ANÁLISE REAL I: RESOLUÇÕES

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercício 1. Seja $\mathcal{F}(X,Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$. Se $\#X = m$ e $\#Y = n$, prove que $\#\mathcal{F}(X,Y) = n^m$.

Resolução:

Lema 1. *Se $\#A = a$ e $\#B = b$, então $\#(A \times B) = ab$.*

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$, pelo algoritmo da divisão por $b \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$k = qb + r,$$

com $1 \leq r \leq b$, $q, r \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $f : I_{ab} \to I_a \times I_b$ dada por $f(k) = (q+1, r)$ é uma bijeção.

De fato, f é injetora pois se $f(i) = f(j) = (q+1, r)$ temos $i = qb + r = j$. Além disso, f é sobrejetora pois dado $(c, d) \in I_a \times I_b$, tomando $k = (c-1)b + d$ temos $f(k) = (c, d)$ (Note que $k \in I_{ab}$, pois $k = (c-1)b + d \leq (a-1)b + b = ab$).

Sejam $f_a : I_a \to A$ e $f_b : I_b \to B$ bijeções. É fácil ver que $g : A \times B \to I_{ab}$ dada por:

$$g(c, d) = f^{-1}\left(f_a^{-1}(c), f_b^{-1}(d)\right),$$

é uma bijeção. Logo $\#(A \times B) = ab$. □

Demonstremos agora que $\#\mathcal{F}(X,Y) = n^m$ por indução em m (onde $\#X = m$ e $\#Y = n$).

Se $m = 1$, é fácil ver que $h : Y \to \mathcal{F}(X,Y)$ dado por:

$$\begin{aligned} g(y) = f : &X \longrightarrow Y \\ &a \longmapsto y \end{aligned}$$

é bijeção.

Como $\#Y = n$ segue que $\#\mathcal{F}(X,Y) = n = n^1$.

Suponha agora que, para $\#X' = (m-1)$, tenhamos $\#\mathcal{F}(X', Y) = n^{m-1}$. Considere então $X = X' \cup \{a\}$.

É fácil ver que $h : \mathcal{F}(X', Y) \times Y \to \mathcal{F}(X,Y)$ dada por:

$$\begin{aligned} g(f', y) = f : &X \longrightarrow Y \\ &x \longmapsto f(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \in X' \\ y & \text{se } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Logo, pelo Lema 1, $\#\mathcal{F}(X,Y) = n^{m-1}n = n^m$.

[*Abdicando um pouco do rigor podemos apenas seguir a sugestão do Elon (Análise Real, vol. 1) para o Exercício 2.3 do Cap. 1.*]

Exercício 2. Prove o Princípio das Casas de Pombo: se $m > n$ não existe função injetiva $f : I_m \to I_n$ (quando $m > n$, para alojar m pombos em n casas é preciso que pelo menos uma casa abrigue mais de um pombo)

Resolução:
Suponha que existe $f : I_m \to I_n$ injetiva com $m > n$. Então, restringindo o contra-domínio de f à sua imagem $A = f(I_m)$ temos uma bijeção. Temos porém que $A \subset I_m$ (pois $A \subset I_n$, e $I_n \subset I_m$ já que $m > n$) e $A \neq I_m$, pois $A \subset I_n \neq I_m$. Logo $f : I_m \to A$ é bijeção entre I_m e parte própria A de I_m. Isso contradiz, no entanto, o Teorema 1 (Elon: Análise Real, vol. 1, Cap. 1).

Exercício 3. (Teorema de Baire) Se $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio. Então

$$F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

tem interior vazio.

Resolução:
O Teorema acima segue dos dois resultados abaixo descritos:

(1) *As afirmações abaixo são equivalentes:*
- *Se F_n, $n \in \mathbb{N}$, são fechados com interior vazio, então*
$$F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$
tem interior vazio.
- *Se $U_n \subset \mathbb{R}$ é aberto e denso em $\mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, então*
$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$$
é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. F_n é fechado com interior vazio se e somente se $U_n = (\mathbb{R} - F_n)$ é aberto denso em $\mathbb{R}$.
$$F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$
tem interior vazio se e somente se
$$(\mathbb{R} - F) = \mathbb{R} - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} - F_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = U$$
é denso em $\mathbb{R}$. □

(2) *Se $U_n \subset \mathbb{R}$ é aberto e denso em $\mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, então*
$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$$
é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Afirmamos que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap U \neq \emptyset$.

Considere B_1 intervalo fechado não-degenerado contido em $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Como U_1 é aberto denso em $\mathbb{R}$, existe B_2 intervalo fechado não-degenerado contido em $U_1 \cap (intB_1)$. Como U_2 é também aberto denso em $\mathbb{R}$, existe B_3 intervalo fechado não-degenerado contido em $U_2 \cap (intB_2)$. Por indução construímos a sequência de intervalos encaixantes $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ tal que $B_n \subset U_{n-1}$.

Pelo teorema dos intervalos encaixantes existe $y \in B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, como $B_1 \subset (x-\epsilon, x+\epsilon)$ e $B_n \subset U_{n-1}$, para $n > 1$, $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap U$. □

Exercício 4. Mostre que todo aberto na reta é união enumerável de segmentos disjuntos.

Resolução:
Considere U aberto de $\mathbb{R}$. Definimos $x \sim y$ se $[min\{x, y\}, max\{x, y\}] \subset U$. Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em U, e que a classe de equivalência de x é um intervalo aberto I_x (prove isso).

Dada um intervalo aberto I_x, existe $q \in I_x \cap \mathbb{Q}$. Logo $I_x = I_q$.

Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, classes de equivalência são disjuntas, e todo elemento de U está numa classe de equivalência I_q temos que U é a união enumerável de intervalos abertos disjuntos:
$$U = \bigcup I_q.$$

Exercício 5. (Teorema de Lindelof) Dado $X \subset \mathbb{R}$, mostre que toda cobertura de X por abertos possui uma subcobertura enumerável.

Resolução:
Considere o conjunto enumerável $\mathcal{B} = \{B_n = (q_1, q_2) \subset \mathbb{R}; q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 < q_2\}$. Seja $\mathcal{C} = \{A_\lambda; \lambda \in L\}$ uma cobertura por abertos de X.

Seja $\mathcal{C}'$ o subconjunto de $\mathcal{C}$ formado tomando para cada $B_n \in \mathcal{B}$ um $A_n \in \mathcal{C}$ que o contenha (se existir). $\mathcal{C}'$ é enumerável, pois tem seus índices em $\mathbb{N}$.

Afirmamos que $\mathcal{C}'$ cobre X. De fato, seja $x \in X$. Como $\mathcal{C}$ cobre X existe λ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe um n tal que $x \in B_n = (q_1, q_2) \subset A_\lambda$. Desse modo temos que $x \in B_n \subset A_n$. Logo $\mathcal{C}'$ cobre X.