MA11 - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS
SANTO ANDRÉ

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Exercício Recomendado 2, Unidade 6 (PDF de 2012)

Exercício 1. Considere um número racional $\frac{m}{n}$, onde m e n são primos entre si.

(a) Sob que condições este número admite uma representação decimal finita?
(b) Quando a representação é uma dízima periódica simples?

Resolução: (a) Um número racional $r = \frac{m}{n}$ admite uma representação decimal finita se e somente se $n = 2^s 5^t$ para algum par $s, t \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) ($\Longrightarrow$)
Se $\frac{m}{n}$ tem representação decimal finita então $10^k \left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{N}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo n divide $10^k m$. Como m e n são primos entre si então n divide 10^k. Portanto $n = 2^s 5^t$ para algum par $s, t \in \mathbb{N}$.
(ii) ($\Longleftarrow$)
Se $n = 2^s 5^t$, tome $k = max\{s, t\}$. Daí temos $10^k \left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{N}$. Logo $\frac{m}{n}$ tem representação decimal finita. □

(b) $\frac{m}{n}$ é uma dízima periódica simples se e somente se n não tem fatores 2 ou 5.

Demonstração. (i) ($\Longrightarrow$)
Se $\frac{m}{n} = a_0, \overline{a_1 a_2 \cdots a_p}$ então:

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{a_1 a_2 \cdots a_p}{10^p - 1} = \frac{a_0(10^p - 1) + a_1 a_2 \cdots a_p}{10^p - 1}.$$

Note que $(10^p - 1)$ que é um natural terminado em 9, e, portanto, não divisível por 2 ou 5. Como n divide $(10^p - 1)$ temos então que n não tem fatores 2 ou 5.
(ii) ($\Longleftarrow$)
Provemos a contrapositiva dessa implicação, ou seja, se $\frac{m}{n}$ é dízima periódica composta então n tem fatores 2 ou 5.
Se $\frac{m}{n} = a_0, b_1 \cdots b_m \overline{a_1 \cdots a_p}$ então:

$$\frac{m}{n} = \frac{b_1 \cdots b_m a_1 \cdots a_p - b_1 \cdots b_m}{10^m(10^p - 1)}.$$

(Ver Unidade 6, pg. 10.)
No entanto, $(b_1 \cdots b_m a_1 \cdots a_p - b_1 \cdots b_m)$ não é divisível por 10^m, caso contrário teríamos que

$$\frac{m}{n} = \frac{u}{(10^p - 1)} = c_0 + \frac{c_1 \cdots c_p}{(10^p - 1)} = c_0, \overline{c_1 \cdots c_p},$$

onde $u = (b_1 \cdots b_m a_1 \cdots a_p - b_1 \cdots b_m)/10^m \in \mathbb{N}$, c_0 é o quaciente de u por $(10^p - 1)$ e $c_1 \cdots c_p$ o resto da divisão de u por $(10^p - 1)$. Daí, teríamos que $\frac{m}{n}$ seria dízima periódica simples.
Portanto, n divide $10^m(10^p - 1)$, mas não divide $(10^p - 1)$, o que prova que n tem fatores 2 ou 5.

$\square$