ANÁLISE REAL I: LISTA 4

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Derivadas

Exercício 1. Demonstre a *Regra da Cadeia*: Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$ e $f(X) \subset Y$. Se f é derivável em a e g derivável em b então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e vale:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Exercício 2. Seja $f : X \to Y$ bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, con inversa $g = f^{-1} : Y \to X$.Mostre que, se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então g é derivável em b se e somente se $f'(a) \neq 0$. Nesse caso, teremos $g'(b) = 1/f'(a)$.

Exercício 3. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um ponto crítico $c \in I$ é dito *não-degenerado* quando $f'(c) \neq 0$. Prove que todo ponto crítico não-degenerado de f é um ponto de máximo ou mínimo local.

Exercício 4. (a) Mostre que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado.
(b) Mostre que se o ponto crítico c de $f : I \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $c_n \neq c$ e $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo x, y reais. Prove que f é constante.

Exercício 6. Dada f derivável no intervalo I, sejam $x = \{f'(x); x \in I\}$ e $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x); x \neq y \in I)\}$.
(a) Mostre que $Y \subset X$.
(b) Dê um exemplo onde $Y \neq X$.
(c) Prove que $\overline{Y} = \overline{X}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$ e $\inf X = \inf Y$.

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo x, y reais. Prove que f é constante.

Fórmula de Taylor

Exercício 8. Seja f uma função infinitamente diferenciável em 0. Mostre que:
(a) Se f é par então a serie de Taylor centrada na origem só possui termos da forma x^{2n}.
(b) Se f é impar então a serie de Taylor centrada na origem só possui termos da forma x^{2n+1}.

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1 + x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto $x = 0$.

Exercício 10. Demonstre que $f'' \geq 0$ implica em f convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Exercício 11. Seja $f : (-1, 1)$ tal que f', f'', f''' existam e sejam contínuas em $(-1, 1)$. Assuma $f'(0) = f''(0) = 0$ mas $f'''(0) \neq 0$. Mostre que 0 não é mínimo local de f.