ANÁLISE REAL: PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Todos os exercícios valem (2,5).
- Escolham 4 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 4.** Nesse caso, os exercícios 5 e 6, mesmo que corretamente resolvidos, serão completamente ignorados durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. (a) Prove o *Teorema dos Invervalos Encaixados*: Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos fechados limitados $I_n = [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dê um exemplo de uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuja intersecção $\cap_{n=1}^{\infty} X_n$ seja vazia.

Exercício 2. Prove que o conjunto dos números reais é não enumerável.

Exercício 3. Dadas as sequências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n-1} = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

Exercício 4. Diz-se que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Mostre que se (x_n) é uma sequência convergente então (x_n) é também uma sequência de Cauchy.

Exercício 5. (a) A série $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente. Por quê? Enuncie os teoremas usados na argumentação.

(b) Encontre uma sequência (x_n) limitada tal que $\sum x_n[(-1)^n \frac{1}{n}]$ seja divergente.

(c) Mostre que a série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$ é divergente. Isso não contradiz o teorema de Leibniz? Por quê?

Exercício 6. (a) Mostre que a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Encontre sua soma.

(b) Use o critério de comparação para provar que $\sum 1/n^2$ é convergente, a partir da convergência de $\sum \frac{2}{n(n+1)}$.