ANÁLISE REAL I: LISTA 3

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Limite de Funções

Exercício 1. Dados polinômios $p(x), q(x)$ mostre que se $q(a) \neq 0$ então $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$

Exercício 2. Mostre que não existe $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercício 3. Encontre exemplos de funções f, g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to A} g(x) = B$ mas $\lim_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

Exercício 4. Prove que se $f(x) \leq g(x)$ para todo x numa ϵ-vizinhança de a então se existirem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ teremos:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Exercício 5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Mostre que, se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$ então $\lim_{x\to a+} f(x) = L$.

Exercício 6. Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f : E \to \mathbb{R}$ não decrescente possua limite quando $x \to s^-$, $s = \sup E$ é que f seja limitada superiormente.

Funções Contínuas

Exercício 7. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções com $f(x) \subset Y$.

(a) Mostre que se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $b = f(a)$, então $(g \circ f)$ é contínua em a.

(b) $(g \circ f)$ é contínua em $a \in X$ implica g contínua em $b = f(a)$? E f contínua em a?

Exercício 8. Mostre que se $f(x), g(x)$ são funções definidas numa vizinhança de a e contínuas em a então:

(a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é continua em a

(b) $h'(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ é continua em a

(c) $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ é continua em a

Exercício 9. A *oscilação* de uma função $f : X \to R$ num conjunto bola aberta em x_0 de raio δ é definido como:

$$\omega_f(x_0, \delta) := \sup\{|f(x_1) - f(x_2)|; x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$$

e a oscilação num ponto como

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(x_0, \delta).$$

Mostre o critério de Cauchy para a continuidade de funções:

Uma função f é contínua em x_0 se e somente se $w_f(x_0) = 0$.

Exercício 10. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente constante* quando todo ponto de X possui uma vizinhança V tal que f restrita a $V \cap X$ é constante. Prove que toda função $f : I \to \mathbb{R}$ localmente constante, com I intervalo de $\mathbb{R}$, é constante.

Exercício 11. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função monótona definida no intervalo I. Mostre que se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua.

Exercício 12. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$.

Exercício 13. (a) Mostre que, se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda bijeção contínua $f : X \to Y$ tem inversa contínua $g : Y \to X$.

(b) Se $f : X \to Y$ é contínua e Y é compacto (X não necessariamente compacto) é verdade que f tem inversa contínua $g : Y \to X$?

Exercício 14. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$ não é uniformemente contínua.

Exercício 15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que, se existem $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, então f é uniformemente contínua.