

Daniel Miranda, Rafael Grisi, Sinuê Lodovici

Notas de aula - versão preliminar



BC0003 - Geometria Analítica

UFABC - Universidade Federal do ABC
Santo André

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda>

Versão compilada em: 22 de setembro de 2010

Escrito em \LaTeX .

SUMÁRIO

Símbolos e notações gerais	iii
1 Estrutura Vetorial do Plano e do Espaço	1
1.1 Definições Elementares	1
1.1.1 Operações com Vetores	3
1.2 Dependência e Independência Linear de Vetores	14
1.3 Bases	23
1.4 Soma de Ponto com Vetor	24
Índice Remissivo	30

Versão Preliminar

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

\exists	: <i>existe</i>
\forall	: <i>qualquer que seja</i> ou <i>para todo(s)</i>
\Rightarrow	: <i>implica</i>
\Leftrightarrow	: <i>se, e somente se</i>
\therefore	: <i>portanto</i>
$:=$: <i>definição</i> (o termo à esquerda de $:=$ é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	: <i>id est</i> (em português, isto é)
\square	: <i>indica o final de uma demonstração</i>
\overleftrightarrow{AB}	: <i>reta passando pelos pontos A e B</i>
AB	: <i>segmento de reta ligando os pontos A e B</i>
\overline{AB}	: <i>segmento orientado de reta ligando os pontos A e B</i>
\vec{AB}	: <i>vetor determinado pelos pontos A e B</i>
\mathbf{v}	: <i>vetor \mathbf{v}</i>
$\ \overline{AB}\ $: <i>comprimento do segmento \overline{AB}</i>
$\ \mathbf{v}\ $: <i>comprimento do vetor \mathbf{v}</i>
$\ \vec{AB}\ $: <i>comprimento do vetor \vec{AB}</i>
$ A $: <i>determinante da matriz A</i>

1

ESTRUTURA VETORIAL DO PLANO E DO ESPAÇO

1.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

O espaço Euclidiano é um conjunto de pontos munido de uma estrutura que nos permite medir distâncias e ângulos. O nome “Espaços Euclidianos” tem sua origem num grande matemático grego chamado Euclides que, em sua obra *Elementos*, apresentou, de modo construtivo, um estudo desses espaços. Sua obra tem início em 5 postulados sobre tais espaços, os quais assumiremos como verdadeiros ao longo de nosso estudo de geometria analítica:

1. É possível desenhar um segmento de reta ligando quaisquer dois pontos distintos do espaço;
2. Pode-se estender um segmento de reta a uma reta (infinita);
3. Um círculo fica bem determinado a partir da designação de um centro e um raio;
4. Todos os ângulos retos (ângulos de 90°) são iguais;
5. *Postulado das paralelas*: Por um ponto não pertencente a uma dada reta pode-se traçar no máximo uma reta que nunca intersecta a primeira.

Ao longo destas notas denotaremos por \mathbb{E}^3 o espaço euclidiano tridimensional e por \mathbb{E}^2 o plano euclidiano. Usaremos letras maiúsculas, A , B , etc., para representar elementos do espaço Euclidiano, ou seja, pontos.

Isso posto, comecemos nosso estudo com uma das estruturas sobre a qual pode-se fundamentar a geometria analítica: vetores.

Um vetor é uma classe de segmentos de reta orientados. E como veremos, há três aspectos envolvidos na definição de um vetor: intensidade (denominada também tamanho, comprimento, magnitude ou norma), direção e sentido.

Os vetores desempenham um papel importante na física, onde são usados para representar grandezas que possuem os atributos enumerados anteriormente. Assim por exemplo a velocidade e a aceleração de um objecto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores.



Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados. Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um par ordenado de pontos do espaço Euclidiano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A , como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final. A tal vetor denotaremos \overrightarrow{AB} . Para nossas considerações um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por \overrightarrow{AA} ou por $\vec{0}$.

Dois **vetores aplicados** são ditos **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se ambos são nulos, ou se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

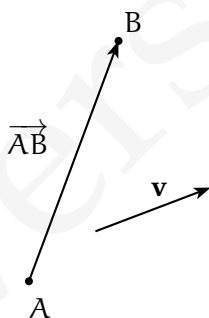
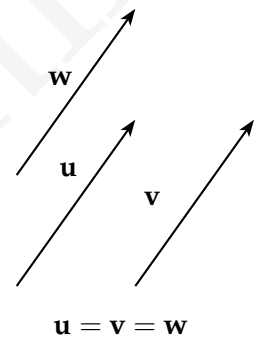
Quando identificamos vetores aplicados equivalentes, obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**. Tais objetos podem ser transportados de um lugar a outro, i.e., podemos escolher livremente o ponto onde inicia tal vetor. Cada escolha, ou seja, um vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um **representante do vetor**.

É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e origem, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

Chamaremos de **vetor nulo** o vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes. O vetor nulo será denotado por \overrightarrow{AA} ou por $\mathbf{0}$.

Vetores serão denotados ou por fontes minúsculas em negrito \mathbf{a} ou através de uma flecha superior: \vec{a} . Dados dois pontos O e P , denotaremos por \overrightarrow{OP} o vetor que tem como representante o vetor aplicado \overrightarrow{OP} . Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta na direção do vetor.

Como já dito, um vetor tem três aspectos: **direção, sentido e comprimento**. A direção do vetor é a direção do segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o determina. O comprimento de um segmento \overrightarrow{AB} será denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.



O conjunto de todos os vetores de \mathbb{E}^3 será denotado por V^3 . De modo análogo, denotaremos por V^2 o conjunto de vetores associados a \mathbb{E}^2 , i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.

O comprimento de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ será denotado por $\|v\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Também diremos que dois vetores são **paralelos** no caso em que um deles for o vetor nulo $\mathbf{0}$ ou quando seus representantes tiverem a mesma direção. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Logo o vetor nulo é paralelo a todo vetor e todo vetor é paralelo a si mesmo.

1.1.1 Operações com Vetores

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Por tradição, denominamos um número real k de **escalar**.

Multiplicação por Escalar: Dado um vetor v e um escalar k podemos realizar a multiplicação de k e v obtendo o vetor kv definido do seguinte modo:

- Se o vetor v é nulo ou o escalar k é zero então $kv = \mathbf{0}$
- Se $k > 0$, o vetor kv é o segmento de reta com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|k| \|v\|$.
- Se $k < 0$ então o vetor kv tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor v e comprimento $|k| \|v\|$.

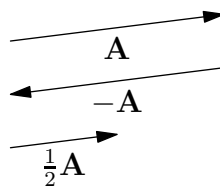


Figura 1.1: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é chamado **vetor unitário**. Dado um vetor v o vetor unitário

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|}$$

possui a mesma direção e sentido que v e é chamado **versor** de v .

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor v . Nesse caso o tamanho de v não é importante e podemos multiplicá-lo livremente por esse escalar.

Através da multiplicação de vetores podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.1 *Se dois vetores u, v são paralelos e $v \neq \mathbf{0}$ então $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Vamos tratar primeiro o caso em que u e v têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|v\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|u\|}{\|v\|}$$

Com essa escolha, provemos que $u = \lambda v$.

Como u e v são paralelos, u e λv possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que u e v possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares u e λv possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda v\| = \lambda \|v\| = \frac{\|u\|}{\|v\|} \|v\| = \|u\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento.

A demonstração do caso em que u e λv possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhemos $\lambda = -\frac{\|u\|}{\|v\|}$. \square

Corolário 1.2 *Dois vetores u, v são paralelos se e somente se $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $v = \theta u$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$.*

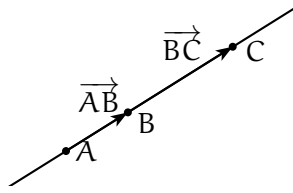
Demonstração: Suponha que u, v são paralelos.

Caso $v \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, i.e., se $v = \mathbf{0}$ então $v = \theta u$ para $\theta = 0$.

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se $u = \lambda v$ ou $v = \theta u$ então u e v têm mesma direção, ou seja, são paralelos. \square

E como consequência do corolário anterior temos:

Teorema 1.3 *Três pontos A, B, C pertencem a mesma reta se e somente se $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$.*



Demonstração: Claramente se A, B, C pertencem a mesma reta então os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são paralelos e conseqüentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$$

Se $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$, então pelo corolário anterior os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são paralelos. Conseqüentemente são paralelas as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{BC} . Mas como o ponto B pertence a ambas as retas, essas são coincidentes, i.e., os pontos A, B, C pertencem a mesma reta. \square

Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, de dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado \overline{AB} , representante arbitrário de \mathbf{v} , tome um segmento orientado \overline{BC} que representa \mathbf{u} , i.e., tome um representante de \mathbf{u} com origem na extremidade final do representante de \mathbf{v} , desta forma o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado \overline{AC} , ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de \mathbf{v} até a extremidade final do representante de \mathbf{u} .

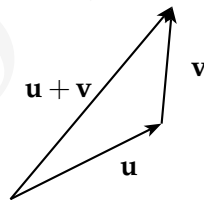


Figura 1.2: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da regra do paralelogramo. Para somar dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O , como na figura 1.3. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P . E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal \overrightarrow{OP} é a soma dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} . O vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois

o segmento \overline{OP} divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} .

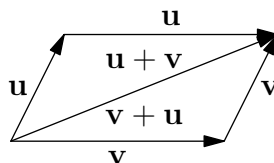
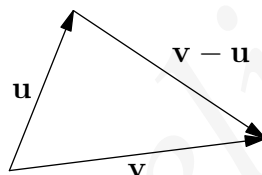


Figura 1.3: Regra do paralelogramo.

Observamos aqui que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição.

A partir da adição de vetores podemos definir a subtração de vetores: o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é o vetor que adicionado a \mathbf{u} dá o vetor \mathbf{v} . Conseqüentemente, se representarmos os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} começando no mesmo ponto, o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ será o vetor que liga a extremidade final de \mathbf{u} a extremidade final de \mathbf{v} .

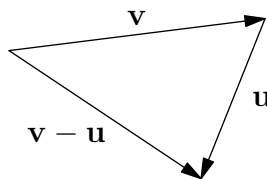


Outro modo de ver a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é através da seguinte propriedade da adição vetores:

Para cada vetor \mathbf{u} existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

O vetor $-\mathbf{u}$, conhecido como o **vetor oposto** de \mathbf{u} , é aquele com mesmo comprimento e direção de \mathbf{u} , mas sentido oposto.

Sob esse ponto de vista, a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é apenas a soma de \mathbf{v} com $-\mathbf{u}$.



Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma é nula:

Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e., $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes:

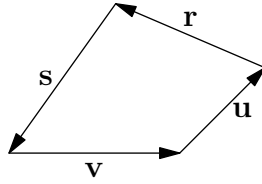
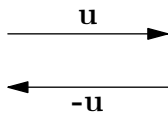


Figura 1.4: $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{0}$

Proposição 1.4 *Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vetores e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ escalares. As operações com vetores desfrutam das seguintes propriedades:*

Propriedades da soma:

- S1. Propriedade Comutativa: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- S2. Propriedades associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- S3. Elemento Neutro: $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- S4. Elemento oposto: Para cada vetor \mathbf{u} existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

- M1. Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
- M2. Multiplicação por zero $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- M3. Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$
- M4. Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$
- M5. Elemento neutro multiplicativo $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Demonstração: Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , veja a figura 1.5. A diagonal é simultaneamente os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.6.

As propriedades S3 e S4 seguem como descrito no texto anterior à Proposição.

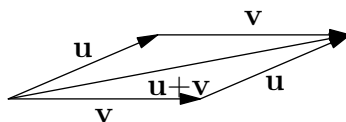


Figura 1.5: Propriedade Comutativa da Soma

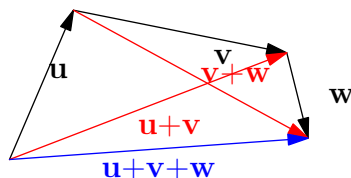


Figura 1.6: Propriedade Associativa da Soma

A propriedade M₁ segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M₂ e M₅ são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M₃, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{u} = \lambda_1 (\lambda_2 \mathbf{u})$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{u}$ e $\lambda_1 (\lambda_2 \mathbf{u})$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido \mathbf{u} se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a \mathbf{u} se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{u}$ e $\lambda_1 (\lambda_2 \mathbf{u})$ são os mesmos pois:

$$\|(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2 \mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2| \|\mathbf{u}\|) = |\lambda_1 \lambda_2| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|(\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{u}\|$$

A propriedade M₄, a distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{u}$, segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{u}$ e $\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)| \|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|) \|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1 \mathbf{u}\| + \|\lambda_2 \mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1 \mathbf{u}\| + \|\lambda_2 \mathbf{u}\| = \|\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)|\|\mathbf{u}\| = |\lambda_1| - |\lambda_2|\|\mathbf{u}\| = \left| \|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\| \right|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\left| \|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\| \right| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

□

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação $+$ e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.5 $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 1\mathbf{v}$ e pela propriedade M4 temos que $1\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (1 + 1)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ □

Exemplo 1.6 $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, ou seja o vetor oposto a \mathbf{v} é $-1\mathbf{v}$.

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = 1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v})$ e pela propriedade M4 temos que $1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = (1 - 1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. Finalmente a propriedade M2 nos diz que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a \mathbf{v} é $-1\mathbf{v}$. □

O vetor oposto a \mathbf{v} , que como vimos é $(-1\mathbf{v})$ será denotado simplesmente por $-\mathbf{v}$.

Exemplo 1.7 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$.

Demonstração: Vamos provar a primeira implicação: Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ então, $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$

Vamos começar calculando $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v}$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \text{ por S2} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ por M4 e M5} \tag{1.2}$$

por outro lado

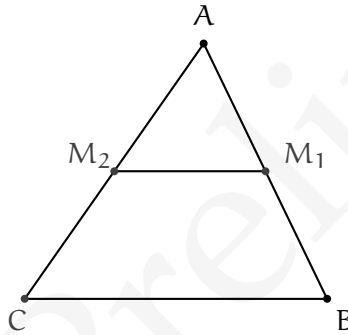
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \text{já que por hipótese } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (1.3)$$

e consequentemente por 1.2 e 1.3 temos:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes. \square

Exemplo 1.8 Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



Solução: Seja o triângulo Δ de lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} e seja M_1 o ponto médio do lado \overline{AB} e M_2 o ponto médio do lado \overline{AC} . O vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor \overrightarrow{AB} pois ambos possuem mesma direção e sentido e o comprimento de $\overrightarrow{AM_1}$ é metade do comprimento de \overrightarrow{AB} . Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor \overrightarrow{AC} , i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad (1.4)$$

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad (1.5)$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM_2} \quad (1.7)$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \quad (1.8)$$

substituindo 1.7 e 1.7 em 1.8 temos:

$$\vec{CB} = 2\vec{M_2A} + 2\vec{AM_1} \quad (1.9)$$

$$\vec{CB} = 2(\vec{M_2A} + \vec{AM_1}) = 2\vec{M_2M_1} \quad (1.10)$$

e conseqüentemente:

$$\vec{M_2M_1} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$

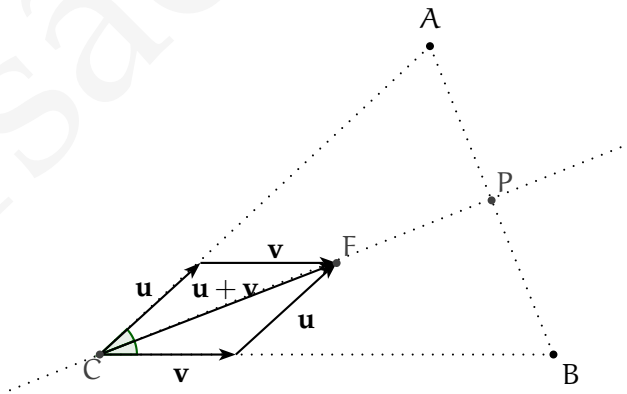
E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento \overline{CB} e seu comprimento é metade do último. □

Exemplo 1.9 Dado um triângulo de vértices A, B, C . Dado P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo \hat{C} com o lado \overline{AB} Então o vetor \overline{CP} é paralelo ao vetor $\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|}$, ou seja,

$$\vec{CP} = \lambda \left(\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} \right)$$

Solução:

Observe que os vetores $\mathbf{u} = \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|}$ e $\mathbf{v} = \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|}$ são unitários. Considere agora o paralelogramo determinado por esses vetores, conforme a figura abaixo:



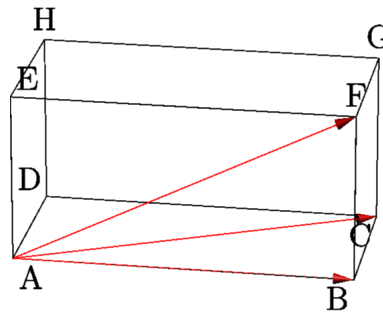
Como os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} possuem o mesmo comprimento, pois são unitários. O paralelogramo determinado por estes é um losango. E assim a diagonal que liga o vértice C ao vértice F é também a bissetriz do ângulo \hat{C} . E conseqüentemente o vetor CP é paralelo ao vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, i.e,

$$\vec{CP} = \lambda \left(\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} \right)$$

□

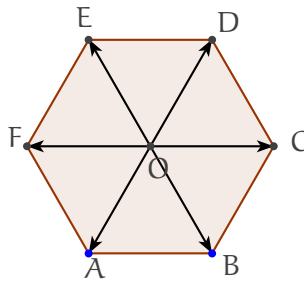
Exercícios.

Ex. 1.1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, calcule:



- a) $\vec{AB} + \vec{FG}$
- b) $\vec{AD} + \vec{HG}$
- c) $2\vec{AD} - \vec{FG} - \vec{BH} + \vec{GH}$

Ex. 1.2 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como na figura abaixo. Calcule:

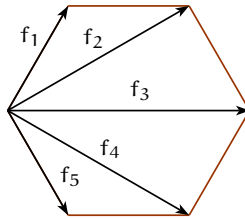


- a) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}$
- b) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA}$
- c) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$
- d) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}$

e) $\vec{OC} + \vec{AF} + \vec{EF}$

Ex. 1.3 — Dados os vetores f_1, \dots, f_5 os vetores que ligam um vértice de um hexágono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo.

- Determine a soma desses vetores em função do vetor f_1 .
- Determine a soma desses vetores em função do vetor f_3 .



Ex. 1.4 — Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que \mathbf{v}

Ex. 1.5 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas \mathbf{x} e \mathbf{y} :

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

Ex. 1.6 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

- $(-\alpha)\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$
- $\alpha(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$
- $-\alpha(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$
- $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$

Ex. 1.7 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

Ex. 1.8 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ex. 1.9 — Prove que dados dois vetores u e v não paralelos então se

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \vec{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Como vimos na seção anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Por exemplo, multiplicando um vetor não-nulo por um escalar de módulo diferente de 1 obtemos um vetor de módulo diferente do vetor original. De modo semelhante, dados dois vetores não-nulos com diferentes direções, sua soma é um vetor que tem direção diferente dos dois vetores somados.

Observando isso, alguém poderia perguntar:

Quantos vetores eu preciso dar para a partir deles, através das operações de soma e multiplicação de vetor por escalar, escrever todos os demais vetores existentes no espaço?

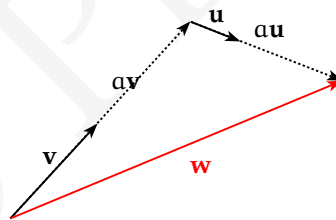


Figura 1.7: O vetor w pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores u e v .

Com o objetivo de responder a questões como a descrita acima, desenvolvemos um conceito fundamental para o estudo de geometria analítica: **Dependência e Independência Linear**. Antes, porém, definamos combinação linear.

Um vetor w é dito **combinação linear** dos vetores $\{v_i\}_{i=1\dots n}$ se existem escalares $\{\alpha_i\}_{i=1\dots n}$ tal que

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

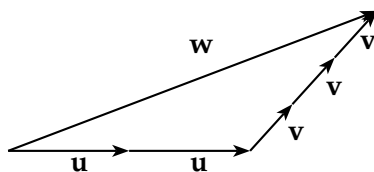


Figura 1.8: $w = 2u + 3v$

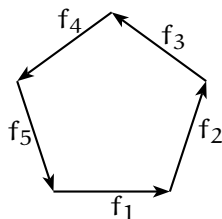


Figura 1.9: O vetor f_1 é combinação linear dos vetores f_2, f_3, f_4, f_5 .

Exemplo 1.10 O vetor w ilustrado na figura 1.8 é combinação de u, v . Pois

$$w = 2u + 3v$$

Exemplo 1.11 Na figura 1.9 temos que vetor f_1 é combinação linear de f_2, f_3, f_4, f_5 .

Como os vetores f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 formam um polígono fechado sua soma é $\mathbf{0}$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = \mathbf{0}$$

e assim:

$$f_1 = -f_2 - f_3 - f_4 - f_5$$

Motivados por esse exemplo definimos:

Definição 1.12 Os vetores v_1, \dots, v_n são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que o vetor v_i seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dizemos que os vetores v_1, \dots, v_n são ditos **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

A partir dessa definição temos o seguinte resultado:

Proposição 1.13 Os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes se e somente se existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ NÃO todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Demonstração: Suponha que os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{v}_i,$$

para $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Somando $(-1)\mathbf{v}_1$ a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Logo $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ não todos nulos ($\alpha_1 = -1$).

Reciprocamente, considere que existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\alpha_1}$ e isolando \mathbf{v}_1 chegamos a:

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^n -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \mathbf{v}_i.$$

Ou seja, o vetor \mathbf{v}_1 é combinação linear dos demais. □

A negativa lógica de tal proposição nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 1.14 Os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes se e somente se

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \right) \implies (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor $\mathbf{0}$ pode ser escrito de modo único como combinação de \mathbf{v}_i .

A partir do Teorema 1.14 e da Proposição 1.13, estudar a dependência linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

com incógnitas α_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Se tal equação admitir apenas a solução $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, então os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são LI. Caso contrário, são LD.

A dependência e independência linear de vetores de V^2 e V^3 pode, também, ser caracterizada geometricamente. Para isso definamos a dependência geométrica de vetores:

Definição 1.15 Para vetores em V^2 e V^3 definimos:

1. Um vetor \mathbf{v} é **geometricamente dependente (GD)** se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. Dois vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} são **geometricamente dependentes (GD)** se \mathbf{u} e \mathbf{v} são paralelos a uma mesma reta.
3. Três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} são paralelos a um mesmo plano.
4. Quatro ou mais vetores são, por definição, **geometricamente dependentes (GD)**.

Um dado conjunto de vetores é dito **geometricamente independente (GI)** se ele não é geometricamente dependente (GD).

Veremos que um conjunto de vetores são **geometricamente dependentes [independentes]** se e somente se são **linearmente dependentes [independentes]**. Tendo em mente tal equivalência, seguem as seguintes observações a cerca de dependência linear de vetores:

Observamos que dois vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} são LD se e somente \mathbf{u} é paralelo a \mathbf{v} (o que inclui o caso em que um deles é o vetor nulo).

Além disso, observamos que um ponto O e dois vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} linearmente independentes determinam um plano. Para ver isso, tome representantes de \mathbf{u}, \mathbf{v} com origem em O . É fácil ver que existe um único plano do espaço \mathbb{E}^3 que contém tais representantes. Assim sendo, dados três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ com \mathbf{u}, \mathbf{v} linearmente independentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ é LD se e somente se \mathbf{w} é paralelo ao plano determinado por \mathbf{u}, \mathbf{v} e um ponto qualquer do espaço.

Evite usar raciocínios do tipo: o \mathbf{u} é não-nulo e portanto LI, o vetor \mathbf{v} é não-nulo e também LI, então os vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} são LI. Isso é falso! Pense em dois vetores não-nulos

paralelos. Um raciocínio que, no entanto, é legítimo é: dados n vetores, se m desses vetores são LD ($m < n$), então os n vetores são LD. Tente provar isso! Disso, segue imediatamente que qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo $\mathbf{0}$ é LD.

Provemos agora dois lemas de fundamental importância, não apenas para a demonstração da equivalência entre os conceitos de dependência linear e geométrica, mas para toda geometria analítica:

Lema 1.16 (Lema da Base para Planos) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$ geometricamente dependentes com \mathbf{u}, \mathbf{v} geometricamente independentes. Temos que \mathbf{f} pode ser escrito como combinação linear de \mathbf{u}, \mathbf{v} , isto é:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

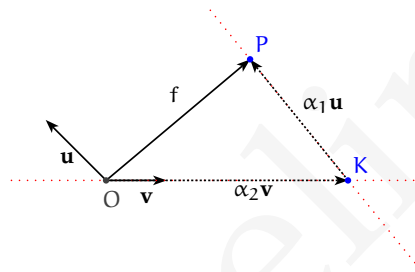


Figura 1.10: Lema da Base para Planos

Demonstração: Considere um ponto arbitrário O do espaço. Primeiramente observe que \mathbf{f} é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} .

Considere o representante de \mathbf{f} que começa no ponto O e termina em P , i.e., seja $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$. Considere a reta paralela a \mathbf{u} que passa pelo ponto P e a reta paralela a \mathbf{v} que passa por O . Essas retas se encontram num ponto K (Por quê?). É fácil ver, então, que $\mathbf{f} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$.

Como \overrightarrow{KP} é paralelo a \mathbf{u} , tal vetor é um escalar vezes \mathbf{u} , ou seja, $\overrightarrow{KP} = \alpha_1 \mathbf{u}$. De maneira análoga $\overrightarrow{OK} = \alpha_2 \mathbf{v}$. Desta forma temos:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}.$$

□

Lema 1.17 (Lema da Base para V^3) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^3$ geometricamente independentes. Temos que, para qualquer $\mathbf{f} \in V^3$, vale que \mathbf{f} é combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, ou seja:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w},$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

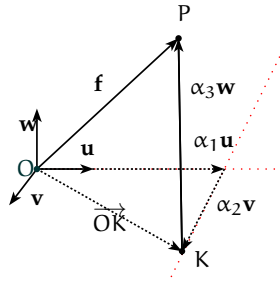


Figura 1.11: Lema da Base para o Espaço

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração anterior. Começamos escolhendo representantes dos vetores $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que começam no ponto O (veja a figura ??). Seja então a reta paralela a \mathbf{w} passando por O . Essa reta intercepta o plano determinado por \mathbf{u}, \mathbf{v} no ponto K .

O vetor \overrightarrow{OK} estando no mesmo plano que \mathbf{u}, \mathbf{v} , pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}$$

O vetor \overrightarrow{KP} é paralelo a \mathbf{w} , i.e, $\overrightarrow{KP} = \alpha_3 \mathbf{w}$. Finalmente como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ temos que:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w}.$$

□

Uma vez provados esses resultados demonstremos o seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Os conceitos de dependência e independência geométrica e dependência e independência linear são equivalentes.*

Demonstração: 1. Se um vetor \mathbf{v} é GD, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daí temos que $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha = 1 \neq 0$. Daí pela Proposição 1.13 segue que \mathbf{v} é LD. Reciprocamente, se \mathbf{v} é LD então $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha \neq 0$ então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, assim, o vetor \mathbf{v} é GD.

2. Se \mathbf{u}, \mathbf{v} são GD, então \mathbf{u} é paralelo a \mathbf{v} . Pelo Corolário 1.2, ou $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ ($\lambda, \theta \in \mathbb{R}$). Se $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ então temos:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

ou seja temos o vetor nulo $\mathbf{0}$ como uma combinação linear de \mathbf{u}, \mathbf{v} com o coeficiente de \mathbf{u} igual a 1. Analogamente, se $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ então teremos o vetor nulo $\mathbf{0}$ como

uma combinação linear de \mathbf{u}, \mathbf{v} com o coeficiente de \mathbf{v} igual a 1. Novamente pela Proposição 1.13, segue que \mathbf{u}, \mathbf{v} são LD.

Por outro lado, se \mathbf{u}, \mathbf{v} são LD então existem números reais α_1, α_2 com pelo menos um diferente de 0 (assumiremos sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$) de modo que:

$$\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Como $\alpha_1 \neq 0$ temos que:

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{v}$$

E assim, temos pelo Corolário 1.2 que \mathbf{u}, \mathbf{v} são paralelos e, portanto, GD.

3. Se três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD, então duas coisas podem ocorrer: ou \mathbf{u}, \mathbf{v} são GD, ou \mathbf{u}, \mathbf{v} são GI.

Se \mathbf{u}, \mathbf{v} são GD, pela argumentação acima, existem α_1, α_2 não todos nulos tais que $\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tomando $\alpha_3 = 0$ temos que $\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w} = \mathbf{0}$ com não todos os coeficientes nulos (α_1 ou α_2 não são ambos nulos). Donde segue que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD e \mathbf{u}, \mathbf{v} são GI, pelo Lema 1.16 temos que

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dessa equação segue que:

$$\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + (-1) \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Ou seja, os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

Reciprocamente, suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD. Temos então que existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ com pelo menos um diferente de 0 (assumiremos sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$) de modo que:

$$\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Como $\alpha_1 \neq 0$ temos que:

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{v} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \mathbf{w}$$

Temos que o vetor \mathbf{u} é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} (Por quê?). Logo os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares e, conseqüentemente, GD.

4. Considere n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, com $n \geq 4$ (portanto um conjunto GD de vetores). Duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são GD, ou $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são GI.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são GD, pela argumentação acima, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não todos nulos tais que $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Tomando $\alpha_j = 0$ para $j > 3$ temos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ com não todos os coeficientes nulos. Logo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são LD.

Caso tenhamos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ GD e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ GI, pelo Lema 1.17,

$$\mathbf{v}_4 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3,$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Tomando $\alpha_i = 0$ para $i \geq 5$, segue:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + (-1) \mathbf{v}_4 + \sum_{i=5}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Donde segue $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ LD.

A recíproca no caso de quatro ou mais vetores é imediata. Por definição, quatro ou mais vetores são GD. □

Proposição 1.19 *Seja \mathbf{u} um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1, \dots, n}$*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

então essa representação é única.

Demonstração: Suponha que a representação não é única

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{v}_i$$

então:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha'_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

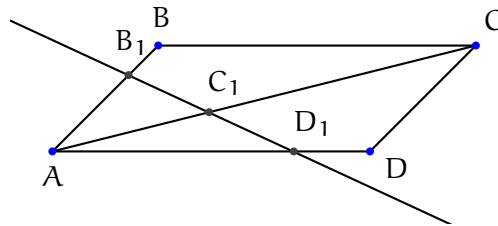
e logo

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Como os vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1, \dots, n}$ são linearmente independentes, temos que para cada i , $(\alpha_i - \alpha'_i) = 0$, e assim $\alpha_i = \alpha'_i$. Dessa forma, temos que a representação é única. □

Exemplo 1.20 Dado um paralelogramo ABCD. Seja l uma linha reta que intercepta AB, AC e AD nos pontos B₁, C₁ e D₁ respectivamente. Prove que se $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{AC}$ então:

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$



Solução: Assuma que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Então $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \mathbf{b}$ e $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Como os três pontos A₁, B₁ e C₁ estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k \overrightarrow{B_1D_1} \tag{1.11}$$

Mas $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{a} + \lambda_3 \mathbf{b}$

e $\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$

Substituindo as expressões acima em 1.11, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{a} + \lambda_3 \mathbf{b} = -k\lambda_1 \mathbf{a} + k\lambda_2 \mathbf{b}$$

Isolando **a, b**:

$$\mathbf{a} (\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + \mathbf{b} (\lambda_3 - k\lambda_2) = \mathbf{0}$$

E logo $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$.

Da segunda equação obtemos $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. Substituindo k na primeira equação e dividindo a mesma por $\lambda_1 \lambda_3$ segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

□

1.3 BASES

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$ **gera** o espaço (um dado plano) se qualquer vetor \mathbf{w} do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Definição 1.21 Uma **base** para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{v}_i\}$ linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).

Dados dois vetores no plano \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 não paralelos, é de se esperar que possamos atingir qualquer outro ponto apenas através de movimentos na direção de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Ou seja dado um ponto P esperamos poder escrever o vetor \overrightarrow{OP} como soma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$. Uma expressão da forma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$ é dita uma combinação linear de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2

Teorema 1.22 (da base para planos) *Qualquer vetor \mathbf{f} pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores paralelos (e não nulos) \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , isto é:*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$$

com m e $n \in \mathbb{R}$ únicos.

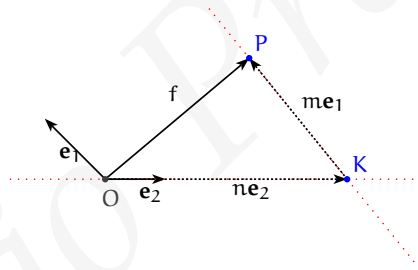


Figura 1.12: Teorema da Base para Planos

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.16 e da Proposição 1.19. \square

Corolário 1.23 *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores.*

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$ gera o espaço se qualquer vetor \mathbf{w} do espaço pode ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Teorema 1.24 (Base para o Espaço) *No espaço tridimensional, sejam $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor \mathbf{f} no espaço pode ser escrito como combinação linear única de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, isto é:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$.

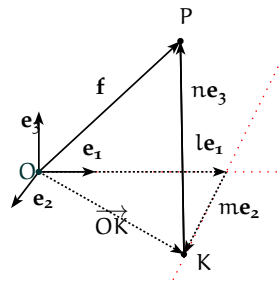


Figura 1.13: Teorema da Base para o Espaço

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.17 e da Proposição 1.19. \square

Exercícios.

Ex. 3.1 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

Ex. 3.2 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ também é L.I.

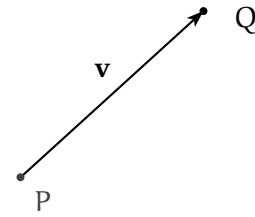
Ex. 3.3 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - 2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

1.4 SOMA DE PONTO COM VETOR

Dado um ponto P e um vetor \vec{v} podemos definir uma soma de vetor com ponto do seguinte modo.

Seja um representante de \vec{v} que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:

$$P + \mathbf{v} := Q$$



Ou seja, a soma do ponto com o vetor \mathbf{v} nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de \mathbf{v} .

Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + \mathbf{v} = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.

Proposição 1.25 *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

1. $P + \mathbf{0} = P$
2. $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
4. $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração: Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\mathbf{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.
3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

Logo

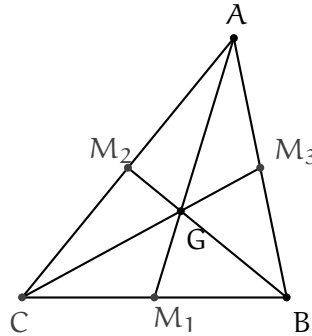
$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.12}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.13}$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.14}$$

□

Exemplo 1.26 Sejam M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC . Prove que as três medianas têm um único ponto comum, que divide AM_1, BM_2 e CM_3 na razão 2 para 1. Esse ponto é conhecido como baricentro do triângulo.



Solução: Dividiremos a resolução do exercício em duas partes:

1. Mostrar que G divide AM_1 e BM_2 na razão 2 para 1, ou seja, que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

2. Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1, i.e.,

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}$$

Resolvidas as partes seguirá de modo natural que o baricentro divide as medianas na razão 2 para 1.

De modo a tornar a notação da resolução mais limpa, chamemos os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} de \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente. Observe que, como os vetores \mathbf{a}, \mathbf{b} são LI, todos os demais vetores do plano podem ser escritos em função desses.

Estabelecida essa notação, segue imediatamente que $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1. Para estudarmos a intersecção G das medianas AM_1 e BM_2 , escrevamos inicialmente os vetores $\overrightarrow{AM_1}$ e $\overrightarrow{BM_2}$ em função de \mathbf{a}, \mathbf{b} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_1} &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \\ \overrightarrow{BM_2} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Como A, G e M_1 são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha \overrightarrow{BM_2} = \alpha \left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right).$$

Observamos que, nesse ponto, não sabemos que G divide os segmentos AM_1 e BM_2 na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes (λ e α) para os escalares das equações acima.

É fácil ver que uma equação envolvendo os vetores \overrightarrow{AG} e \overrightarrow{BG} é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Donde temos:

$$\alpha \left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right) = -\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Isolando os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} temos então:

$$\mathbf{a} \left(-\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} \right) + \mathbf{b} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) = \mathbf{0}.$$

Como \mathbf{a} , \mathbf{b} são LI segue então que:

$$\begin{cases} -\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, G divide tanto o segmento AM_1 quanto o segmento BM_2 na razão 2 para 1.

2. Para mostrar que C, G e M_3 são colineares, mostremos que a equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta \overrightarrow{CM_3}$$

com incógnita em β admite solução real.

Inicialmente escrevamos \overrightarrow{CG} e $\overrightarrow{CM_3}$ em função de \mathbf{a} , \mathbf{b} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}, \\ \overrightarrow{CM_3} &= \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Temos assim a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}\right) = \beta \left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right).$$

Isolando \mathbf{a} , \mathbf{b} temos:

$$\mathbf{a} \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) + \mathbf{b} \left(-\frac{2}{3} + \beta\right) = \mathbf{0}$$

Como \mathbf{a} , \mathbf{b} são LI:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases}$$

Tal sistema admite uma solução:

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Isso mostra então que Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1.

□

Exercícios.

Ex. 4.1 — Prove que:

- $(\mathbf{P} + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \mathbf{P}$
- $\mathbf{P} + \mathbf{u} = \mathbf{Q} + \mathbf{v}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{PQ} + \mathbf{v}$
- $\mathbf{P} + \overrightarrow{PQ} = \mathbf{Q}$

Ex. 4.2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutuamente ao meio.

Ex. 4.3 — Sendo A e B dois pontos, mostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$

Ex. 4.4 — Seja ABCD um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.

Ex. 4.5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \mathbf{0}$.

Ex. 4.6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

Ex. 4.7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

Ex. 4.8 — Sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC

Ex. 4.9 —

a) Exprima \vec{BP} , \vec{AN} e \vec{CM} em função de \vec{CA} e \vec{CB}

Ex. 4.10 — Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O prove que

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}$$

Versão Preliminar

ÍNDICE REMISSIVO

- base, 23
- combinação linear, 15
- GD, 17
- geometricamente
 - dependente, 17
 - independente, 17
- gerar, 23
- GI, 17
- LD, 16
- lema da base
 - plano, 18, 19
- LI, 16
- linearmente
 - dependentes, 16
 - independentes, 16
- operações com vetores, 7
- segmento
 - nulo, 2
 - orientado, 2
- soma de vetores, 5
- teorema da base
 - espaço, 24
 - plano, 23
- versor, 4
- vetor
 - aplicado, 2
 - direcional, 4
 - diretor, 4
 - nulo, 2
 - oposto, 6
 - unitário, 3
- vetores, 2
 - paralelos, 4