostre que se uma sequência (a_n) converge a L então toda subsequência converge a L