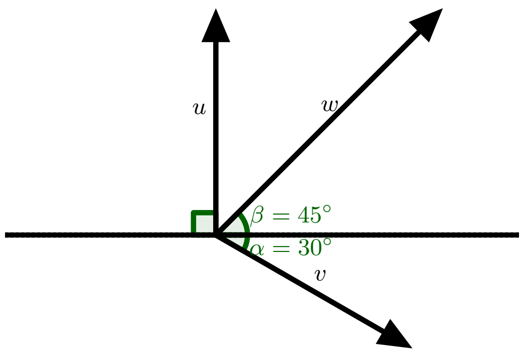
GEOMETRIA ANALÍTICA: PROVA 1
SÃO BERNARDO DO CAMPO - TIPO B

	30^o	45^o	60^o
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Exercícios

Exercício 1 (2,5)**.** Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam três vetores com as direções e sentidos representados na figura abaixo e com $||\mathbf{u}|| = 2$, $||\mathbf{v}|| = 3$ e $||\mathbf{w}|| = 4$. Escreva as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.



Resolução:
Considerando a base canônica $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, com $\mathbf{j}$ paralelo e com mesmo sentido de $\mathbf{u}$ obtemos:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = (3\cos 30^o)\mathbf{i} - (3\text{sen}30^o)\mathbf{j} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{w} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}.$$

Fazendo $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ obtemos um sistema com solução

$$\alpha = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\beta = \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

Exercício 2 (3,0)**.** Sejam $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 1)$ num sistema de coordenadas cartesiano.

(a) Mostre que o triângulo ABC é retângulo.
(b) Determine a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.
(c) Ache o comprimento da altura relativa à hipotenusa de ABC.

Resolução: (a) $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$. Daí $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
(b)

$$\mathbf{p} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BC}||^2}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{5}(0, 1, 2).$$

(c)

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \mathbf{p} = (1, -2/5, 1/5).$$

Logo $h = ||\overrightarrow{AH}|| = \sqrt{30}/5$.

Exercício 3 (2,5)**.** (a) Determine m de modo que $\mathbf{u} = (m, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, m+1)$ e $\mathbf{w} = (m+2, 1, -3)$ sejam coplanares.
(b) Escreva $\mathbf{w}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Resolução: (a)

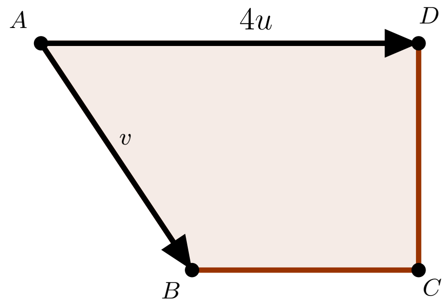
$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (m+1) \\ (m+2) & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo $m = 2$.
(b) $(4, 1, -3) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(0, 1, 3)$. Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Logo $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Exercício 4 (2,0)**.** Sejam A, B, C e D pontos e sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tais que $\overrightarrow{AD} = 4\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.
(a) Escolha $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de modo que eles sejam linearmente independentes e represente-os usando segmentos orientados. Represente adequadamente os pontos A, B, C e D. $ABCD$ é um quadrilátero? Se sim, que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Justifique sua resposta.
(b) Exprima $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Resolução: (a) $ABCD$ é um trapézio, pois AD e BC são paralelos (e de comprimentos distintos).
(b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \\ \overrightarrow{BD} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\mathbf{v} + 4\mathbf{u}, \\ \overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v}. \end{aligned}$$


A
4u
D
v
B
C