ANÁLISE REAL: PROVA 2

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Todos os exercícios valem (2,5).
- Escolham 4 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número** 1 **a** 4**.** Nesse caso, os exercícios 5 e 6, mesmo que corretamente resolvidos, serão completamente ignorados durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: "toda sequência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tem x_n pertencente a A para todo n suficientemente grande". Prove que A é aberto.

Exercício 2. (a) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Mostre que, se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.
(b) Dê um exemplo que mostre que a hipótese $L < M$ não pode ser substituída por $L \leq M$.

Exercício 3. Mostre que todo polinômio de grau ímpar possui raiz real.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. (a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b), exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x\to c} f'(x) = L$, porve que $f'(c)$ existe e é igual a L.
(b) Se tirarmos a hipótese da continuidade de f a conclusão ainda vale? Se sim, prove. Se não, exiba um contra-exemplo.

Exercício 6. Seja $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3/(1 - x^4)$. Calcule as derivadas de ordem 847 e 845 de f no ponto $x = 0$.