Daniel Miranda, Rafael Grisi, Sinuê Lodovici

Notas de aula - versão preliminar

BC0003 - Geometria Analítica

UFABC - Universidade Federal do ABC
Santo André
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda

Versão compilada em: 30 de setembro de 2010

Escrito em LaTeX.

SUMÁRIO

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

$\exists$	:	*existe*
$\forall$	:	*qualquer que seja* ou *para todo(s)*
$\Rightarrow$	:	*implica*
$\Leftrightarrow$	:	*se, e somente se*
$\therefore$	:	*portanto*
$:=$	:	*definição* (o termo à esquerda de := é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	:	*id est* (em português, *isto é*)
$\square$	:	*indica o final de uma demonstração*
$\overleftrightarrow{AB}$	:	*reta passando pelos pontos* A *e* B
AB	:	*segmento de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overline{AB}$	:	*segmento orientado de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overrightarrow{AB}$	:	*vetor determinado pelos pontos* A *e* B
$\mathbf{v}$	:	*vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overline{AB}\|$	:	*comprimento do segmento* $\overline{AB}$
$\|\mathbf{v}\|$	:	*comprimento do vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overrightarrow{AB}\|$	:	*comprimento do vetor* $\overrightarrow{AB}$
$\vert A\vert$	:	*determinante da matriz* A

1 ESTRUTURA VETORIAL DO PLANO E DO ESPAÇO

1.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

O espaço Euclideano é um conjunto de pontos munido de uma estrutura que nos permite medir distâncias e ângulos. O nome "Espaços Euclideanos"tem sua origem num grande matemático grego chamado Euclides que, em sua obra *Elementos*, apresentou, de modo construtivo, um estudo desses espaços. Sua obra tem início em 5 postulados sobre tais espaços, os quais assumiremos como verdadeiros ao longo de nosso estudo de geometria analítica:

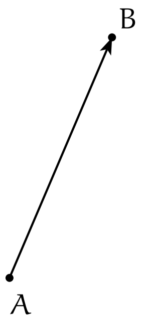
1. É possível desenhar um segmento de reta ligando quaisquer dois pontos distintos do espaço;
2. Pode-se estender um segmento de reta a uma reta (infinita);
3. Um círculo fica bem determinado a partir da designação de um centro e um raio;
4. Todos os ângulos retos (ângulos de 90^o) são iguais;
5. *Postulado das paralelas:* Por um ponto não pertencente a uma dada reta pode-se traçar no máximo uma reta que nunca intersecta a primeira.

Ao longo destas notas denotaremos por $\mathbb{E}^3$ o espaço euclideano tridimensional e por $\mathbb{E}^2$ o plano euclideano. Usaremos letras maiúsculas, A, B, etc., para representar elementos do espaço Euclideano, ou seja, pontos.

Isso posto, comecemos nosso estudo com uma das estruturas sobre a qual pode-se fundamentar a geometria analítica: vetores.

Um vetor é uma classe de segmentos de reta orientados. E como veremos, há três aspectos envolvidos na definição de um vetor: intensidade (denominada também tamanho, comprimento, magnitude ou norma), direção e sentido.

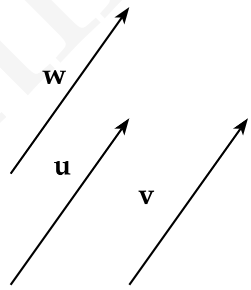
Os vetores desempenham um papel importante na física, onde são usados para representar grandezas que possuem os atributos enumerados anteriormente. Assim por exemplo a velocidade e a aceleração de um objecto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores.



Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados. Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um par ordenado de pontos do espaço Euclideano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A, como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final. A tal vetor denotaremos $\overline{AB}$. Para nossas considerações um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por $\overline{AA}$ ou por $\overline{0}$.

Dois **vetores aplicados** são ditos **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se ambos são nulos, ou se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

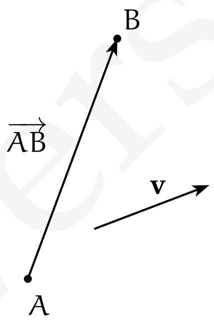
Quando identificamos vetores aplicados equivalentes, obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**. Tais objetos podem ser transportados de um lugar a outro, i.e., podemos escolher livremente o ponto onde inicia tal vetor. Cada escolha, ou seja, um vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um **representante do vetor**.



$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w}$

É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e origem, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

Chamaremos de **vetor nulo** o vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes. O vetor nulo será denotado por $\overrightarrow{AA}$ ou por $\mathbf{0}$.



Vetores serão denotados ou por fontes minúsculas em negrito $\mathbf{a}$ ou através de uma flecha superior: $\overrightarrow{a}$. Dados dois pontos O e P, denotaremos por $\overrightarrow{OP}$ o vetor que tem como representante o vetor aplicado $\overline{OP}$. Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta na direção do vetor.

Como já dito, um vetor tem três aspectos: **direção, sentido e comprimento**. A direção do vetor é a direção do segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o determina. O comprimento do um segmento $\overline{AB}$ será denotado por $\left|\overline{AB}\right|$.

O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{E}^3$ será denotado por V^3. De modo análogo, denotaremos por V^2 o conjunto de vetores associados a $\mathbb{E}^2$, i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.

O comprimento de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ será denotado por $\|\mathbf{v}\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Também diremos que dois vetores são **paralelos** no caso em que um deles for o vetor nulo $\mathbf{0}$ ou quando seus representantes tiverem a mesma direção. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Logo o vetor nulo é paralelo a todo vetor e todo vetor é paralelo a si mesmo.

1.1.1 Operações com Vetores

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Por tradição, denominamos um número real k de **escalar**.

Multiplicação por Escalar: Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar k podemos realizar a multiplicação de k e $\mathbf{v}$ obtendo o vetor $k\mathbf{v}$ definido do seguinte modo:

- Se o vetor $\mathbf{v}$ é nulo ou o escalar k é zero então $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Se $k > 0$, o vetor $k\mathbf{v}$ é o segmento de reta com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Se $k < 0$ então o vetor $k\mathbf{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}$ e comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.

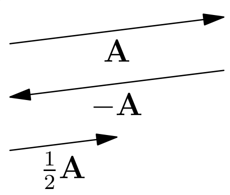


Figura 1.1: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é chamado **vetor unitário**. Dado um vetor $\mathbf{v}$ o vetor unitário

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

possui a mesma direção e sentido que v e é chamado **versor** de **v**.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor **v**. Nesse caso o tamanho de **v** não é importante e podemos multiplica-lo livremente por esse escalar.

Através da multiplicação de vetores podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.1 *Se dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos e* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *então* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos tratar primeiro o caso em que **u** e **v** têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Com essa escolha, provemos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Como **u** e **v** são paralelos, **u** e $\lambda\mathbf{v}$ possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que **u** e **v** possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares **u** e $\lambda\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento.

A demonstração do caso em que **u** e $\lambda\mathbf{v}$ possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhemos $\lambda = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$. ☐

Corolário 1.2 *Dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos se e somente se* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ *para algum* $\theta \in \mathbb{R}$.

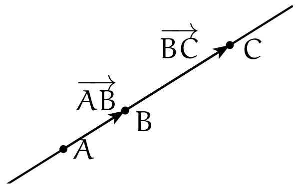
Demonstração: Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos.

Caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, i.e., se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ para $\theta = 0$.

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ então **u** e **v** têm mesma direção, ou seja, são paralelos. ☐

E como consequência do corolário anterior temos:

Teorema 1.3 *Três pontos* A, B, C *pertencem a mesma reta se e somente se* $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ *ou* $\overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$.



Demonstração: Claramente se A, B, C pertencem a mesma reta então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos e consequentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$$

Se $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$, então pelo corolário anterior os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Consequentemente são paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Mas como o ponto B pertence a ambas as reta, essas são coincidentes, i.e., os pontos A, B, C pertencem a mesma reta. $\square$

Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overline{AB}$, representante arbitrário de $\mathbf{v}$, tome um segmento orientado $\overline{BC}$ que representa $\mathbf{u}$, i.e., tome um representante de $\mathbf{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\mathbf{v}$, desta forma o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de v até a extremidade final do representante de $\mathbf{u}$.

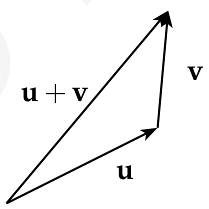


Figura 1.2: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da regra do paralelogramo. Para somar dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O, como na figura 1.3. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P. E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. O vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento $\overline{OP}$ divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$.

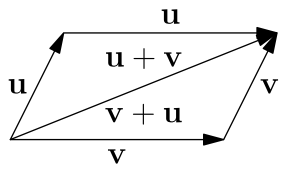
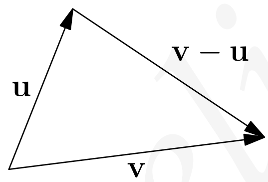


Figura 1.3: Regra do paralelogramo.

Observamos aqui que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição.

A partir da adição de vetores podemos definir a subtração de vetores: o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é o vetor que adicionado a $\mathbf{u}$ dá o vetor $\mathbf{v}$. Consequentemente, se representarmos os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ começando no mesmo ponto, o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ será o vetor que liga a extremidade final de $\mathbf{u}$ a extremidade final de $\mathbf{v}$.

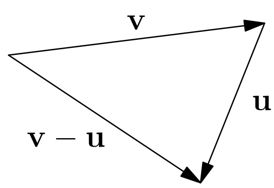


Outro modo de ver a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é através da seguinte propriedade da adição vetores:

Para cada vetor $\mathbf{u}$ *existe um único vetor* $-\mathbf{u}$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

O vetor $-\mathbf{u}$, conhecido como o **vetor oposto** de $\mathbf{u}$, é aquele com mesmo comprimento e direção de $\mathbf{u}$, mas sentido oposto.

Sob esse ponto de vista, a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é apenas a soma de $\mathbf{v}$ com $-\mathbf{u}$.



Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma é nula:

Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e., $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes:

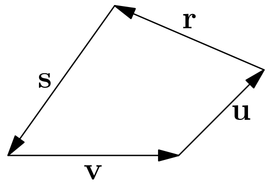


Figura 1.4: $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{0}$

Proposição 1.4 *Sejam* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vetores e* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *escalares. As operações com vetores desfrutam das seguintes propriedades:*

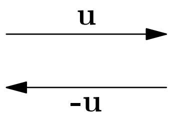
Propriedades da soma:

S1. Propriedade Comutativa: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

S2. Propriedades associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

S3. Elemento Neutro: $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

S4. Elemento oposto: Para cada vetor $\mathbf{u}$ existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

M1. Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

M2. Multiplicação por zero $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

M3. Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$

M4. Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$

M5. Elemento neutro multiplicativo $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Demonstração: Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, veja a figura 1.5. A diagonal é simultaneamente os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.6.

As propriedades S3 e S4 seguem como descrito no texto anterior à Proposição.

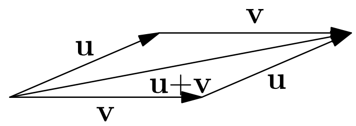


Figura 1.5: Propriedade Comutativa da Soma

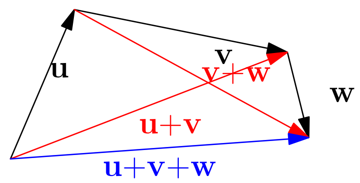


Figura 1.6: Propriedade Associativa da Soma

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2\mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2|\,\|\mathbf{u}\|) = |\lambda_1\lambda_2| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}\|$$

.

A propriedade M4, a distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$, segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1+\lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1+\lambda_2)|\,\|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1|+|\lambda_2|)\|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = \big|(\lambda_1 + \lambda_2)\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\,|\lambda_1| - |\lambda_2|\,\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\|\big|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\big|\|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\|\big| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

□

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação + e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.5 $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 1\mathbf{v}$ e pela propriedade M4 temos que$1\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (1 + 1)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v} + \mathbf{v} =2\mathbf{v}$ □

Exemplo 1.6 $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*, ou seja o vetor oposto a* $\mathbf{v}$ *é* $-1\mathbf{v}$.

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = 1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v})$ e pela propriedade M4 temos que $1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = (1 - 1)\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. Finalmente a propriedade M2 nos diz que $0\mathbf{v} =\mathbf{0}$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a $\mathbf{v}$ é $-1\mathbf{v}$. □

O vetor oposto a $\mathbf{v}$, que como vimos é $(-1\mathbf{v})$ será denotado simplesmente por $-\mathbf{v}$.

Exemplo 1.7 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$.

Demonstração: Vamos provar a primeira implicação: Se $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ então, $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$
Vamos começar calculando $(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v}) \text{ por S2} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v})=\mathbf{u} \text{ por M4 e M5} \tag{1.2}$$

por outro lado

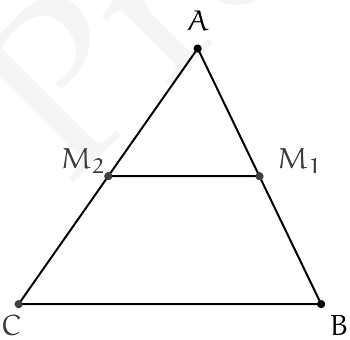
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}= \text{já que por hipótese } \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w} \tag{1.3}$$

e consequentemente por 1.2 e 1.3 temos:

$$u=(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes. □

Exemplo 1.8 *Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.*



Solução: Seja o triângulo Δ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ e seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M_2 o ponto médio do lado $\overline{AC}$. O vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor $\overrightarrow{AC}$ pois ambos possuem mesma direção e sentido e o comprimento de $\overrightarrow{BM_1}$ é metade do comprimento de $\overrightarrow{AM_1}$. Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor $\overrightarrow{AC}$, i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{AM_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \tag{1.5}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.6}$$
$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \tag{1.7}$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \tag{1.8}$$

substituindo 1.7 e 1.7 em 1.8 temos:

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{M_2A} + 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.9}$$
$$\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AM_1}) = 2\overrightarrow{M_2M_1} \tag{1.10}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento $\overline{CB}$ e seu comprimento é metade do último.

□

Exemplo 1.9 *Dado um triângulo de vértices* A, B, C. *Dado* P *o ponto de encontro da bissetriz do ângulo* $\widehat{C}$ *com o lado* $\overline{AB}$ *Então o vetor* CP *é paralelo ao vetor* $\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$, *ou seja,*

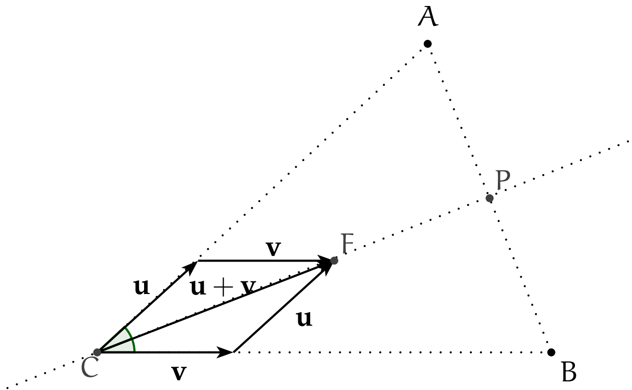
$$\overrightarrow{CP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}\right)$$

Solução:

Observe que os vetores $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$ e $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$ são unitários. Considere agora o paralelogramo determinado por esses vetores, conforme a figura abaixo:

Como os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo comprimento, pois são unitários. O paralelogramo determinado por estes é um losango. E assim a diagonal que liga o vértice C ao vértice F é também a bissetriz do ângulo $\hat{C}$. E consequentemente o vetor CP é paralelo ao vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, i.e,

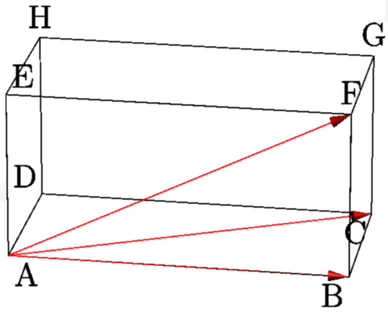
$$\overrightarrow{CP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}\right)$$



□

Exercícios.

Ex. 1.1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, calcule:

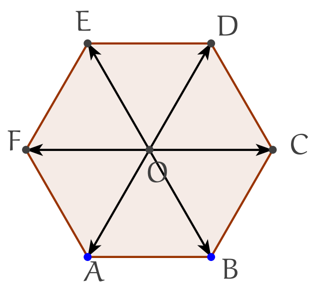


a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$

c) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$

Ex. 1.2 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como na figura abaixo. Calcule:



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$

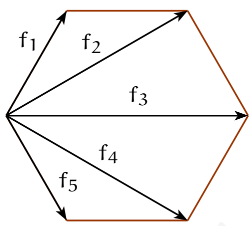
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$

Ex. 1.3 — Dados os vetores $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_5$ os vetores que ligam um vértice de um hexagono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo.

a) Determine a soma desses vetores em função dos vetores $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_3$.



Ex. 1.4 — Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$

Ex. 1.5 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i.e., escreva os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

Ex. 1.6 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

a) $(-\alpha)\,\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$

b) $\alpha\,(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$

c) $-\alpha\,(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$

Ex. 1.7 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

Ex. 1.8 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ex. 1.9 — Prove que dados dois vetores u e v não paralelos então se

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \overrightarrow{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Como vimos na seção anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Por exemplo, multiplicando um vetor não-nulo por um escalar de módulo diferente de 1 obtemos um vetor de módulo diferente do vetor original. De modo semelhante, dados dois vetores não-nulos com diferentes direções, sua soma é um vetor que tem direção diferente dos dois vetores somados.

Observando isso, alguém poderia perguntar:

Quantos vetores eu preciso dar para a partir deles, através das operações de soma e multiplicação de vetor por escalar, escrever todos os demais vetores existentes no espaço?

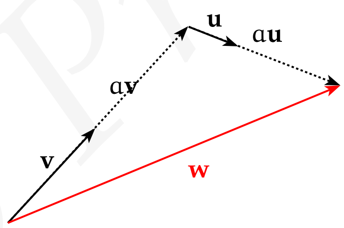


Figura 1.7: O vetor **w** pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores **u** e **v**.

Com o objetivo de responder a questões como a descrita acima, desenvolvemos um conceito fundamental para o estudo de geometria analítica: **Dependência e Independência Linear**. Antes, porém, definamos combinação linear.

Um vetor w é dito **combinação linear** dos vetores $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ se existem escalares $\{\alpha_i\}_{i=1\ldots n}$ tal que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i$$

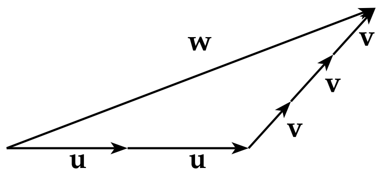


Figura 1.8: $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

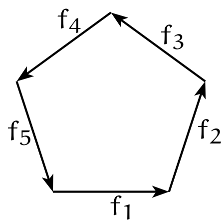


Figura 1.9: O vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Exemplo 1.10 *O vetor w ilustrado na figura 1.8 é combinação de u, v. Pois*

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$$

Exemplo 1.11 *Na figura 1.9 temos que vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear de $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.*

Como os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ formam um poligono fechado sua soma é $\mathbf{0}$

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \mathbf{0}$$

e assim:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 - \mathbf{f}_5$$

Motivados por esse exemplo definimos:

Definição 1.12 Os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que o vetor $\mathbf{v}_i$ seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{v}_j,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

A partir dessa definição temos o seguinte resultado:

Proposição 1.13 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente dependentes se e somente se existem* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ NÃO todos nulos *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração: Suponha que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i},$$

para $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Somando $(-1)\mathbf{v_1}$ a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)\mathbf{v_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}.$$

Logo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos ($\alpha_1 = -1$).

Reciprocamente, considere que existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\alpha_1}$ e isolando $\mathbf{v_1}$ chegamos a:

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \mathbf{v_i}.$$

Ou seja, o vetor $\mathbf{v_1}$ é combinação linear dos demais. □

A negativa lógica de tal proposição nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 1.14 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente independentes se e somente se*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \boldsymbol{0} \right) \Longrightarrow (\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor $\mathbf{0}$ pode ser escrito de modo único como combinação de $\mathbf{v}_i$.

A partir do Teorema 1.14 e da Proposição 1.13, estudar a dependência linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0},$$

com incógnitas α_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Se tal equação admitir apenas a solução $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, então os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são LI. Caso contrário, são LD.

A dependência e independência linear de vetores de V^2 e V^3 pode, também, ser caracterizada geometricamente. Para isso definamos a dependência geométrica de vetores:

Definição 1.15 Para vetores em V^2 e V^3 definimos:

1. Um vetor $\mathbf{v}$ é **geometricamente dependente (GD)** se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. Dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos a uma mesma reta.
3. Três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são paralelos a um mesmo plano.
4. Quatro ou mais vetores são, por definição, **geometricamente dependentes (GD)**.

Um dado conjunto de vetores é dito **geometricamente independente (GI)** se ele não é geometricamente dependente (GD).

Veremos que um conjunto de vetores são **geometricamente dependentes [independentes]** se e somente se são **linearmente dependentes [independentes]**. Tendo em mente tal equivalência, seguem as seguintes observações a cerca de dependência linear de vetores:

Observamos que dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD se e somente $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$ (o que inclui o caso em que um deles é o vetor nulo).

Além disso, observamos que um ponto O e dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes determinam um plano. Para ver isso, tome representantes de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ com origem em O. É fácil ver que existe um único plano do espaço $\mathbb{E}^3$ que contém tais representantes. Assim sendo, dados três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ com $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ é LD se e somente se $\mathbf{w}$ é paralelo ao plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e um ponto qualquer do espaço.

Evite usar raciocínios do tipo: o $\mathbf{u}$ é não-nulo e portanto LI, o vetor $\mathbf{v}$ é não-nulo e também LI, então os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LI. Isso é falso! Pense em dois vetores não-nulos paralelos. Um raciocínio que, no entanto, é legítimo é: dados n vetores, se m desses vetores são LD ($m < n$), então os n vetores são LD. Tente provar isso! Disso, segue imediatamente que qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo $\mathbf{0}$ é LD.

Provemos agora dois lemas de fundamental importância, não apenas para a demonstração da equivalência entre os conceitos de dependência linear e geométrica, mas para toda geometria analítica:

Lema 1.16 (Lema da Base para Planos) *Considere três vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$ *geometricamente dependentes com* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *geometricamente independentes. Temos que* $\mathbf{f}$ *pode ser escrito como combinação linear de* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

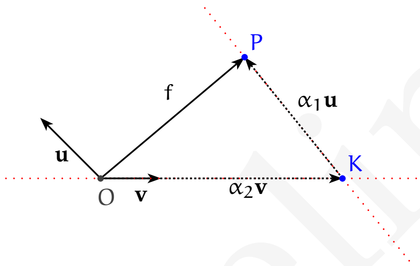


Figura 1.10: Lema da Base para Planos

Demonstração: Considere um ponto arbitrário O do espaço. Primeiramente obeserve que $\mathbf{f}$ é paralelo ao plano determinado pelo pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Considere o representante de $\mathbf{f}$ que começa no ponto O e termina em P, i.e., seja $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$. Considere a reta paralela a $\mathbf{u}$ que passa pelo ponto P e a reta paralela a $\mathbf{v}$ que passa por O. Essas retas se encontram num ponto K (Por quê?). É fácil ver, então, que $\mathbf{f} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$.

Como $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{u}$, tal vetor é um escalar vezes $\mathbf{u}$, ou seja, $\overrightarrow{KP} = \alpha_1 \mathbf{u}$. De maneira análoga $\overrightarrow{OK} = \alpha_2 \mathbf{v}$. Desta forma temos:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}.$$

$\square$

Lema 1.17 (Lema da Base para V^3) *Considere três vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^3$ *geometricamente independentes. Temos que, para qualquer* $\mathbf{f} \in V^3$, *vale que* $\mathbf{f}$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, *ou seja:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w},$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

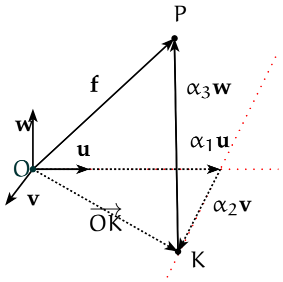


Figura 1.11: Lema da Base para o Espaço

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração anterior. Começamos escolhendo representantes dos vetores $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que começam no ponto O (veja a figura **??**). Seja então a reta paralela a $\mathbf{w}$ passando por O. Essa reta intercepta o plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no ponto K.

O vetor $\overrightarrow{OK}$ estando no mesmo plano que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v}$$

O vetor $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{w}$, i.e, $\overrightarrow{KP} = \alpha_3\mathbf{w}$. Finalmente como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ temos que:

$$\mathbf{f} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w}.$$

□

Uma vez provados esses resultados demonstremos o seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Os conceitos de dependência e independência geométrica e dependência e independência linear são equivalentes.*

Demonstração:

1. Se um vetor $\mathbf{v}$ é GD, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daí temos que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha = 1 \neq 0$. Daí pela Proposição 1.13 segue que $\mathbf{v}$ é LD. Reciprocamente, se $\mathbf{v}$ é LD então $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha \neq 0$ então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, assim, o vetor $\mathbf{v}$ é GD.

2. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, então $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$. Pelo Corolário 1.2, ou $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ $(\lambda, \theta \in \mathbb{R})$. Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD.

   Por outro lado, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD então um dos vetores é combinação linear do outro, i.e., temos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ $(\lambda, \theta \in \mathbb{R})$. E assim, pelo Corolário 1.2, temos que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos e, portanto, GD.

3. Se três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD, então duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Vale então que:

   $$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + 0\mathbf{w}.$$

   Logo $\mathbf{u}$ é combinação linear dos demais vetores e, portanto, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI, pelo Lema 1.16 temos que

   $$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Assim, os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Reciprocamente, suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD. Temos então que um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \theta\mathbf{w}$. Segue que o vetor $\mathbf{u}$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (Por quê?). Logo os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares e, consequentemente, GD.

4. Considere n vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$, com $n \geqslant 4$ (portanto um conjunto GD de vetores). Duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GI.

   Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3$. Segue que:

   $$\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^{n} 0\mathbf{v}_i.$$

   Logo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   Caso tenhamos $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ GD e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ GI, pelo Lema 1.17,

   $$\mathbf{v}_4 = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Daí temos:

   $$\mathbf{v}_4 = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} + \sum_{i=5}^{n} 0\mathbf{v_i}.$$

   Logo, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   A recíproca no caso de quatro ou mais vetores é imediata. Por definição, quatro ou mais vetores são GD.

□

Proposição 1.19 *Seja* $\mathbf{u}$ *um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i}$$

então essa representação é única.

Demonstração: Suponha que a representação não é única

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i$$

então:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

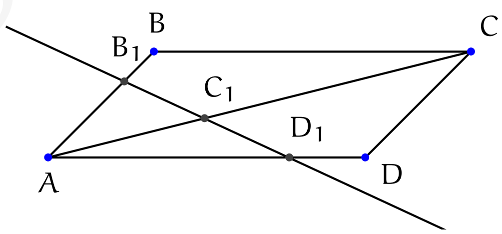
e logo

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Como os vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$ são linearmente independentes, temos que para cada i, $(\alpha_i - \alpha_i') = 0$, e assim $\alpha_i = \alpha_i'$. Dessa forma, temos que a representação é única. □

Exemplo 1.20 *Dado um paralelogramo* $ABCD$*. Seja* l *uma linha reta que intercepta* AB, AC *e* AD *nos pontos* B_1, C_1 *e* D_1 *respectivamente. Prove que se* $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \overrightarrow{AD}$ *e* $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{AC}$ *então:*

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$



Solução: Assuma que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Então $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \mathbf{b}$ e $AC_1 = \lambda_3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Como os três pontos A_1, B_1 e C_1 estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{B_1D_1} \tag{1.11}$$

Mas $\overrightarrow{B_1C_1} = AC_1 - AB_1 = (\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3\mathbf{b}$
e $\overrightarrow{B_1D_1} = AD_1 - AB_1 = -\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$
Substituindo as expressões acima em 1.11, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3\mathbf{b} = -\,k\lambda_1\mathbf{a} + k\lambda_2\mathbf{b}$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\,(\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + \mathbf{b}\,(\lambda_3 - k\lambda_2) = \mathbf{0}$$

E logo $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$.

Da segunda equação obtemos $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. Substituindo k na primeira equação e dividindo a mesma por $\lambda_1\lambda_3$ segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

$\square$

1.3 BASES

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$ **gera** o espaço (um dado plano) se qualquer vetor $\mathbf{w}$ do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Definição 1.21 Uma **base** para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{v}_i\}$ linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).

Dados dois vetores no plano $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ não paralelos, é de se esperar que possamos atingir qualquer outro ponto apenas através de movimentos na direção de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Ou seja dado um ponto P esperamos poder escrever o vetor $\overrightarrow{OP}$ como soma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$. Uma expressão da forma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$ é dita uma combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$

Teorema 1.22 (da base para planos) *Qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores paralelos (e não nulos)* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$$

com m *e* $n \in \mathbb{R}$ *únicos.*

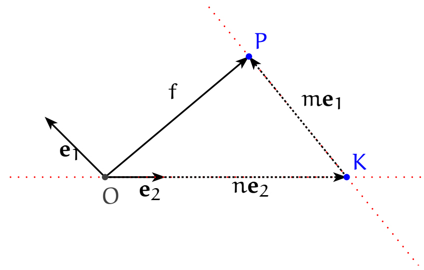


Figura 1.12: Teorema da Base para Planos

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.16 e da Proposição 1.19. □

Corolário 1.23 *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores.*

Um conjunto de vetores $\{v_i\}_{i=1...n}$ gera o espaço se qualquer vetor w do espaço pode ser escrito como combinação linear de $\{v_i\}_{i=1...n}$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Teorema 1.24 (Base para o Espaço) *No espaço tridimensional, sejam* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *no espaço pode ser escrito como combinação linear única de* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$.

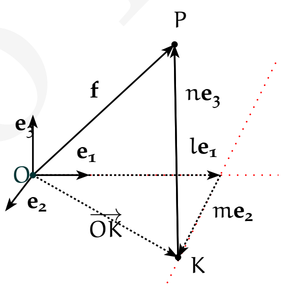


Figura 1.13: Teorema da Base para o Espaço

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.17 e da Proposição 1.19. □

Exercícios.

Ex. 3.1 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

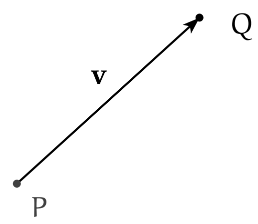
Ex. 3.2 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\}$ também é L.I.

Ex. 3.3 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w}-2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

1.4 SOMA DE PONTO COM VETOR

Dado um ponto P e um vetor $\overrightarrow{v}$ podemos definir uma soma de vetor com ponto do seguinte modo.

Seja um representante de $\overrightarrow{v}$ que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:



$$P + \mathbf{v} := Q$$

Ou seja, a soma do ponto com o vetor $\mathbf{v}$ nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de v.

Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + \mathbf{v} = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.

Proposição 1.25 *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

1. $P + \mathbf{O} = P$
2. $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
4. $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração: Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\mathbf{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.
3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

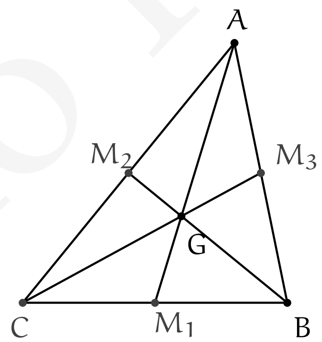
   Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

   Logo

$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.12}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.13}$$
$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.14}$$

□

Exemplo 1.26 *Sejam* M_1, M_2, M_3 *os pontos médios dos lados* AB, BC *e* CA *do triângulo* ABC. *Prove que as três medianas têm um único ponto comum, que divide* AM_1, BM_2 *e* CM_3 *na razão* 2 *para* 1. *Esse ponto é conhecido como baricentro do triângulo.*



Solução: Dividiremos a resolução do exercício em duas partes:

1. Mostrar que G divide AM_1 e BM_2 na razão 2 para 1, ou seja, que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

2. Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1, i.e.,

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}$$

Resolvidas as partes seguirá de modo natural que o baricentro divide as medianas na razão 2 para 1.

De modo a tornar a notação da resolução mais limpa, chamemos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente. Observe que, como os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI, todos os demais vetores do plano podem ser escritos em função desses.

Estabelecida essa notação, segue imediatamente que $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1. Para estudarmos a intersecção G das medianas AM_1 e BM_2, escrevamos inicialmente os vetores $\overrightarrow{AM_1}$ e $\overrightarrow{BM_2}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$
$$\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

Como A, G e M_1 são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha\overrightarrow{BM_2} = \alpha\left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right).$$

Observamos que, nesse ponto, não sabemos que G divide os segmentos AM_1 e BM_2 na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes (λ e α) para os escalares das equações acima.

É fácil ver que uma equação envolvendo os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BG}$ é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Donde temos:

$$\alpha\left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Isolando os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos então:

$$\mathbf{a}\left(-\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \mathbf{b}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI segue então que:

$$\begin{cases} -\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, G divide tanto o segmento AM_1 quanto o segmento BM_2 na razão 2 para 1.

2. Para mostrar que C, G e M_3 são colineares, mostremos que a equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta\overrightarrow{CM_3}$$

com incógnita em β admite solução real.

Inicialmente escrevamos $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{CM_3}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Temos assim a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right).$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos:

$$\mathbf{a}\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) + \mathbf{b}\left(-\frac{2}{3} + \beta\right) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases}$$

Tal sistema admite uma solução:

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Isso mostra então que Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1.

$\square$

Exercícios.

Ex. 4.1 — Prove que:

a) $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \mathbf{P}$

b) $P + \mathbf{u}$ =Q+$\mathbf{v}$ então $\mathbf{u}$ =PQ+$\mathbf{v}$

c) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Ex. 4.2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutualmente ao meio.

Ex. 4.3 — Sendo A e B dois pontos, mostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$

Ex. 4.4 — Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Ex. 4.5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$.

Ex. 4.6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

Ex. 4.7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

Ex. 4.8 — Sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC

Ex. 4.9 —

a) Exprima $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$

Ex. 4.10 — Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O prove que

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{AD}} + \overrightarrow{\mathbf{AE}} + \overrightarrow{\mathbf{AF}} = 6\overrightarrow{\mathbf{AO}}$$

ÍNDICE REMISSIVO