ANÁLISE REAL I: LISTA 2

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Topologia da Reta Real

Exercício 1. Mostre que:

(a) Um intervalo (a, b) é aberto.
(b) Um intervalo $[a, b]$ é fechado.
(c) O conjunto $\{p\}$, onde p é um real qualquer fixado, é um conjunto fechado.
(d) Um conjunto finito de pontos é fechado.
(e) $\mathbb{N}$ é fechado em $\mathbb{R}$.
(f) O conjunto $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$ não é aberto nem fechado.

Exercício 2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tem $x_n \in A$ para todo n suficientemente grande. Mostre que A é aberto. Vale a recíproca? Justifique.

Exercício 3. Mostre que se A, B são abertos então $A + B$ e $A \cdot B$ são abertos.

Exercício 4. Mostre que se A é aberto então $A - \{a\}$ é aberto.

Exercício 5. Mostre que para todo $A \subset \mathbb{R}$, A' é fechado.

Exercício 6. Mostre que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercício 7. Dado $int(E)$ o conjunto dos pontos interiores de E.

(a) Mostre que $int(E)$ é aberto.
(b) Se $D \subset E$ e D é aberto então $D \subset int(E)$.
(c) Mostre que $int(S) = \overline{(S^c)}^c$
(d) Mostre que $int(S \cap T) = int(S) \cap int(T)$

Exercício 8. Construa um conjunto limitado de números reais com exatamente três pontos de acumulação.

Exercício 9. Prove que para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$ tem se:

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
(b) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.
(c) Dê um exemplo onde $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Exercício 10. Mostre que todo subconjunto não-enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.

Exercício 11. Mostre que se K é compacto e F é fechado então $K \cap F$ é compacto.

Exercício 12. Mostre que se $K_1, \ldots, K_n$ são conjuntos compactos então $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ é Compacto.

Exercício 13. Mostre que:

(a) $\mathbb{N}$ não é compacto;
(b) $\mathbb{Q}$ não é compacto, obtendo uma subcobertura aberta que não admite subcobertura finita ;
(c) $\mathbb{R}$ não é compacto;
(d) um ponto p é compacto;
(e) um conjunto finito de pontos é compacto;
(f) O intervalo $[0, 1]$ é compacto;

Exercício 14. (Teorema de Baire) Se $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio. Então

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

tem interior vazio.

Exercício 15. Mostre que todo aberto na reta é união enumerável de segmentos disjuntos.

Exercício 16. (Teorema de Lindelof) Dado $X \subset \mathbb{R}$, mostre que toda cobertura de X por abertos possui uma subcobertura enumerável.

Exercício 17. Prove que os extremos dos intervalos removidos formam um subconjunto enumerável denso no conjunto de Cantor.

Exercício 18 (Extra). Prove que a soma da série cujos termos são os comprimentos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor é igual a 1.