GEOMETRIA ANALÍTICA: PROVA 1
TURMA B1

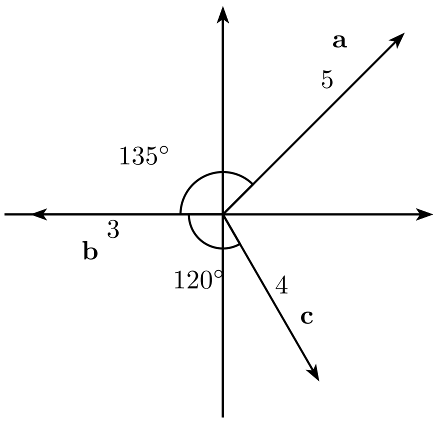
SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercícios

Exercício 1. Considere um tetraedro (pirâmide de base triangular) $ABCD$, e R e S tais que $\overrightarrow{BR} = 2\overrightarrow{RD}$ e $3\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SD}$. Escreva como combinação linear de $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD}$ os vetores:
(a) $\mathbf{a} = \overrightarrow{AR}$;
(b) $\mathbf{b} = \overrightarrow{RS}$.

Resolução: (a) $\mathbf{a} = \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{BD} = 1/3\mathbf{u} + 2/3\mathbf{w}$;
(b) $\mathbf{b} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR} = -1/3\mathbf{u} + 3/4\mathbf{v} - 5/12\mathbf{w}$.

Exercício 2. Considere os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ com direção e sentido indicados na figura abaixo. Suponha $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 3$ e $\|\mathbf{c}\| = 4$. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



Resolução:

$$\mathbf{a} = 5\sqrt{2}/2\mathbf{i} + 5\sqrt{2}/2\mathbf{j}$$
$$\mathbf{b} = -3\mathbf{i}$$
$$\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}$$

Daí:

$$\mathbf{c} = -(2\sqrt{6}/5)\mathbf{a} - [(2 + 2\sqrt{3})/3]\mathbf{b}.$$

Exercício 3. Considere os pontos $A = (2, 1, 0)$, $B = (-4, 0, 1)$, $C = (-1, 1, 2)$ e $D = (5, 3, 4)$.
(a) Mostre que A, B, C e D são coplanares.
(b) Encontre um vetor $\mathbf{n}$ normal ao plano que contém tais pontos.

Resolução: (a) $\overrightarrow{AB} = (-6, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (3, 2, 4)$.

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(b)

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (2, -9, 3).$$

Exercício 4. Considere o triângulo $\triangle ABC$ que num sistema cartesiano de coordenadas tem $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{CB} = (2, 2, 1)$.

(a) Mostre que $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo.

(b) Encontre a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.

Resolução: (a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-1, -1, 1)$. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 - 1 + 2 = 0$.

(b)

$$proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \right) \overrightarrow{BC} = (4/3, 4/3, 2/3).$$