

GEOMETRIA ANALÍTICA: PROVA 1
SÃO BERNARDO DO CAMPO - TIPO A

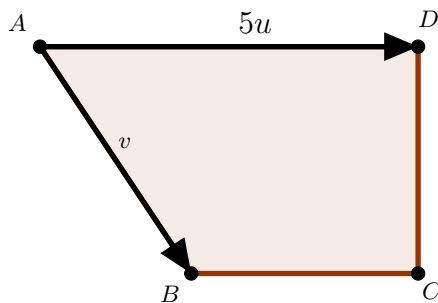
	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

EXERCÍCIOS

Exercício 1 (2,0). Sejam A, B, C e D pontos e sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} tais que $\overrightarrow{AD} = 5\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

- (a) Escolha \mathbf{u} e \mathbf{v} de modo que eles sejam linearmente independentes e represente-os usando segmentos orientados. Represente adequadamente os pontos A, B, C e D . $ABCD$ é um quadrilátero? Se sim, que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Justifique sua resposta.
- (b) Exprima \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{CA} em função de \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Resolução: (a) $ABCD$ é um trapézio, pois AD e BC são paralelos (e de comprimentos distintos).



(b)

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 5\mathbf{u} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v},$$

$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{v} + 5\mathbf{u},$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Exercício 2 (2,5). (a) Determine m de modo que $\mathbf{u} = (m, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, m + 1)$ e $\mathbf{w} = (m + 2, 1, -3)$ sejam coplanares.

(b) Escreva \mathbf{w} como combinação linear de \mathbf{u} e \mathbf{v} .

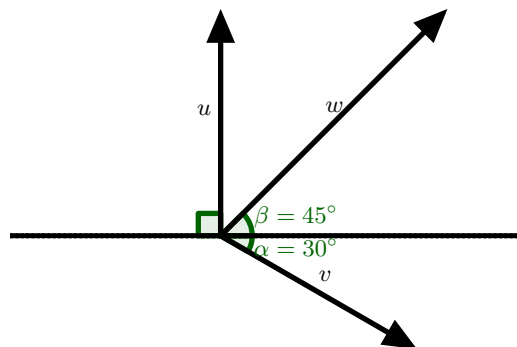
Resolução: (a)

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (m+1) \\ (m+2) & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo $m = 2$.

(b) $(4, 1, -3) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(0, 1, 3)$. Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Logo $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Exercício 3 (2,5). Suponha que \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} sejam três vetores com as direções e sentidos representados na figura abaixo e com $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ e $\|\mathbf{w}\| = 5$. Escreva as coordenadas de \mathbf{w} na base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.



Resolução:

Considerando a base canônica (\mathbf{i}, \mathbf{j}) , com \mathbf{j} paralelo e com mesmo sentido de \mathbf{u} obtemos:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = (3 \cos 30^\circ)\mathbf{i} - (3 \sin 30^\circ)\mathbf{j} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{w} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}.$$

Fazendo $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ obtemos um sistema com solução

$$\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{6}}{12},$$

$$\beta = \frac{5\sqrt{6}}{9}.$$

Exercício 4 (3,0). Sejam $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (2, 0, -1)$ num sistema de coordenadas cartesianas.

- (a) Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
- (b) Determine a projeção de \overrightarrow{AB} sobre \overrightarrow{BC} .
- (c) Ache o comprimento da altura relativa à hipotenusa de ABC .

Resolução: (a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -1, -1)$. Daí $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

(b)

$$\mathbf{p} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}(0, 1, 2).$$

(c)

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \mathbf{p} = (1, 2/5, 1/5).$$

Logo $h = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{30}/5$.