Daniel Miranda, Rafael Grisi, Sinuê Lodovici

Notas de aula - versão preliminar

BC0404- Geometria Analítica

UFABC - Universidade Federal do ABC
Santo André
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda
Versão compilada em: 7 de outubro de 2010

Escrito em LaTeX.

SUMÁRIO

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

$\exists$	:	*existe*
$\forall$	:	*qualquer que seja* ou *para todo(s)*
$\Rightarrow$	:	*implica*
$\Leftrightarrow$	:	*se, e somente se*
$\therefore$	:	*portanto*
$:=$	:	*definição* (o termo à esquerda de := é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	:	*id est* (em português, *isto é*)
$\square$	:	*indica o final de uma demonstração*
$\overleftrightarrow{AB}$	:	*reta passando pelos pontos* A *e* B
AB	:	*segmento de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overline{AB}$	:	*segmento orientado de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overrightarrow{AB}$	:	*vetor determinado pelos pontos* A *e* B
$\mathbf{v}$	:	*vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overline{AB}\|$	:	*comprimento do segmento* $\overline{AB}$
$\|\mathbf{v}\|$	:	*comprimento do vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overrightarrow{AB}\|$	:	*comprimento do vetor* $\overrightarrow{AB}$
$\vert A\vert$	:	*determinante da matriz* A

1 ESTRUTURA VETORIAL DO PLANO E DO ESPAÇO

1.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

O espaço Euclideano é um conjunto de pontos munido de uma estrutura que nos permite medir distâncias e ângulos. O nome "Espaços Euclideanos"tem sua origem num grande matemático grego chamado Euclides que, em sua obra *Elementos*, apresentou, de modo construtivo, um estudo desses espaços. Sua obra tem início em 5 postulados sobre tais espaços, os quais assumiremos como verdadeiros ao longo de nosso estudo de geometria analítica:

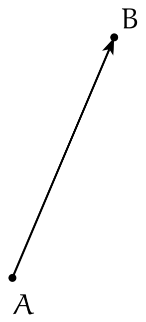
1. É possível desenhar um segmento de reta ligando quaisquer dois pontos distintos do espaço;
2. Pode-se estender um segmento de reta a uma reta (infinita);
3. Um círculo fica bem determinado a partir da designação de um centro e um raio;
4. Todos os ângulos retos (ângulos de 90^{o}) são iguais;
5. *Postulado das paralelas:* Por um ponto não pertencente a uma dada reta pode-se traçar no máximo uma reta que nunca intersecta a primeira.

Ao longo destas notas denotaremos por $\mathbb{E}^3$ o espaço euclideano tridimensional e por $\mathbb{E}^2$ o plano euclideano. Usaremos letras maiúsculas, A, B, etc., para representar elementos do espaço Euclideano, ou seja, pontos.

Isso posto, comecemos nosso estudo com uma das estruturas sobre a qual pode-se fundamentar a geometria analítica: vetores.

Um vetor é uma classe de segmentos de reta orientados. E como veremos, há três aspectos envolvidos na definição de um vetor: intensidade (denominada também tamanho, comprimento, magnitude ou norma), direção e sentido.

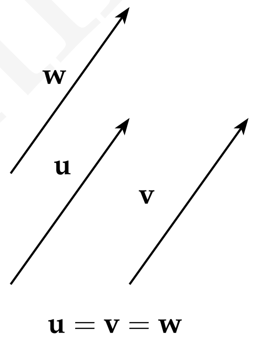
Os vetores desempenham um papel importante na física, onde são usados para representar grandezas que possuem os atributos enumerados anteriormente. Assim por exemplo a velocidade e a aceleração de um objecto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores.



Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados. Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um par ordenado de pontos do espaço Euclideano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A, como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final. A tal vetor denotaremos $\overline{AB}$. Para nossas considerações um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por $\overline{AA}$ ou por $\overline{0}$.

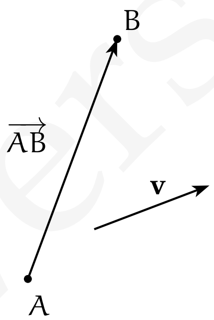
Dois **vetores aplicados** são ditos **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se ambos são nulos, ou se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Quando identificamos vetores aplicados equivalentes, obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**. Tais objetos podem ser transportados de um lugar a outro, i.e., podemos escolher livremente o ponto onde inicia tal vetor. Cada escolha, ou seja, um vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um **representante do vetor**.



É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e origem, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

Chamaremos de **vetor nulo** o vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes. O vetor nulo será denotado por $\overrightarrow{AA}$ ou por $\mathbf{0}$.



Vetores serão denotados ou por fontes minúsculas em negrito $\mathbf{a}$ ou através de uma flecha superior: $\overrightarrow{a}$. Dados dois pontos O e P, denotaremos por $\overrightarrow{OP}$ o vetor que tem como representante o vetor aplicado $\overline{OP}$. Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta na direção do vetor.

Como já dito, um vetor tem três aspectos: **direção, sentido e comprimento**. A direção do vetor é a direção do segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o determina. O comprimento do um segmento $\overline{AB}$ será denotado por $\left|\overline{AB}\right|$.

O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{E}^3$ será denotado por V^3. De modo análogo, denotaremos por V^2 o conjunto de vetores associados a $\mathbb{E}^2$, i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.

O comprimento de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ será denotado por $\|\mathbf{v}\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Também diremos que dois vetores são **paralelos** no caso em que um deles for o vetor nulo $\mathbf{0}$ ou quando seus representantes tiverem a mesma direção. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Logo o vetor nulo é paralelo a todo vetor e todo vetor é paralelo a si mesmo.

1.1.1 Operações com Vetores

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Por tradição, denominamos um número real k de **escalar**.

Multiplicação por Escalar: Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar k podemos realizar a multiplicação de k e $\mathbf{v}$ obtendo o vetor $k\mathbf{v}$ definido do seguinte modo:

- Se o vetor $\mathbf{v}$ é nulo ou o escalar k é zero então $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Se $k > 0$, o vetor $k\mathbf{v}$ é o segmento de reta com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Se $k < 0$ então o vetor $k\mathbf{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}$ e comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.

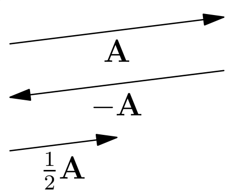


Figura 1.1: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é chamado **vetor unitário**. Dado um vetor $\mathbf{v}$ o vetor unitário

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

possui a mesma direção e sentido que v e é chamado **versor** de $\mathbf{v}$.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor $\mathbf{v}$. Nesse caso o tamanho de $\mathbf{v}$ não é importante e podemos multiplica-lo livremente por esse escalar.

Através da multiplicação de vetores podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.1 *Se dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos e* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *então* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos tratar primeiro o caso em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Com essa escolha, provemos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento.

A demonstração do caso em que $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhemos $\lambda = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Corolário 1.2 *Dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos se e somente se* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ *para algum* $\theta \in \mathbb{R}$.

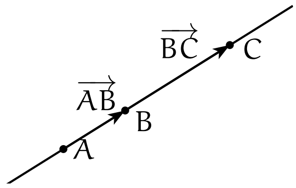
Demonstração: Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos.

Caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, i.e., se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ para $\theta = 0$.

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesma direção, ou seja, são paralelos. □

E como consequência do corolário anterior temos:

Teorema 1.3 *Três pontos* A, B, C *pertencem a mesma reta se e somente se* $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ *ou* $\overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$.



Demonstração: Claramente se A, B, C pertencem a mesma reta então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos e consequentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$$

Se $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$, então pelo corolário anterior os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Consequentemente são paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Mas como o ponto B pertence a ambas as reta, essas são coincidentes, i.e., os pontos A, B, C pertencem a mesma reta. $\square$

Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overline{AB}$, representante arbitrário de $\mathbf{v}$, tome um segmento orientado $\overline{BC}$ que representa $\mathbf{u}$, i.e., tome um representante de $\mathbf{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\mathbf{v}$, desta forma o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de v até a extremidade final do representante de $\mathbf{u}$.

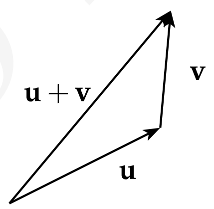


Figura 1.2: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da regra do paralelogramo. Para somar dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O, como na figura 1.3. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P. E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. O vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento $\overline{OP}$ divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores **v** e **u**.

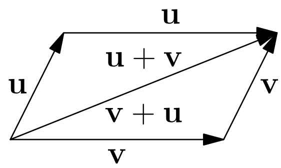
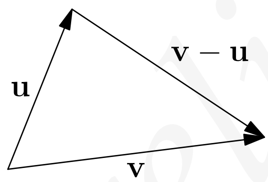


Figura 1.3: Regra do paralelogramo.

Observamos aqui que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição.

A partir da adição de vetores podemos definir a subtração de vetores: o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é o vetor que adicionado a **u** dá o vetor **v**. Consequentemente, se representarmos os vetores **v** e **u** começando no mesmo ponto, o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ será o vetor que liga a extremidade final de **u** a extremidade final de **v**.

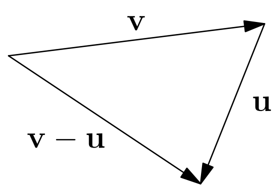


Outro modo de ver a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é através da seguinte propriedade da adição vetores:

Para cada vetor **u** *existe um único vetor* $-\mathbf{u}$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

O vetor $-\mathbf{u}$, conhecido como o **vetor oposto** de **u**, é aquele com mesmo comprimento e direção de **u**, mas sentido oposto.

Sob esse ponto de vista, a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é apenas a soma de **v** com $-\mathbf{u}$.



Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma é nula:

Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e., $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes:

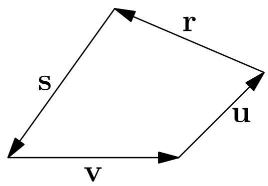


Figura 1.4: $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{0}$

Proposição 1.4 *Sejam* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vetores e* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *escalares. As operações com vetores desfrutam das seguintes propriedades:*

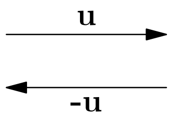
Propriedades da soma:

$\boxed{\text{S1.}}$ Propriedade Comutativa: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

$\boxed{\text{S2.}}$ Propriedades associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

$\boxed{\text{S3.}}$ Elemento Neutro: $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$\boxed{\text{S4.}}$ Elemento oposto: Para cada vetor $\mathbf{u}$ existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

$\boxed{\text{M1.}}$ Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

$\boxed{\text{M2.}}$ Multiplicação por zero $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$\boxed{\text{M3.}}$ Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$

$\boxed{\text{M4.}}$ Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$

$\boxed{\text{M5.}}$ Elemento neutro multiplicativo $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Demonstração: Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores **u** e **v**, veja a figura 1.5. A diagonal é simultaneamente os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.6.

As propriedades S3 e S4 seguem como descrito no texto anterior à Proposição.

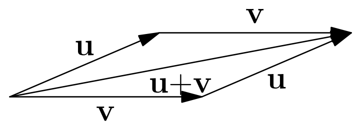


Figura 1.5: Propriedade Comutativa da Soma

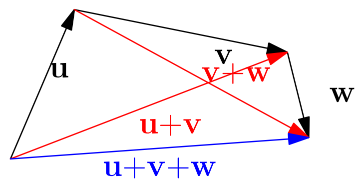


Figura 1.6: Propriedade Associativa da Soma

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2\mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2|\,\|\mathbf{u}\|) = |\lambda_1\lambda_2| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}\|$$

.

A propriedade M4, a distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$, segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1+\lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1+\lambda_2)|\,\|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1|+|\lambda_2|)\|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}\| = \big|(\lambda_1+\lambda_2)\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\,|\lambda_1|-|\lambda_2|\,\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\|\lambda_1\mathbf{u}\|-\|\lambda_2\mathbf{u}\|\big|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\big|\|\lambda_1\mathbf{u}\|-\|\lambda_2\mathbf{u}\|\big| = \|\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

□

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação $+$ e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.5 $\mathbf{v}+\mathbf{v}=2\mathbf{v}$

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v}+\mathbf{v}=1\mathbf{v}+1\mathbf{v}$ e pela propriedade M4 temos que$1\mathbf{v}+1\mathbf{v}=(1+1)\mathbf{v}=2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v}+\mathbf{v}=2\mathbf{v}$ □

Exemplo 1.6 $\mathbf{v}+(-1\mathbf{v})=\mathbf{0}$*, ou seja o vetor oposto a* $\mathbf{v}$ *é* $-1\mathbf{v}$.

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v}+(-1\mathbf{v}) = 1\mathbf{v}+(-1\mathbf{v})$ e pela propriedade M4 temos que $1\mathbf{v}+(-1\mathbf{v})=(1-1)\,\mathbf{v}=0\mathbf{v}$. Finalmente a propriedade M2 nos diz que $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a $\mathbf{v}$ é $-1\mathbf{v}$. □

O vetor oposto a $\mathbf{v}$, que como vimos é $(-1\mathbf{v})$ será denotado simplesmente por $-\mathbf{v}$.

Exemplo 1.7 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ *se, e somente se,* $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$.

Demonstração: Vamos provar a primeira implicação: Se $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ então, $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$

Vamos começar calculando $(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v}) \text{ por } S2 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v})=\mathbf{u} \text{ por } M4 \text{ e } M5 \tag{1.2}$$

por outro lado

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}= \text{já que por hipótese } \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w} \tag{1.3}$$

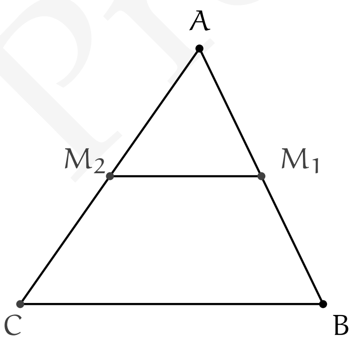
e consequentemente por 1.2 e 1.3 temos:

$$u=(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes.

□

Exemplo 1.8 *Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.*



Solução: Seja o triângulo Δ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ e seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M_2 o ponto médio do lado $\overline{AC}$. O vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor $\overrightarrow{AC}$ pois ambos possuem mesma direção e sentido e o comprimento de $\overrightarrow{BM_1}$ é metade do comprimento de $\overrightarrow{AM_1}$. Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor $\overrightarrow{AC}$, i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{AM_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \tag{1.5}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.6}$$

$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \tag{1.7}$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \tag{1.8}$$

substituindo 1.7 e 1.7 em 1.8 temos:

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{M_2A} + 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.9}$$

$$\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AM_1}) = 2\overrightarrow{M_2M_1} \tag{1.10}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento $\overline{CB}$ e seu comprimento é metade do último.

$\square$

Exemplo 1.9 *Dado um triângulo de vértices A, B, C. Dado P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ com o lado $\overline{AB}$ Então o vetor CP é paralelo ao vetor $\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$, ou seja,*

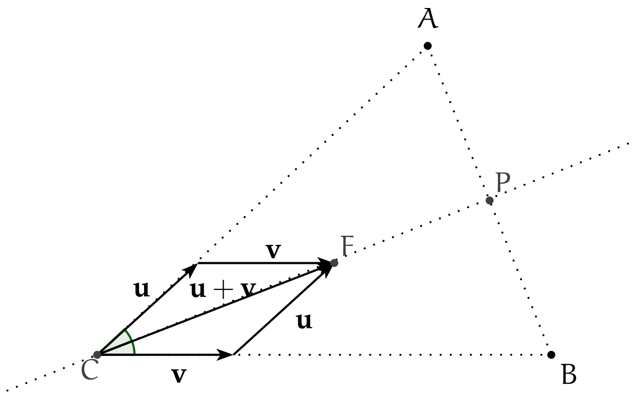
$$\overrightarrow{CP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}\right)$$

Solução:

Observe que os vetores $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$ e $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$ são unitários. Considere agora o paralelogramo determinado por esses vetores, conforme a figura abaixo:

Como os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo comprimento, pois são unitários. O paralelogramo determinado por estes é um losango. E assim a diagonal que liga o vértice C ao vértice F é também a bissetriz do ângulo $\hat{C}$. E consequentemente o vetor CP é paralelo ao vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, i.e,

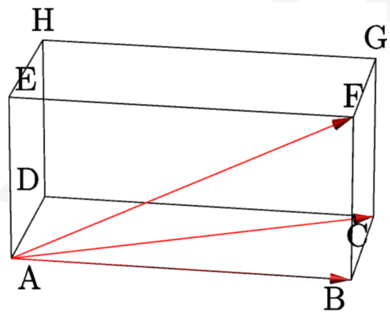
$$\overrightarrow{CP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}\right)$$



$\square$

Exercícios.

Ex. 1.1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, calcule:

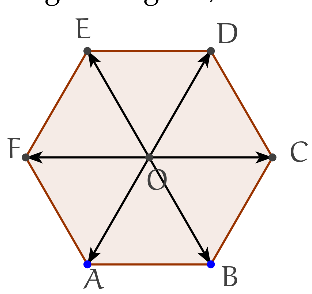


a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$

c) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$

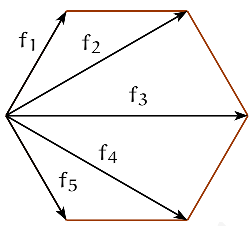
Ex. 1.2 — Sendo ABCDEF um hexágono regular, como na figura abaixo. Calcule:



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$
e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$

Ex. 1.3 — Dados os vetores $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_5$ os vetores que ligam um vértice de um hexagono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo.

a) Determine a soma desses vetores em função dos vetores $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_3$.



Ex. 1.4 — Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$

Ex. 1.5 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i.e., escreva os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

Ex. 1.6 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

a) $(-\alpha)\,\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$
b) $\alpha\,(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$
c) $-\alpha\,(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$

Ex. 1.7 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

Ex. 1.8 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ex. 1.9 — Prove que dados dois vetores u e v não paralelos então se

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \overrightarrow{0}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Como vimos na seção anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Por exemplo, multiplicando um vetor não-nulo por um escalar de módulo diferente de 1 obtemos um vetor de módulo diferente do vetor original. De modo semelhante, dados dois vetores não-nulos com diferentes direções, sua soma é um vetor que tem direção diferente dos dois vetores somados.

Observando isso, alguém poderia perguntar:

Quantos vetores eu preciso dar para a partir deles, através das operações de soma e multiplicação de vetor por escalar, escrever todos os demais vetores existentes no espaço?

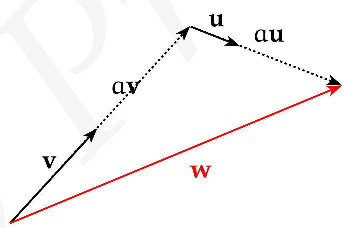


Figura 1.7: O vetor **w** pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores **u** e **v**.

Com o objetivo de responder a questões como a descrita acima, desenvolvemos um conceito fundamental para o estudo de geometria analítica: **Dependência e Independência Linear**. Antes, porém, definamos combinação linear.

Um vetor w é dito **combinação linear** dos vetores $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ se existem escalares $\{\alpha_i\}_{i=1\ldots n}$ tal que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i$$

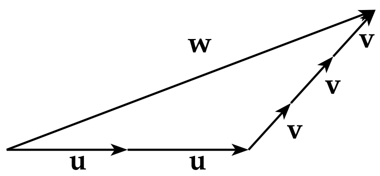


Figura 1.8: $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

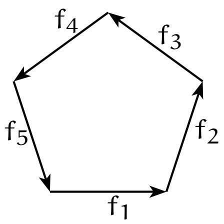


Figura 1.9: O vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Exemplo 1.10 *O vetor w ilustrado na figura 1.8 é combinação de* u, v*. Pois*

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$$

Exemplo 1.11 *Na figura 1.9 temos que vetor* $\mathbf{f}_1$ *é combinação linear de* $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Como os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ *formam um poligono fechado sua soma é* $\boldsymbol{0}$

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \boldsymbol{0}$$

e assim:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 - \mathbf{f}_5$$

Motivados por esse exemplo definimos:

Definição 1.12 Os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que o vetor $\mathbf{v}_i$ seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{v}_j,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

A partir dessa definição temos o seguinte resultado:

Proposição 1.13 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente dependentes se e somente se existem* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ NÃO todos nulos *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração: Suponha que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i},$$

para $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Somando $(-1)\mathbf{v_1}$ a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)\mathbf{v_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}.$$

Logo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos ($\alpha_1 = -1$).

Reciprocamente, considere que existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\alpha_1}$ e isolando $\mathbf{v_1}$ chegamos a:

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \mathbf{v_i}.$$

Ou seja, o vetor $\mathbf{v_1}$ é combinação linear dos demais. □

A negativa lógica de tal proposição nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 1.14 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente independentes se e somente se*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \boldsymbol{0} \right) \Longrightarrow (\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor $\mathbf{0}$ pode ser escrito de modo único como combinação de $\mathbf{v}_i$.

A partir do Teorema 1.14 e da Proposição 1.13, estudar a dependência linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0},$$

com incógnitas α_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Se tal equação admitir apenas a solução $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LI. Caso contrário, são LD.

A dependência e independência linear de vetores de V^2 e V^3 pode, também, ser caracterizada geometricamente. Para isso definamos a dependência geométrica de vetores:

Definição 1.15 Para vetores em V^2 e V^3 definimos:

1. Um vetor $\mathbf{v}$ é **geometricamente dependente (GD)** se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. Dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos a uma mesma reta.
3. Três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são paralelos a um mesmo plano.
4. Quatro ou mais vetores são, por definição, **geometricamente dependentes (GD)**.

Um dado conjunto de vetores é dito **geometricamente independente (GI)** se ele não é geometricamente dependente (GD).

Veremos que um conjunto de vetores são **geometricamente dependentes [independentes]** se e somente se são **linearmente dependentes [independentes]**. Tendo em mente tal equivalência, seguem as seguintes observações a cerca de dependência linear de vetores:

Observamos que dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD se e somente $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$ (o que inclui o caso em que um deles é o vetor nulo).

Além disso, observamos que um ponto O e dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes determinam um plano. Para ver isso, tome representantes de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ com origem em O. É fácil ver que existe um único plano do espaço $\mathbb{E}^3$ que contém tais representantes. Assim sendo, dados três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ com $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ é LD se e somente se $\mathbf{w}$ é paralelo ao plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e um ponto qualquer do espaço.

Evite usar raciocínios do tipo: o $\mathbf{u}$ é não-nulo e portanto LI, o vetor $\mathbf{v}$ é não-nulo e também LI, então os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LI. Isso é falso! Pense em dois vetores não-nulos paralelos. Um raciocínio que, no entanto, é legítimo é: dados n vetores, se m desses vetores são LD ($m < n$), então os n vetores são LD. Tente provar isso! Disso, segue imediatamente que qualquer conjunto de vetores contendo o vetor nulo $\mathbf{0}$ é LD.

Provemos agora dois lemas de fundamental importância, não apenas para a demonstração da equivalência entre os conceitos de dependência linear e geométrica, mas para toda geometria analítica:

Lema 1.16 (Lema da Base para Planos) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$ geometricamente dependentes com $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ geometricamente independentes. Temos que $\mathbf{f}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, isto é:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

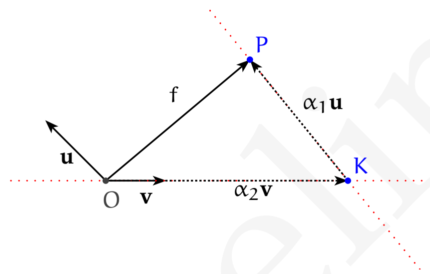


Figura 1.10: Lema da Base para Planos

Demonstração: Considere um ponto arbitrário O do espaço. Primeiramente obeserve que $\mathbf{f}$ é paralelo ao plano determinado pelo pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Considere o representante de $\mathbf{f}$ que começa no ponto O e termina em P, i.e., seja $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$. Considere a reta paralela a $\mathbf{u}$ que passa pelo ponto P e a reta paralela a $\mathbf{v}$ que passa por O. Essas retas se encontram num ponto K (Por quê?). É fácil ver, então, que $\mathbf{f} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$.

Como $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{u}$, tal vetor é um escalar vezes $\mathbf{u}$, ou seja, $\overrightarrow{KP} = \alpha_1 \mathbf{u}$. De maneira análoga $\overrightarrow{OK} = \alpha_2 \mathbf{v}$. Desta forma temos:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}.$$

□

Lema 1.17 (Lema da Base para V^3) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^3$ geometricamente independentes. Temos que, para qualquer $\mathbf{f} \in V^3$, vale que $\mathbf{f}$ é combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, ou seja:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w},$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

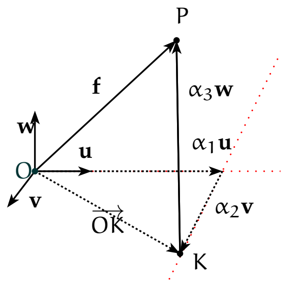


Figura 1.11: Lema da Base para o Espaço

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração anterior. Começamos escolhendo representantes dos vetores $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que começam no ponto O (veja a figura **??**). Seja então a reta paralela a $\mathbf{w}$ passando por O. Essa reta intercepta o plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no ponto K.

O vetor $\overrightarrow{OK}$ estando no mesmo plano que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v}$$

O vetor $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{w}$, i.e, $\overrightarrow{KP} = \alpha_3\mathbf{w}$. Finalmente como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ temos que:

$$\mathbf{f} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w}.$$

□

Uma vez provados esses resultados demonstremos o seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Os conceitos de dependência e independência geométrica e dependência e independência linear são equivalentes.*

Demonstração:

1. Se um vetor $\mathbf{v}$ é GD, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daí temos que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha = 1 \neq 0$. Daí pela Proposição 1.13 segue que $\mathbf{v}$ é LD. Reciprocamente, se $\mathbf{v}$ é LD então $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha \neq 0$ então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, assim, o vetor $\mathbf{v}$ é GD.

2. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, então $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$. Pelo Corolário 1.2, ou $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ $(\lambda, \theta \in \mathbb{R})$. Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD.

   Por outro lado, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD então um dos vetores é combinação linear do outro, i.e., temos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ $(\lambda, \theta \in \mathbb{R})$. E assim, pelo Corolário 1.2, temos que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos e, portanto, GD.

3. Se três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD, então duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Vale então que:

   $$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + 0\mathbf{w}.$$

   Logo $\mathbf{u}$ é combinação linear dos demais vetores e, portanto, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI, pelo Lema 1.16 temos que

   $$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Assim, os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Reciprocamente, suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD. Temos então que um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \theta\mathbf{w}$. Segue que o vetor $\mathbf{u}$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (Por quê?). Logo os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares e, consequentemente, GD.

4. Considere n vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$, com $n \geqslant 4$ (portanto um conjunto GD de vetores). Duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GI.

   Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3$. Segue que:

   $$\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^{n} 0\mathbf{v}_i.$$

   Logo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   Caso tenhamos $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ GD e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ GI, pelo Lema 1.17,

   $$\mathbf{v}_4 = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Daí temos:

   $$\mathbf{v}_4 = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} + \sum_{i=5}^{n} 0\mathbf{v_i}.$$

   Logo, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   A recíproca no caso de quatro ou mais vetores é imediata. Por definição, quatro ou mais vetores são GD.

□

Proposição 1.19 *Seja* $\mathbf{u}$ *um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\ldots n}$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i}$$

então essa representação é única.

Demonstração: Suponha que a representação não é única

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i$$

então:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

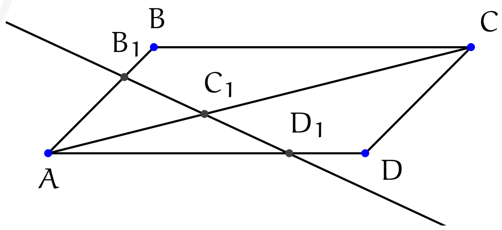
e logo

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i')\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Como os vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\ldots n}$ são linearmente independentes, temos que para cada i, $(\alpha_i - \alpha_i') = 0$, e assim $\alpha_i = \alpha_i'$. Dessa forma, temos que a representação é única. □

Exemplo 1.20 *Dado um paralelogramo* $ABCD$. *Seja* l *uma linha reta que intercepta* AB, AC *e* AD *nos pontos* B_1, C_1 *e* D_1 *respectivamente. Prove que se* $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \overrightarrow{AD}$ *e* $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{AC}$ *então:*

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$



Solução: Assuma que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Então $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \mathbf{b}$ e $AC_1 = \lambda_3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Como os três pontos A_1, B_1 e C_1 estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{B_1D_1} \tag{1.11}$$

Mas $\overrightarrow{B_1C_1} = AC_1 - AB_1 = (\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3\mathbf{b}$
e $\overrightarrow{B_1D_1} = AD_1 - AB_1 = -\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$
Substituindo as expressões acima em 1.11, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3\mathbf{b} = -\,k\lambda_1\mathbf{a} + k\lambda_2\mathbf{b}$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\,(\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + \mathbf{b}\,(\lambda_3 - k\lambda_2) = \mathbf{0}$$

E logo $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$.

Da segunda equação obtemos $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. Substituindo k na primeira equação e dividindo a mesma por $\lambda_1\lambda_3$ segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

□

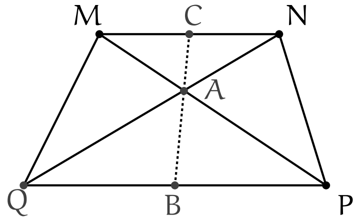
Exercícios.

Ex. 2.1 — Sejam B um ponto no lado ON do paralelogramo AMNO e e C um ponto na diagonal OM tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A, B e C estão na mesma reta.

Ex. 2.2 — Dado um paralelogramo MNPQ, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então MNPQ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



Ex. 2.3 — Se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$, prove que os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD para qualquer ponto O.

1.3 BASES

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$ **gera** o espaço (um dado plano) se qualquer vetor $\mathbf{w}$ do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\dots n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Definição 1.21 Uma **base** para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{v}_i\}$ linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).

Dados dois vetores no plano $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ não paralelos, é de se esperar que possamos atingir qualquer outro ponto apenas através de movimentos na direção de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Ou seja dado um ponto P esperamos poder escrever o vetor $\overrightarrow{OP}$ como soma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$. Uma expressão da forma $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$ é dita uma combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$

Teorema 1.22 (da base para planos) *Qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores paralelos (e não nulos)* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$$

com m *e* $n \in \mathbb{R}$ *únicos.*

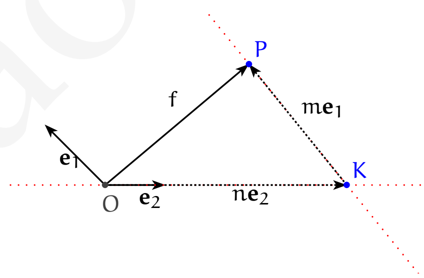


Figura 1.12: Teorema da Base para Planos

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.16 e da Proposição 1.19. □

Corolário 1.23 *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores.*

Um conjunto de vetores $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ gera o espaço se qualquer vetor w do espaço pode ser escrito como combinação linear de $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Teorema 1.24 (Base para o Espaço) *No espaço tridimensional, sejam* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *no espaço pode ser escrito como combinação linear única de* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$.

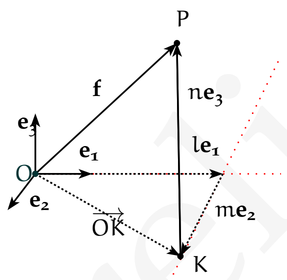


Figura 1.13: Teorema da Base para o Espaço

Demonstração: O teorema é resultado imediato do Lema 1.17 e da Proposição 1.19. □

Exercícios.

Ex. 3.1 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

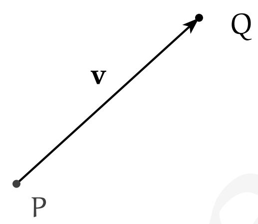
Ex. 3.2 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ também é L.I.

Ex. 3.3 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - 2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

1.4 SOMA DE PONTO COM VETOR

Dado um ponto P e um vetor $\vec{v}$ podemos definir uma soma de vetor com ponto do seguinte modo.

Seja um representante de $\vec{v}$ que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:



$$P + \mathbf{v} := Q$$

Ou seja, a soma do ponto com o vetor **v** nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de v.

Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + \mathbf{v} = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.

Proposição 1.25 *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

1. $P + \mathbf{O} = P$
2. $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
4. $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração: Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\mathbf{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.
3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

   Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

   Logo

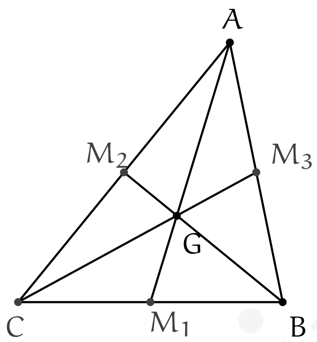
$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.12}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.13}$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.14}$$

$\square$

Exemplo 1.26 *Sejam M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC. Prove que as três medianas têm um único ponto comum, que divide AM_1, BM_2 e CM_3 na razão 2 para 1. Esse ponto é conhecido como baricentro do triângulo.*



Solução: Dividiremos a resolução do exercício em duas partes:

1. Mostrar que G divide AM_1 e BM_2 na razão 2 para 1, ou seja, que:
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$
2. Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1, i.e.,
$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}$$

Resolvidas as partes seguirá de modo natural que o baricentro divide as medianas na razão 2 para 1.

De modo a tornar a notação da resolução mais limpa, chamemos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente. Observe que, como os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI, todos os demais vetores do plano podem ser escritos em função desses.

Estabelecida essa notação, segue imediatamente que $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1. Para estudarmos a intersecção G das medianas AM_1 e BM_2, escrevamos inicialmente os vetores $\overrightarrow{AM_1}$ e $\overrightarrow{BM_2}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$
$$\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

Como A, G e M_1 são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha\overrightarrow{BM_2} = \alpha\left(-\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}\right).$$

Observamos que, nesse ponto, não sabemos que G divide os segmentos AM_1 e BM_2 na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes (λ e α) para os escalares das equações acima.

É fácil ver que uma equação envolvendo os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BG}$ é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Donde temos:

$$\alpha\left(-\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Isolando os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos então:

$$\mathbf{a}\left(-\alpha+1-\frac{\lambda}{2}\right)+\mathbf{b}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\lambda}{2}\right) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI segue então que:

$$\begin{cases} -\alpha+1-\frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2}-\frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, G divide tanto o segmento AM_1 quanto o segmento BM_2 na razão 2 para 1.

2. Para mostrar que C, G e M_3 são colineares, mostremos que a equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta\overrightarrow{CM_3}$$

com incógnita em β admite solução real.

Inicialmente escrevamos $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{CM_3}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Temos assim a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right).$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos:

$$\mathbf{a}\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) + \mathbf{b}\left(-\frac{2}{3} + \beta\right) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases}$$

Tal sistema admite uma solução:

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Isso mostra então que Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1.

□

Exercícios.

Ex. 4.1 — Prove que:

a) $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \mathbf{P}$

b) $P + \mathbf{u} = Q + \mathbf{v}$ então $\mathbf{u} = PQ + \mathbf{v}$

c) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Ex. 4.2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutualmente ao meio.

Ex. 4.3 — Sendo A e B dois pontos, mostrar que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$

Ex. 4.4 — Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Ex. 4.5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$.

Ex. 4.6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

Ex. 4.7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

Ex. 4.8 — Sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC

Ex. 4.9 —

a) Exprima $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$

Ex. 4.10 — Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O prove que

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{AD}} + \overrightarrow{\mathbf{AE}} + \overrightarrow{\mathbf{AF}} = 6\overrightarrow{\mathbf{AO}}$$

2 VETORES EM COORDENADAS

No primeiro capítulo estudamos vetores de um ponto de vista totalmente geométrico. Apesar de úteis, principalmente do ponto de vista intuitivo, as definições geométricas acabam perdendo um pouco de seu poder quando nos deparamos com problemas mais complexos. Por isso é necessário que tenhamos em mãos uma representação algébrica, não apenas de vetores, mas de todo o espaço Euclidiano. Uma representação que nos permita fazer cálculos mais finos e assim facilitar o estudo de resultados mais complexos.

Os primeiros passos no sentido de encontrar tais representações já foram dados no capítulo anterior, ao estudarmos o conceito de base. Neste capítulo daremos continuidade a estas ideias e veremos como utilizar as propriedades geométricas estudadas até agora para encontrar representações algébricas não apenas para vetores, mas também para os pontos do espaço Euclidiano. Tais representações serão chamadas de *sistemas de coordenadas*, e serão o foco principal deste capítulo.

Antes de mais nada vamos tentar entender de maneira mais formal como se relacionam vetores e pontos no espaço, e como a representação de um pode ser facilmente traduzida para o outro.

Tomemos então o espaço Euclidiano ($\mathbb{E}^3$ ou $\mathbb{E}^2$). O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é "localizar" os pontos no espaço. Para isto precisaremos de um ponto qualquer para servir de referência. Fixemos então um ponto $O \in \mathbb{E}^3$ e chamemos este ponto de *origem*. Este será o ponto a partir do qual a posição de todos os outros pontos será medida ou, no caso de vetores, será o ponto inicial a partir do qual todos os vetores serão representados.

Tome agora um ponto P qualquer em $\mathbb{E}^3$(ou $\mathbb{E}^2$) e lembre-se que, fixado O, podemos escrever $P = O + \overrightarrow{OP}$. Ou seja, tendo o ponto O como referência relacionamos a cada ponto de $\mathbb{E}^3(\mathbb{E}^2)$ um vetor de $\mathbb{V}^3(V^2)$.

Definimos assim uma bijeção (por quê?) entre os pontos de $\mathbb{E}^3(\mathbb{E}^2)$ e os vetores de $V^3(V^2)$. Isso nos permite que a partir de qualquer representação algébrica dos vetores de $V^3(V^2)$ encontremos uma representação para os pontos do espaço Euclidiano. Na verdade, isso permite que utilizemos de forma indistinta a mesma representação para os dois objetos.

2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

O primeiro sistema que estudaremos consiste em representar os vetores utilizando para isso uma base.

Neste sentido, defina um **sistema de coordenadas no espaço** Σ como o conjunto três vetores linearmente independentes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ (ou seja uma base E para $\mathbb{V}^3$) e um ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas. Denotaremos o sistema de coordenadas por

$$\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O).$$

Observação 2.1 *Se quisermos definir um sistema de coordenadas para o plano precisaríamos apenas de uma base para* V^2*, e esta seria composta então por apenas dois vetores. Um sistema de coordenadas para o plano teria então a forma* $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, O)$*. Os resultados a seguir serão apresentados apenas para* V^3*, deixando implícita sua validade em* V^2*.*

Se $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ é chamado de **sistema cartesiano de coordenadas**. Daqui em diante as letras $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sempre denotarão vetores ortonormais.

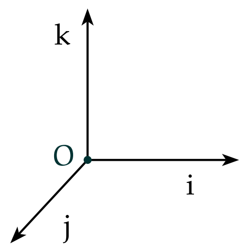


Figura 2.1: Sistema de Coordenadas Ortonormais

Um **sistema de coordenadas** cujos vetores não são ortogonais é dito **sistema de coordenadas oblíquo**.

Usando o que foi visto até agora é fácil estabelecer uma bijeção entre o conjuntos dos vetores tridimensionais V^3 e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ usando o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$.

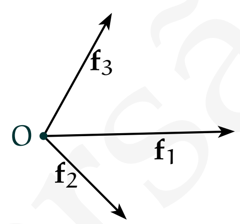


Figura 2.2: Sistema de Coordenadas Oblíquo

Para isso basta observar que do teorema da base para o espaço temos que

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{f}_1 + v_2\mathbf{f}_2 + v_3\mathbf{f}_3.$$

E desta forma associamos ao vetor v a tripla (v_1, v_2, v_3). A tripla anterior é denominada coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ no sistema de coordenadas Σ (ou ainda na base $E = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$), e será denotado por:

$$\mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)_\Sigma.$$

De modo análogo podemos estabelecer uma bijeção entre o conjuntos dos pontos do espaço $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$ usando o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$.

Para isso, dado P um ponto do espaço, seja $\overrightarrow{OP}$ o vetor ligando a origem ao ponto P. Esse vetor é chamado **vetor posição** de P. Pelo teorema da base para o espaço temos que

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + c\mathbf{f}_3.$$

Desta forma associamos ao ponto P a tripla (a, b, c).

Essa tripla é denominada coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas Σ e será denotada por:

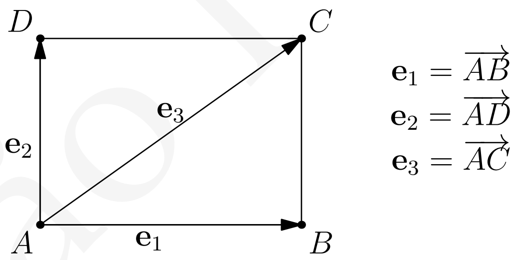
$$P : (a, b, c)_\Sigma ,$$

ou simplesmente $P : (a, b, c)$ quando estiver claro a que base estamos nos referindo.

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é chamado de **vetor posição** de P pois as coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ são as mesmas coordenadas do ponto final P.

Exemplo 2.2 *Dado um retângulo* $ABCD$ *conforme a figura abaixo, vamos encontrar as coordenadas dos pontos* A, B, C, D *e dos vetores* $\overrightarrow{BD}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *nos seguintes sistemas de coordenadas:*

1. $\Sigma_1 = (A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
2. $\Sigma_2 = \left(B, \mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right)$



Solução: (1) Vamos primeiro escrever as coordenadas de A, B, C, D no sistema Σ_1. Para isso devemos escrever os vetores $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Por definição

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = e_2.$$

Temos também que

$$\overrightarrow{AC} = e_1 + e_2$$

e que $\overrightarrow{AA}$, sendo o vetor nulo, é igual a $0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$. Assim as coordenadas são

$$\begin{aligned}
A &: (0,0) \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AA} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
B &: (1,0) \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AB} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
C &: (1,1) \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AC} = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\
D &: (0,1) \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AD} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Para encontrar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ basta observar que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \;\; \text{e} \;\; \overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

e portanto temos

$$\overrightarrow{BD} : (-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC} : (1,1)$$

(2)Vamos agora escrever as coordenadas dos pontos A, B, C, D no sistema $\Sigma_2 = \left(A, \mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right)$.

Para tanto devemos escrever os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ como combinação de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sendo $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.

Observe que

$$\overrightarrow{BA} = -\mathbf{e}_1 = -2\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right) = -2\mathbf{f}_2,$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BB} &= 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 \text{ (vetor nulo)}, \\
\overrightarrow{BC} &= \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 = -1\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 \\
\overrightarrow{BD} &= \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2.
\end{aligned}$$

E assim as coordenadas dos pontos são

$$\begin{aligned}
A &: (0,-2) \\
B &: (0,0) \\
C &: (-1,2) \\
D &: (1,-4)
\end{aligned}$$

Calculando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$, usando que $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ obtemos que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1,$$

e portanto vale

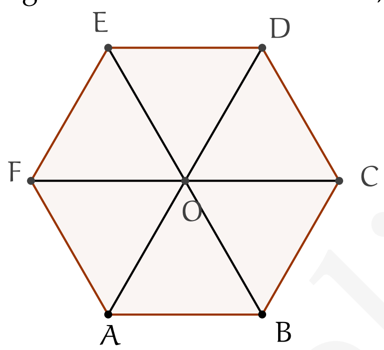
$$\overrightarrow{BD} : (1, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 0).$$

□

Exercícios.

Ex. 1.1 — Dado o hexágono regular $ABCDEF$ de centro O, conforme a figura abaixo:



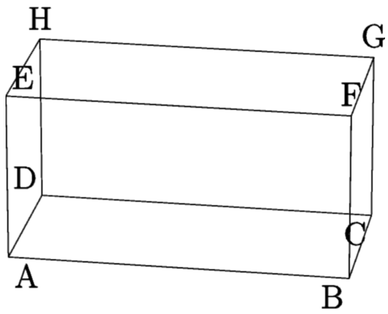
Determine as coordenadas dos pontos OA, B, C, D, E e F nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
b) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$
c) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$
d) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

Ex. 1.2 — Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nos sistemas de coordenadas do exercício anterior:

a) $\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{BE}$

Ex. 1.3 — Dado o paralelogramo retângulo $ABCDEFGH$ abaixo. Sejam $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = AF$, $e_4 = AE$.



Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(A; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_3; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

f) $(A; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; \frac{1}{2}\mathbf{e}_2; \frac{1}{2}\mathbf{e}_3)$

Ex. 1.4 — Determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EH}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_3; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

2.1.1 Operações Vetoriais em Coordenadas

Agora que sabemos como representar vetores e pontos em coordenadas precisamos saber como operar com estas representações. A proposição abaixo nos diz como as operações com pontos e vetores vistas no capítulo anterior podem ser traduzidas para a representação que acabamos de apresentar.

Proposição 2.3 *Se* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ *e* $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ *então:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_\Sigma$
2. $\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_\Sigma$
3. $P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$

Demonstração:

1. Dado um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$, como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{v} &= b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 + b_3\mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

E logo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 + b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 + b_3\mathbf{f}_3 \\ &= = (a_1 + b_1)\mathbf{f}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{f}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

E desta forma as coordenadas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no sistema de coordenadas Σ são

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

2. Como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{u} &= \lambda\left(a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3\right) && (2.1) \\ &= \lambda a_1\mathbf{f}_1 + \lambda a_2\mathbf{f}_2 + \lambda a_3\mathbf{f}_3 && (2.2) \end{aligned}$$

E consequentemente:

$$\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Fica como exercício para o leitor.

□

Exemplo 2.4 *Achar as coordenadas de um vetor ligando dois pontos num sistema de coordenadas* $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$

Solução:

Resumindo o que queremos é, dado $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$, encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Temos pela definição de subtração de vetores que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Logo como $\overrightarrow{OP_1} = x_1\mathbf{f}_1 + y_1\mathbf{f}_2 + z_1\mathbf{f}_3$ e $\overrightarrow{OP_2} = x_2\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + z_2\mathbf{f}_3$ e assim

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{f}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{f}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{f}_3$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

□

Exemplo 2.5 *Achar o ponto médio* $M = (x, y, z)$ *de um segmento com ponto inicial* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, *num sistema de coordenadas* $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$

Solução: Primeiro vemos que $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\overrightarrow{P_1M}$ já que possuem o mesmo sentido e $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$ é duas vezes $\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|$.

Assim

$$(x_2 - x_1)\mathbf{f}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{f}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{f}_3 = 2(x - x_1)\mathbf{f}_1 + 2(y - y_1)\mathbf{f}_2 + 2(z - z_1)\mathbf{f}_3$$

o que implica que

$$x_2 - x_1 = 2(x - x_1)$$
$$y_2 - y_1 = 2(y - y_1)$$
$$z_2 - z_1 = 2(z - z_1)$$

e logo

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

e

$$M : \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

□

De posse da representação dos vetores em coordenadas podemos agora fornecer critérios para a dependência e a independência linear de vetores:

Teorema 2.6 *Os vetores* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} : (c_1, c_2, c_3)$ *são LI se e somente se*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração: Os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LI se o sistema:

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0 \tag{2.3}$$

Tiver somente a solução trivial $x = y = z = 0$

Em coordenadas podemos expressar a equação 2.4 como:

$$x\,(a_1, a_2, a_3) + y\,(b_1, b_2, b_3) + z\,(c_1, c_2, c_3) = 0 \tag{2.4}$$

E logo teremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer (ver Apêndice) o sistema anterior tem solução única se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

□

Exercícios.

Ex. 1.5 — Os pontos médios dos lados de um triângulo são $(2, 5)$, $(4, 2)$ e $(1, 1)$. Determine as coordenadas dos três vértices.

Ex. 1.6 — Dados dois pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q : (x_2, y_2, z_2)$, encontre a coordenada do ponto R, que se encontra sobre o segmento ligando os pontos P e Q e tal $d(R, Q) = \lambda d(R, P)$.

Ex. 1.7 — Prove utilizando coordenada que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Ex. 1.8 — Prove que se $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ então:

$$P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$$

Ex. 1.9 — Determine quais dos conjuntos abaixo são L.I.

a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$
b) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$
c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

Ex. 1.10 — Exprima o vetor $\mathbf{w} : (1, 1)$ como combinação linear de $\mathbf{u} : (2, -1)$ e $\mathbf{v} : (1, -1)$.

Ex. 1.11 — Mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LD se e somente se existe λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$$

Utilize esse critério para decidir se os vetores abaixo são LI ou LD:

a) $\mathbf{u} = (1, 2, 3) \qquad \mathbf{v} = (4, 5, 6)$
b) $\mathbf{u} = (1, 0, 3) \qquad \mathbf{v} = (-2, 0, -6)$
c) $\mathbf{u} = (1, 2, 5) \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$

Ex. 1.12 — Utilizando o exercício anterior, mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LI se e somente se ao menos um dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

é não nulo.

Ex. 1.13 — Determine m, n de modo que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sejam LD, onde:

a) $\mathbf{v} = (1, m, n+1)\mathbf{w} = (m, n, 2)$
b) $\mathbf{v} = (1, m-1, m)\mathbf{w} = (m, n, 4)$

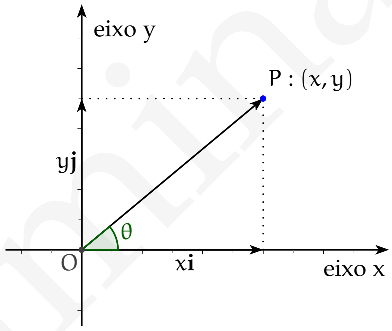
Ex. 1.14 — Dado $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base. Determine condições necessárias e suficientes sobre a, b de modo que os vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sejam LI, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dados por:

a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

b) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + (b^2 + 2a)\mathbf{e}_3$

2.2 BASES ORTONORMAIS E COORDENADAS CARTESIANAS

Vamos agora explorar algumas das vantagens de se trabalhar com as chamadas *bases ortonormais* ou, mais geralmente, com *sistemas de coordenadas cartesianas*.



Lembrando, uma base é dita ortonormal se seus vetores são unitários (possuem módulo 1) e perpendiculares dois a dois. Um sistema de coordenadas formado por uma base ortonormal é chamado de sistemas de coordenadas cartesianas. A partir deste ponto vamos fixar notação e utilizar $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ para denotar uma base ortonormal para o plano, e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ para o espaço.

Seja $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ uma base ortonormal para V^2, O um ponto no plano e $\Sigma = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ o sistema de coordenadas cartesianas determinado por eles. Dado agora um ponto P no plano considere o vetor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ e sua representação no sistema Σ dada por $\mathbf{r} : (x, y)$, ou seja:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Como a base considerada é ortonormal, segue diretamente do Teorema de Pitágoras que

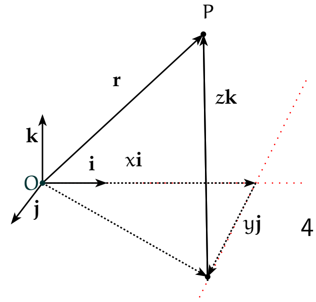
$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|x\mathbf{i}\|^2 + \|y\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 \|\mathbf{i}\|^2 + y^2 \|\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Assim, se denotarmos por r o tamanho do vetor $\mathbf{r}$ temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A mesma ideia pode ser levada para o espaço, onde obtemos que se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Voltemos por momento para o caso planar e denote por θ o ângulo entre o eixo OX e o vetor **r**. Neste caso, não é difícil ver que

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos também que a distância entre os pontos $P : (x_1, y_1)$ e $Q : (x_2, y_2)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

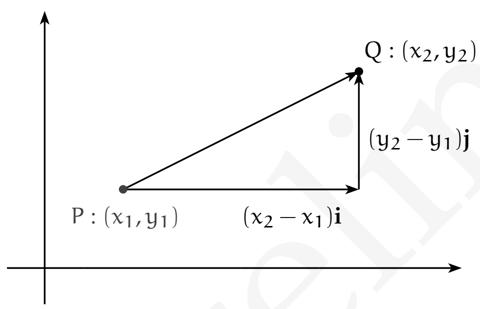


Figura 2.3: Distância entre dois pontos no plano.

E no caso tridimensional distância entre os pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q : (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Observação 2.7 *É importante observar que para realizarmos os cálculos acima foi absolutamente necessário que o sistema de coordenadas considerado fosse cartesiano. Podemos calcular as mesmas quantidades utilizando outros sistemas, mas as expressões ficam diferentes e muito mais complicadas.*

O par (r, θ) assim definido forma as chamadas **coordenadas polares** do ponto P no plano, e suas propriedades serão melhor exploradas no final deste capítulo.

Exercícios. Nos próximos exercícios, as coordenadas são expressas num sistema cartesiano.

Ex. 2.1 — Dados $A : (-3, 2)$, $B : (3, 5)$ e $C : (0, 3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:

a) A distância entre os pontos A e B;

b) A distância entre os pontos B e C;
c) O vetor $\overrightarrow{BA}$ e o vetor $\overrightarrow{AC}$;
d) O vetor $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
e) O ponto médio do segmento $\overline{AC}$
f) O ponto na reta $\overleftrightarrow{AB}$ que dista três vezes mais de A do que de B. (Duas respostas)

Ex. 2.2 — Dados $A : (4, 8, 11)$, $B : (-3, 1, 4)$ e $C : (2, 3, -3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:
a) O comprimento dos três lados do triângulo;
b) Os pontos médios dos três lados do triângulo;
c) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$;
d) A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Porque essa soma deve ser zero?;
e) Os ângulos entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Dica: use a lei dos cossenos;
f) A área do triângulo;
g) O ponto D tal que ABCD é um paralelogramo (Três respostas)

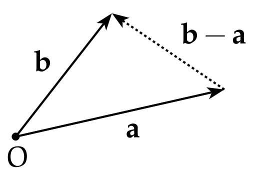
2.3 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES: PRODUTO ESCALAR

Na seção anteriores nos utilizamos de ângulos entre vetores (ou entre vetores e retas) para definir uma nova forma de representar pontos do espaço Euclidiano. Surge então a pergunta: como podemos utilizar os sistemas de coordenadas para determinar o ângulo entre dois vetores **u** e **v**?

O primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas cartesiano $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ e escrever os vetores neste sistema, ou seja:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$



Observe agora que pela lei dos cossenos

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos(\theta),$$

e portanto

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^3 + b_3^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos(\theta).$$

Assim

$$\cos(\theta) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Ao termo $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ daremos o nome de **produto escalar** (ou de **produto interno**) de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ e denotaremos por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

> Resumindo:
> Se $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ é um sistema de coordenadas cartesiano, $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, então
>
> $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
>
> e
>
> $$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

É interessante observar que $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ e $\cos(\theta)$ não dependem da base ortonormal escolhida e portanto o produto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ também não depende.

Observe também que, da definição acima, segue diretamente que dois vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares se e somente se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ (por quê?).

Exemplo 2.8 *Achar o ângulo entre* $\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$

Solução:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\\ &= \frac{12}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\\ &\Rightarrow\ \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.26^{\text{o}}\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.9 *Os vetores* $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *e* $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ *são perpendiculares pois o produto interno entre eles é zero:*

$$(3,4,1)\cdot(2,-3,6) = 3\cdot 2+4\cdot(-3)+1\cdot 6 = 6-12+6 = 0$$

Exemplo 2.10 $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = a_1^2+a_2^2+a_3^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$

O produto interno possui as seguintes propriedades, cujas demonstrações são elementares e deixamos como exercício ao leitor:

Proposição 2.11 *O produto interno possui as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant \mathbf{0}$
4. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

Demonstração: Se $\mathbf{u}:(a_1,a_2,a_3)$ e $\mathbf{v}:(b_1,b_2,b_3)$ e $\mathbf{w}:(c_1,c_2,c_3)$

1. $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$

2. $$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= (a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)\\ &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$

3. $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = a_1^2+a_2^2+a_3^2\geqslant 0$$

4. Se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ então $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 0$ e consequentemente $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

5. A demonstração desse item é deixada como exercício ao leitor.

□

Exemplo 2.12 *No quadrado* ABCD *tem se* $A = (3, -4)$ *e* $B = (5, 6)$. *Quais são as coordenadas dos vetores* C *e* D*?*

Solução: Denotando as coordenadas de C e D por $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - 5, c_2 - 6)$, $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2$ e$\overrightarrow{DA} = (d_1 - 3, d_2 + 4)$.

O vetor $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ logo o produto interno entre eles é nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Isto implica que $2(c_1 - 5) + 10(c_2 - 6) = 0$, que simplificando resulta em

$$2c_1 + 10c_2 = 70 \tag{2.5}$$

Temos ainda que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{104}$, logo

$$(c_1 - 5)^2 + (c_2 - 6)^2 = 104 \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) em (2.6) teremos que $(c_2 - 6)^2 = 4$ e logo $c_2 = 8$ ou $c_2 = 4$

Quando $c_2 = 8$ por (2.5) $c_1 = -5$ e quando $c_2 = 4$ então $c_1 = 15$.

O cálculo de D é análogo. □

Projeção Ortogonal Passemos agora a um novo problema. Dados dois vetores **v** e **u**, com **u** não nulo, queremos decompor o vetor **v** em dois vetores **p**, **q** tais que **p** é paralelo a **u** e **q** é perpendicular a u, ou seja, queremos encontrar **p**, **q** tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} = \lambda\mathbf{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Reescrevendo as condições acima temos que

$$(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

e logo

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \lambda \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Desta forma

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

e

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$$

Do mesmo modo podemos ver que o vetor $\mathbf{p}$ assim determinado é único. Tal vetor é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ e é denotado por $\text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$.

Demostramos assim o seguinte resultado.

Proposição 2.13 *Dado* $\mathbf{u}$ *um vetor não nulo, e* $\mathbf{v}$ *um vetor qualquer, então a projeção ortogonal* $\text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ *de* $\mathbf{v}$ *em* $\mathbf{u}$ *existe e é única.*

Exercícios.

Ex. 3.1 — Pela fórmula do cos ache os três ângulos do triângulo cujos vértices são

a) $(2, -1), (7, -1)$ e $(7, 3)$ (use uma calculadora)

b) $(4, 7, 11), (-3, 1, 4)$ e $(2, 3, -3)$

Ex. 3.2 — Prove que os vetores $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ são dois a dois perpendiculares.

Ex. 3.3 — Ache os três ângulos de um triângulo cujos vértices são $(3, 1), (5, -2)$ e $(6, 3)$. Ache também a área do triângulo.

Ex. 3.4 — Prove que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right)$

Ex. 3.5 — Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entao ele é um losango.

Ex. 3.6 — Decomponha o vetor $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como a soma de dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_1$ paralelo ao vetor $\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2$ ortogonal a este último.

Ex. 3.7 — Prove que:

a) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\lambda\mathbf{v} = \lambda\,\text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$

b) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} + \text{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{w}$

c) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}\left(\text{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\right) = \text{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$

d) $\mathbf{v}\cdot\text{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = \text{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

Ex. 3.8 — Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

Ex. 3.9 — Prove que $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ e que $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ se e somente se um vetor é múltiplo do outro (Desigualdade de Schwarz).

Ex. 3.10 — Prove que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Desigualdade Triangular).

2.4 VETOR PERPENDICULAR A DOIS VETORES DADOS: PRODUTO VETORIAL

Voltemos nossa atenção agora para um novo problema: dado dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como podemos encontrar um novo vetor $\mathbf{w}$ perpendicular aos dois vetores dados? Note que, ao contrário do que ocorre com a projeção, este problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor $\mathbf{w}$ satisfazendo as condições acima, qualquer vetor $\lambda\mathbf{w}$ também satisfará.

Passemos à solução. Como sempre, tomemos primeiro uma base ortonormal $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ e façamos $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Vamos denotar por $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor que queremos determinar. Como queremos que o vetor $\mathbf{w}$ seja perpendicular aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, precisamos então que $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{v}$ se $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Temos assim o seguinte sistema linear:

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

ou ainda

$$a_1x + a_2y = -a_3z$$

$$b_1x + b_2y = -b_3z$$

Pelo exercício 1.12 podemos supor sem perda de generalidade que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

e, usando a regra de Cramer, concluímos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 z & a_2 \\ -b_3 z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 z \\ b_1 & -b_3 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Escolhendo

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

temos que

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Chamaremos o $\mathbf{w}$ de **produto vetorial** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e denotaremos por

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Um modo fácil de recordar da expressão do produto vetorial é através do seguinte determinante formal:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

onde $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

Antes de continuar listemos as propriedades do produto vetorial.

Teorema 2.14 *Dados os vetores* $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$ *o produto vetorial possui as seguintes propriedades:*

1. *Linearidade com relação ao primeiro termo:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

2. *Antisimetria* $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{u}$

3. *Produto misto* $\mathbf{u}\cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

4. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2$

5. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta)$, *onde* θ *é o ângulo entre os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Demonstração: A demonstração dos três primeiros itens é direta e é deixada como exercícios:

Para demonstrarmos a quarta propriedade basta observar que
$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2$
$= \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$
$= \left(a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2\right) - a_1^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - a_2^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 - a_3^2b_3^2$
$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2$
$(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_1b_3-a_3b_1)^2 + a_1b_2 - a_2b_1$
$= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$.

A quinta propriedade decorre facilmente da anterior, bastando para isso lembrar que

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cdot\cos^2(\theta)$$

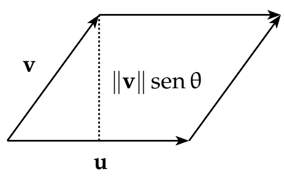
e portanto

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cdot\cos^2(\theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\left(1-\cos^2(\theta)\right) = \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\operatorname{sen}^2(\theta)
\end{aligned}$$

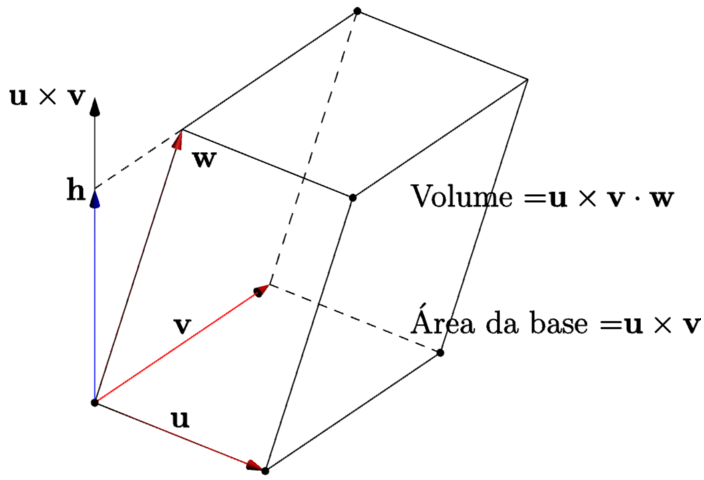
□

Vamos agora explorar algumas consequências geométricas do produto vetorial.

Primeiro considere o paralelogramo determinado por dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como na figura abaixo



A altura do paralelogramo é dada por $\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta)$ e portanto, da propriedade 5 do produto vetorial, concluímos facilmente que sua área é dada por $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta) = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. Em resumo, mostramos que a área do paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é igual ao comprimento do produto vetorial destes vetores.



A seguir vamos calcular o volume de um paralelepípedo, em função dos vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$.

Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto $V = A_b h$ da área A_b da base pela altura h. Como já vimos a área da base pode ser calculada por $A_b = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Já a altura é dada pela norma da projeção do vetor $\mathbf{w}$ sobre o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Como

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}} \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\text{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}} \mathbf{w}\| &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \\ &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}. \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$V = A_b h = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|.$$

Exemplo 2.15 *Sejam* $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ *pontos no plano. Então a área do* $\triangle ABC$ *é dada por*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração: Temos que $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ e $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$. Além disso, é claro que $\mathbf{v} = (y_2 - y_3, x_3 - x_2)$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{BC}$.

A área do $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|h,$$

onde $h = |\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\overrightarrow{BA}| = \frac{|\langle \overrightarrow{BA}, \mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$, é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC.

Como $\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, temos que $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{v}|$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{v}| &= |(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)| \\
&= |x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + x_2y_3 - x_3y_2| \\
&= \left|\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Exercícios.

Ex. 4.1 — Calcule o produto vetorial entre

a) $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 13\mathbf{k}$

b) $6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ e $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

c) $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Ex. 4.2 — Se $\mathbf{u} = (3, 41)$, $\mathbf{v} =(2, 3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 3)$ encontre

a) $2\mathbf{u}+3\mathbf{v} - 7\mathbf{w}$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

f) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

g) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

Ex. 4.3 — Prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Ex. 4.4 — Prove que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Ex. 4.5 — Prove que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Ex. 4.6 — Prove que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Ex. 4.7 — Prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pode ser escrito como o determinante formal

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ex. 4.8 — Prove que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ de dois modos: primeiro calculando diretamente e segundo utilizando as propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Ex. 4.9 — Prove que em geral $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ pode ser escrito como o determinante da matriz que tem como componentes

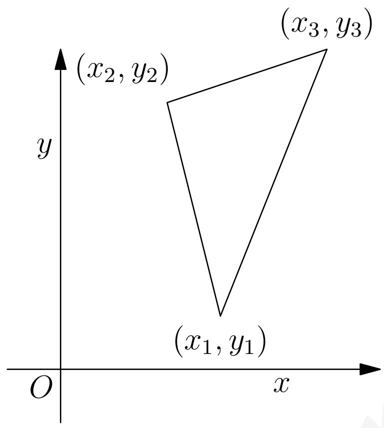
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[**Dica:** *Escreva o determinante em termos dos menores da primeira linha e compare com* $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. *Isto também prova que* $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$. *Porque?*]

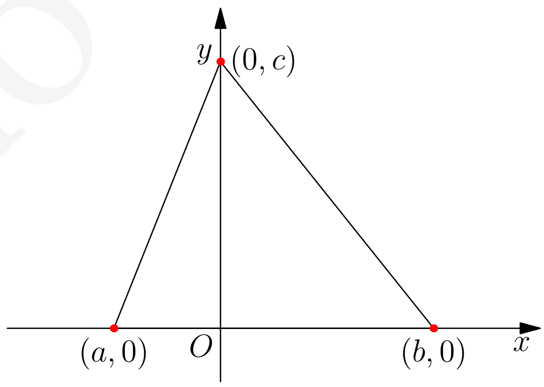
2.5 ESCOLHA DO SISTEMA DE COORDENADAS

Um sistema de coordenadas cartesianas do plano pode ser escolhido tomando qualquer ponto O como origem e qualquer duas retas perpendiculares como os eixos. Em geral resultados geométricos não dependem de como escolhemos nosso sistema de coordenadas, mas fazendo a escolha correta podemos simplificar significativamente o resolução de um problema. É possível, por exemplo, fazer com que as coordenadas dos vértices de certas figuras geométricas fiquem mais simples, aumentando a quantidade zeros em suas coordenadas, simplificando assim a manipulação algébrica.

Considere, por exemplo, um triângulo ΔABC. Vamos descrever esse triângulo através de coordenadas $A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2)$ e $C : (x_3, y_3)$ em um sistema de coordenadas Σ.



Consideraremos o seguinte sistema de coordenadas: escolha como eixo x a reta AB, e como eixo y a reta perpendicular a AB passando por C. Determine o sistema de coordenadas colocando a origem no ponto O dado pela intersecção dos dois eixos, e escolhendo uma base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ formada por vetores unitários paralelos a estes eixos. Neste sistema o vértice A tem então coordenadas do tipo $(a, 0)$ e o ponto B coordenadas do tipo $(b, 0)$, já que ambos estão sobre o eixo x. Já o ponto C, que está posicionado sobre o eixo y, tem coordenadas do tipo $(0, c)$.



Veja que com a escolha adequada do sistema de coordenadas conseguimos reduzir o número de variáveis de 6 para apenas 3.

A seguir apresentamos exemplos onde a escolha de um sistema de coordenadas adequado facilita a demonstração de propriedades geométricas. Você consegue demonstrar estas propriedades usando um sistema de coordenadas arbitrário?

Exemplo 2.16 *Se um triângulo é isósceles, as medianas dos dois lados de mesmo comprimento possuem o mesmo tamanho.*

Solução: Consideremos o mesmo sistema de coordenadas descrito acima. Neste sistema temos $A : (a, 0)$, $B : (b, 0)$ e $C : (0, c)$.

Supondo que segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ possuem o mesmo comprimento, concluímos que

$$\sqrt{a^2 + c^2} = |\overline{CA}| = |\overline{CB}| = \sqrt{b^2 + c^2}$$

e logo $a^2 = b^2$. Segue que $a = b$ ou $a = -b$. Se $a = b$ não temos um triângulo já que dois vértices coincidem, de onde segue que $a = -b$.

Seja M_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo exemplo 2.5 temos que as coordenadas de $M_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Analogamente, o ponto médio M_2 de $\overline{BC}$ tem coordenadas $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Como a mediana de $\overline{CA}$ é dada pelo segmento $\overline{BM_1}$ e a de $\overline{CB}$ é dada pelo segmento $\overline{AM_2}$, segue que

$$|\overline{BM_1}| = \left\|(-\frac{b}{2}, \frac{c}{2}) - (b, 0)\right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e

$$|\overline{AM_2}| = \left\|(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}) - (-b, 0)\right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

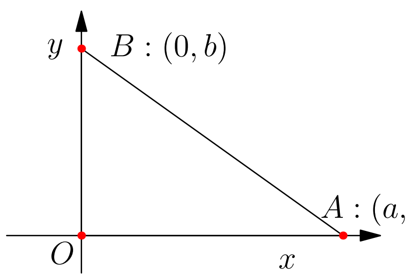
e as medianas relativas aos vértices A e B possuem o mesmo tamanho. □

Exemplo 2.17 *Num triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.*

Solução: Para um triângulo retângulo ΔABC com hipotenusa AB um sistema de coordenadas adequado é o que toma como origem o vértice $C = O$ e como eixos as retas que ligam C a A e C a B.

Neste Sistema de coordenadas temos que $A : (a, 0)$, $B : (0, b)$ e $C : (0, 0)$. O comprimento da hipotenusa é

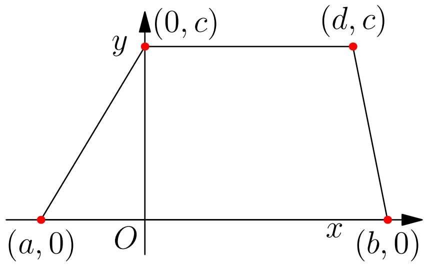
$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



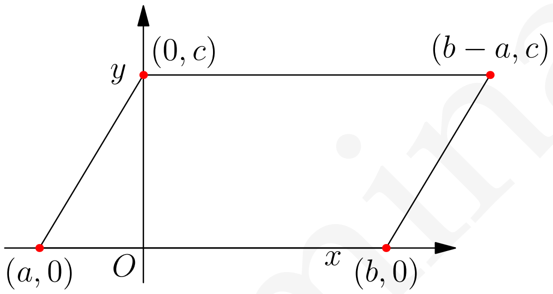
Já o ponto médio M da hipotenusa tem coordenadas $M : \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ e logo o comprimento da mediana é

$$|CM| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}|AB|$$

Logo temos que a distância do vértice C a M é metade da distância entre os vértices A e B, e logo M está equidistante dos três vértices. □



trapézio



paralelogramo

Exercícios.

Ex. 5.1 — Mostrar que $(-5, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$ são os vértices de um triângulo isósceles e achar sua área.

Ex. 5.2 — O triângulo ABC, com $A = (-a, 0), B = (a, 0), C = (0, y)$ é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

Ex. 5.3 — Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, com $a \neq 0$. Ache x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

Ex. 5.4 — Qual o ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $A = (1, -3)$ e $B = (3, -1)$?

Ex. 5.5 — Dado um paralelogramo ABCD, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ (ou seja, a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

Ex. 5.6 — Num triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre essa hipotenusa. Prove esse fato escolhendo um sistema de coordenadas no qual a hipotenusa esta sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.

Ex. 5.7 — Se no triângulo ABC as medianas que partem dos vértices A e B são iguais, prove que os lados AC e BC são iguais, logo o triângulo é isósceles.

Ex. 5.8 — Enunciar e demonstrar a recíproca do teorema de Pitágoras.

Ex. 5.9 — Se as diagonais de um paralelogramo são iguais então ele é um retângulo.

2.6 O PROBLEMA DO LUGAR GEOMÉTRICO

Até este ponto estudamos como representar algebricamente o espaço euclidiano, e como podemos usar tais representações na resolução de alguns problemas geométricos. Nesta seção vamos dar uma passo além, e iniciar os estudos sobre um dos problemas fundamentais da geometria analítica: o problema do lugar geométrico. Em poucas palavras, dada uma figura ou condição geométrica queremos determinar uma equação ou condições algébrica que a represente. Ou ainda, de modo contrário, dada uma equação ou condição algébrica determinar sua representação geométrica.

O lugar geométrico de uma equação Dada uma equação (por simplicidade, em duas x, y ou três variáveis x, y, z)

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x, y, z) = 0 \tag{2.7}$$

cada par ou tripla de números reais que satisfizer a equação acima é dito solução da equação e o conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem a equação (2.7) acima é chamado de **lugar geométrico da equação**.

Definição 2.18 O conjunto dos pares (ou triplas) que satisfazem a equação 2.7 é denominado o **lugar geométrico da equação**2.7.

É importante ressaltar que o lugar geométrico, como definido acima, depende do sistema de coordenados escolhidos. Em outras palavras, uma certa figura ou condição geométrica pode ser descrita algebricamente de várias formas distintas, dependendo, dentre outros fatores, do sistema de coordenadas escolhido. Por esta razão, buscaremos dentre as possíveis representações aquela que proporcione a maior simplicidade algébrica.

Durante esse processo (e em vários outros) podemos substituir uma certa equação por outra que possua as mesmas soluções, ou seja, que defina o mesmo lugar geométrico. Neste sentido, duas **equações algébricas** são ditas **equivalentes** se definem o mesmo lugar geométrico.

Exemplo 2.19 *Analisemos a equação*

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Observe que tomando $C = (2,3)$ *a distância* r *de um ponto qualquer* (x, y) *no plano euclidiano até* C *é dada por*

$$r = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2},$$

ou de modo equivalente

$$r^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2.$$

Deste modo vemos que um ponto (x, y) *no plano satisfaz a equação acima se, e somente se, sua distância para o ponto* $C : (2,3)$ *for igual a* 5.

Em outras palavras, escolhido o sistema de coordenadas descrito acima, o lugar geométrico da equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é um círculo de raio r *e centro no ponto de coordenadas* (a, b).

Exemplo 2.20 *Generalizando o exemplo anterior, um circulo de centro* C *e raio* r *é definido como o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é igual a* r. *Esta é a condição geométrica que descreve o círculo. Busquemos agora uma representação algébrica. Se escolhermos um sistema de coordenadas cartesiano no qual* $C : (a, b)$, *então todo ponto* $P : (x, y)$ *no círculo deve satisfazer*

$$|CP| = r,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ou ainda a equação algébrica equivalente

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

É importante observar que um ponto pertence ao círculo (ou seja esse ponto dista r do centro) se e somente se satisfizer a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

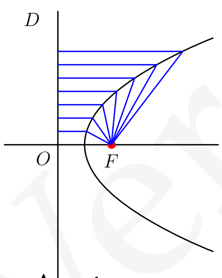
Em geral, sempre que tivermos este tipo de relação entre uma curva e uma equação diremos que esta é a *equação da curva*.

Definição 2.21 Diremos que uma equação $f(x, y) = 0$ é a equação de um dado lugar geométrico se todo ponto que satisfaz a equação pertence ao lugar geométrico e todo ponto que pertence ao lugar geométrico satisfaz a equação.

Exemplo 2.22 *Dado um sistema de coordenadas cartesiano, lugar geométrico conhecido descrito pelo eixo x é formado por todos os pontos cuja segunda coordenada (y) é zero, ou seja, a equação do eixo x é $y = 0$.*

Exemplo 2.23 *Como vimos $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ é a equação do círculo de raio r e centro em $P : (a, b)$.*

Exemplo 2.24 *Determinar a equação do lugar geométrico formado por todos os pontos cuja a distãncia a um ponto fixo$F$ é igual a distância a uma reta fixa* d.



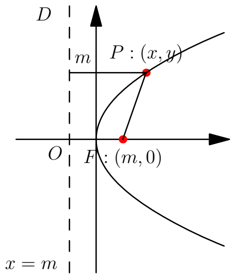
Solução: Dados uma reta fixa d, chamada **diretriz**, e um ponto fixo F chamado foco, a **parábola** é o conjunto dos pontos P equidistantes do foco e da diretriz, ou seja, o ponto P tal que

$$\left\|\overrightarrow{PD}\right\| = \left\|\overrightarrow{PF}\right\|,$$

onde D é o ponto de d mais próximo de P.

A reta passando por F perpendicular a d é chamada **eixo da parábola.** O ponto de intersecção entre o eixo da parábola e a parábola é chamado **vértice** da parábola. Observe que o vértice está localizado na metade da distância do foco a diretriz.

Escolheremos como sistema de coordenadas os eixos formados pelo eixo da parábola e a reta passando pelo vértice da parábola, perpendicular ao eixo. Essa última reta é paralela a diretriz da parábola.



Seja $2m$ a distância entre o foco e a diretriz d. No sistema de coordenadas que adotamos F tem coordenadas $(m,0)$ e a equação da diretriz é $x = -m$. Como P satisfaz $\left\|\overrightarrow{PD}\right\| = \left\|\overrightarrow{PF}\right\|$ temos que

$$\sqrt{(x-m)^2+y^2} = x+m.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade concluímos que

$$\begin{aligned}(x-m)^2+y^2 &= (x+m)^2\\ m^2-2mx+x^2+y^2 &= \left(m^2+2mx+x^2\right)\\ y^2 &= 4mx\end{aligned}$$

é a equação satisfeita pelos pontos da parábola neste sistema de coordenadas. □

Intersecção Dadas duas equações

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 0\\ g(x,y) &= 0,\end{aligned}$$

os pontos que pertencem ao lugar geométrico de ambas as equações é chamados de pontos de intersecção. Analiticamente as coordenadas de tal ponto satisfazem ambas as equações.

A intersecção de duas equações pode ser vazia, neste caso diremos que os seus lugares geométrico não se interceptam.

Exemplo 2.25 *Determinar analítica e graficamente os pontos de intersecção de*

$$\begin{aligned}x-12 &= 0\\ y^2-3x &= 0\end{aligned}$$

Solução: Primeiro observemos que $x-12=0$ é a equação de uma reta paralela ao eixo y, enquanto $y^2-3x=0$ é a equação de uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y. Assim o conjunto dos pontos de intersecção dos dois lugares geométricos é formado de no máximo dois pontos.

Analiticamente, concluímos da primeira equação que todo ponto de intersecção (x, y) deve ter $x = 12$. Substituindo na equação da parábola encontramos que

$$y^2 = 36,$$

e portanto

$$y = \pm 6.$$

De modo que os pontos de intersecção são $(12, 6)$ e $(12, -6)$. $\square$

Exercícios.

Ex. 6.1 — Escrever a equação do lugar geométrico dos pontos no plano que satisfazem a condição:

a) O conjunto dos pontos P tal que P está sempre duas unidades a esquerda do eixo Y

b) O conjunto dos pontos P tal que P dista sempre duas unidades do eixo X

c) O conjunto dos pontos P tal que a abscissa de P é igual ao inverso da sua ordenada

d) O conjunto dos pontos P tal que P está a distância igual do eixo x e do eixo y.

Ex. 6.2 — Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo de modo que a soma das distancias a dois pontos $F : (c, 0)$ e F':$(-c, O)$ é constante igual a $2a$.

Ex. 6.3 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto no espaço que se move de modo que a soma das distancias a dois pontos $F : (c, 0, 0)$ e F':$(-c, 0, 0)$ é constante igual a $2a$.

Ex. 6.4 — Dados dois pontos dois pontos $F : (c, 0, 0)$ e F':$(-c, 0, 0)$, determinar a equação do lugar geométrico de um ponto P que se move no espaço de modo que

$$\left| \|PF\| - \|PF'\| \right| = 2a$$

Ex. 6.5 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo que a distância ao ponto $(1, 0, 0)$ é sempre igual a distância ao plano YZ.

2.7 COORDENADAS POLARES

Num sistema de coordenadas polares um ponto P é localizado no plano em relação a uma semi-reta $\overrightarrow{OA}$. A origem O dessa semi reta é denominada origem do sistema de coordenadas polares ou **polo** e a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ é dito **eixo polar**.

As coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas polares é um par (r, θ), onde r é a distância do ponto ao polo, isto é, $r = d(O, P)$ e θ é o ângulo orientado que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ faz com a semi-reta $\overrightarrow{OA}$. Claramente a posição do ponto fica bem determinada se conhecemos r e θ. O par (r, θ) é denominado**coordenadas polares** do ponto P, e neste caso escreveremos simplesmente $P : (r, \theta)$

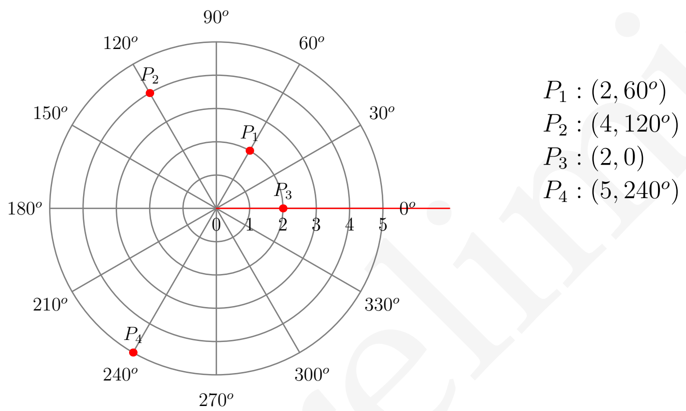
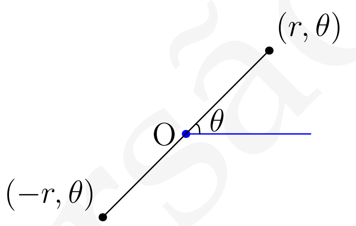


Figura 2.4: Coordenadas polares

Como θ é o ângulo orientado entre o eixo OA e a reta OP seus valores podem ser positivo ou negativo conforme a orientação no sentido anti-horário ou horário do ângulo.



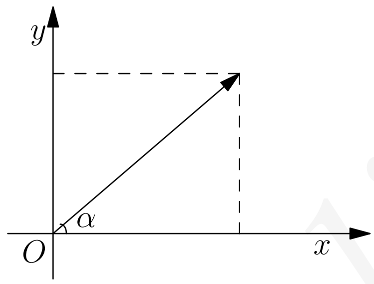
Por outro lado, o raio r, sendo a distância de P a origem, é naturalmente um número real positivo, porém podemos estender seu significado de modo a termos raios negativos. Para isso convencionamos que o ponto $(-r, \theta)$ com $r > 0$ deve ser construído do seguinte modo: construímos uma semi-reta faz uma ângulo θ com o eixo polar e estendemos essa semi-reta. marcarmos o ponto $(-r, \theta)$ como sendo o ponto sobre a extensão da semi reta que dista r do polo O.

Uma diferença fundamental entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares é que em coordenadas polares um ponto P pode ser descrito por uma infinidade de coordenadas. Por exemplo, a origem O é descrita por todas as coordenadas da forma $(0, \theta)$., enquanto que um ponto $P : (r, \theta)$ distinto da origem é descrito por todas as coordenadas da forma $(r, \theta + 2\pi n)$ e $(-r, \theta + \pi(2n + 1))$.

Todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo e o angulo θ esteja entre $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Denominamos esse par como o **conjunto principal de coordenadas polares** do ponto em questão.

A cada sistema de coordenadas polares podemos associar um sistema cartesiano escolhendo como a origem o polo, o eixo x como o eixo polar e o eixo y como a reta perpendicular ao eixo polar passando pela origem. Esse sistema de coordenadas é chamado **sistema cartesiano associado** . Quando, ao tratarmos de coordenadas polares, nos referirmos as coordenadas x, y, eixos x ou y, etc. de um sistema cartesiano este sempre será o sistema cartesiano associado.

E fácil ver que as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas do sistemas associado se relacionam pelas igualdades:



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta) \\
y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \\
r &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \\
\mathrm{tg}\,\theta &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.26 *Determinar as coordenadas retangulares do ponto* P *cujas coordenadas polares são* $(3, 120^o)$

Solução: Neste caso $r = 3$ e $\theta = 120^o$ logo as coordenadas são:

$$x = r\cos(\theta) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \tag{2.8}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{2.9}$$

Ou seja, $P : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ □

Exemplo 2.27 *Determinar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são* $(1, -1)$.

Solução: Temos que $r = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$ e que $\theta = \operatorname{arctg}(-1)$ .Para $0 \leqslant \theta < 2\pi$. temos que $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Logo o conjunto principal de coordenadas do ponto é $\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Outras coordenadas possíveis para o ponto são $\left(1, \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$ e $\left(-1, \frac{7}{4}\pi + \pi(2\pi n + 1)\right)$.

□

Exemplo 2.28 *Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é*

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

Solução: A equação dada é equivalente a $r - r\cos\theta = 2$. Substituindo r e $r\cos\theta$ temos:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

Transpondo x e elevando ao quadrado temos

$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

que simplifica para $y^2 = 4(x + 1)$ (uma parábola). □

Exemplo 2.29 *Mostre que a distância* d *entre os pontos* (r_1, θ_1) *e* (r_2, θ_2) *em coordenadas polares é*

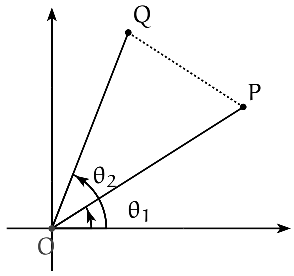
$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Solução: Usando a lei dos cossenos temos:

$$\begin{aligned} \|PQ\|^2 &= \|OP\|^2 + \|OQ\|^2 - 2\|OP\|^2\|OQ\|\cos(\theta_2 - \theta_1) && (2.10)\\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) && (2.11) \end{aligned}$$

E consequentemente a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\|PQ\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



□

Exercícios.

Ex. 7.1 — Ache as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

a) $(0, 4)$
b) $(1, -\sqrt{3})$
c) $(-\sqrt{3}, -1)$
d) $(-3, 3)$

Ex. 7.2 — Ache as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são:

a) $(3, \pi/3)$
b) $(-5, \pi/4)$
c) $(2, \pi)$
d) $(4, 5\pi/6)$

Ex. 7.3 — Transforme as seguintes equações para coordenadas polares:

a) $y^2 + 4ax = 4a^2$
b) $y^2 = 4ax$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $3x + 4y = 5$
e) $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$

Ex. 7.4 — Transforme as seguintes equações para coordenadas cartesianas:

a) $r = 4a \cos\theta$
b) $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$

c) $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$
d) $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{a}$
e) $\frac{1}{r} = 1 + e\cos(\theta)$

Ex. 7.5 — Prove que os pontos $(0, 0°)$, $(3, 90°)$ e $(3, 30°)$ formam um triângulo equilátero.

Ex. 7.6 — Mostre que a área A de um triângulo cujos vértices são o polo e (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left|r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right|$$

Ex. 7.7 — Utilizando a formula anterior, mostre que a área de um triângulo de vértices (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) e (r_3, θ_3) é

$$A = \frac{1}{2}\left(r_2 r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_1 r_3 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3)\right)$$

2.7.1 Gráficos de curvas em coordenadas polares

Nesta seção vamos apresentar algumas estratégias para o traçado do gráfico de curvas $f(r, \theta) = 0$ em coordenadas polares.

A grande diferença para o traçado de curvas no sistema cartesiano é que em coordenadas polares um ponto pode admitir várias coordenadas diferentes. Esse fato deve ser levado em conta dentre outras coisas na determinação de intersecções e simetrias.

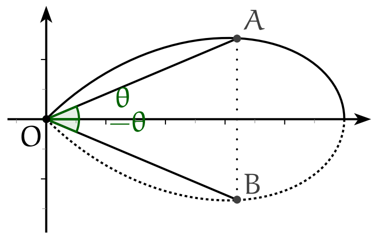
Uma curva $f(r, \theta) = 0$ admite algumas representações equivalentes, por exemplo se trocarmos r por $-r$ e θ por $\theta + \pi/2$ ou se trocarmos θ por $\theta + 2\pi n$. Equações que representam o mesmo lugar geométrico serão ditas equivalentes.

Intersecções As intersecções com o eixo x ocorrem quando $\theta = 2n\pi$ ou quando $\theta = (2n+1)\pi$. As intersecções com o eixo y ocorrem quando $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

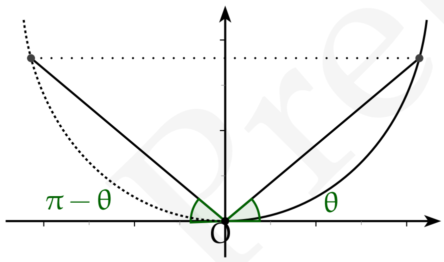
A curva passa pelo polo se existe θ tal que $r = 0$.

Simetrias Dizemos que uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo x se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos θ por $-\theta$.

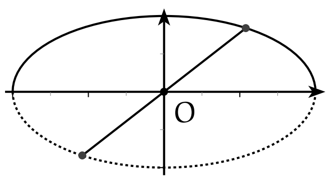
Para curvas simétricas em relação ao eixo x, o conhecimento de seu gráfico no primeiro e segundo quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a reflexão no eixo x



Uma curva é simétrica em coordenadas polares em relação ao eixo y se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos θ por $\pi - \theta$. Para curvas simétricas em relação ao eixo y, o conhecimento de seu gráfico no primeiro e quarto quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a reflexão no eixo y.



Finalmente, uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao polo se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos r por $-r$. Para curvas simétricas em relação ao polo , o conhecimento de seu gráfico no primeiro e segundo quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a inversão em relação ao polo.



Periodicidade Dada uma curva em coordenadas polares descrita como

$$r - f(\theta) = 0$$

ela será periódica se existir um número real $a \geqslant 0$ tal que $f(\theta + a) = f(\theta)$ para todo θ.

Para uma curva periódica basta traçarmos seu comportamento para valores de θ entre 0 a a, pois para valores maiores de a a curva repete o comportamento dos valores menores de a.

Exemplo 2.30 *Traçar a curva cuja equação é*

$$r = 2(1 - \cos\theta)$$

Solução: Começamos observando que essa curva é periódica com período 2π. Ela passa no polo quando $1 - \cos\theta = 0$ ou seja quando $\theta = 0$ $(+2n\pi)$

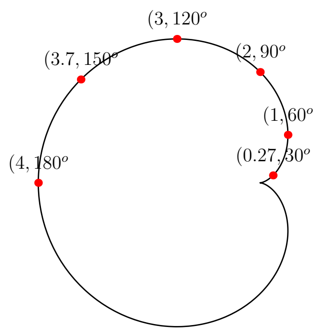
Se substituirmos θ por $-\theta$ temos que a equação permanece inalterada pois $\cos(-\theta) = \cos(\theta$. Logo essa curva é simétrica em relação ao eixo x.

Temos também que a curva é limitada pois $2(1 - \cos\theta) \leqslant 4$ já que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ e o máximo é atingido quando $\cos\theta = -1$ ou seja quando $\theta = (2n+1)\pi$.

Finalmente, atribuindo alguns valores para θ temos:

θ	$r(\theta) = 2(1 - \cos\theta)$
0	$r(0) = 0$
$\pi/6$	$r(\pi/6) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.26795$
$\pi/4$	$r(\pi/4) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.58579$
$\pi/3$	$r(\pi/3) = 1$
$\pi/2$	$r(\pi/2) = 2$
$3\pi/4$	$r(3\pi/4) = \sqrt{2} + 2 \approx 3.4142$
π	$r(\pi) = 4$

Traçando os pontos e utilizando as simetrias temos que o gráfico da curva é:



□

Exemplo 2.31 *Esboçe o gráfico da curva descrita pela equação* $r^2 = 4\cos(2\theta)$

Solução: A curva passa no polo quando $4\cos(2\theta) = 0$, ou seja, quando $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

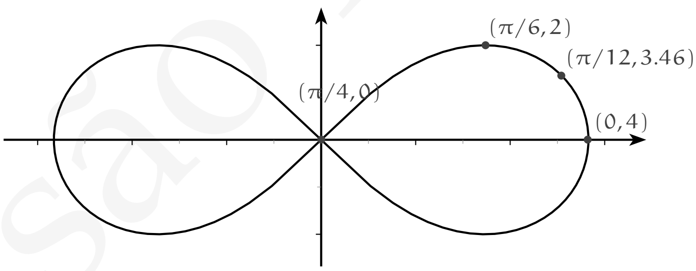
Substituindo θ por $-\theta$ temos que a equação permanece inalterada pois $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Logo ela é simétrica em relação ao eixo x. Esta curva também é simétrica em relação ao eixo y e em relação ao polo.

A curva é limitada pois $4\cos(2\theta) \leqslant 4$ já que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ e o máximo é atingido quando $\cos(2\theta) = +1$ ou seja quando $\theta = n\pi$.

Veja que para θ entre $\pi/4$ e $3\pi/4$, $4\cos(2\theta)$ é negativo e como r^2 é positivo, a curva não está definida nesses intervalos.

Como a curva possui as simetrias acima basta tomarmos valores entre 0 e $\pi/4$. Atribuindo alguns valores para θ temos:

θ	$r(\theta) = 4\cos(2\theta)$
0	$r(0) = 4$
$\pi/12$	$r(\pi/12) = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$
$\pi/6$	$r(\pi/6) = 2$
$\pi/4$	$r(\pi/4) = 0$



□

Exercícios.

Ex. 7.8 — Desenhe a curva cuja equação é:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

b) $r = 2\sec\theta$

c) $r = a\cos\theta$

d) $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$

e) $r = a(1+\operatorname{sen}\theta)$ (cardioide)

f) $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$ (lemniscata)

g) $r\theta = a$ (espiral hiperbólica)

h) $r = e^\theta$

Ex. 7.9 — Determinar analiticamente e graficamente os pontos de intersecção das curvas

a) $r = a\theta$ com $a \neq 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $r = 2\operatorname{sen}\theta$ e $r = 1$

c) $r\cos\theta = 4$ e $r\operatorname{sen}\theta = 4$

Ex. 7.10 — Determine o perímetro do quadrilátero cujos vértices são $(0, 19^o)$, $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ e $(3, 0)$

Ex. 7.11 — Mostre que a equação de uma reta que passa pelo polo é da forma

$$\theta = k$$

Ex. 7.12 — Mostre que todos os pontos da reta $x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$ satisfazem a equação $r\cos(\theta - \omega) = p$.

Ex. 7.13 — Reescreva as seguintes equações em coordenadas cartesianas, então identifique e desenhe a curva

a) $r = 6\operatorname{sen}\theta$

b) $r + 6\operatorname{sen}\theta = 0$

c) $r^2 - 3r + 2 = 0$

Apêndice

A MATRIZES E SISTEMAS LINEARES.

A.1 MATRIZES

Uma **matriz** real $m \times n$ é um conjunto ordenado de números reais dispostos em m linhas e n colunas. Os **elementos de uma matriz** serão indicados por dois índices dos quais o primeiro indica a posição na linha e o segundo na coluna. Desta forma o elemento a_{ij} refere-se ao elemento que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz é dita **quadrada** se o número de entradas é igual ao número de colunas. Uma matriz $1 \times n$ é dito **matriz linha** e uma matriz $m \times 1$ é dita **matriz coluna** . A **matriz nula** $n \times m$ é a matriz cujas todas as coordenadas são 0. A **matriz identidade** $n \times n$ é a matriz cujos termos da diagonal, isto é os termos a_{ij} com $i = j$, são iguais a 1 e os termos fora da diagonal são zeros.

A.1.1 Operações com Matrizes

Podemos definir a soma é a multiplicação de matrizes por escalares coordenada a coordenada.

Definição A.1 Dadas duas matrizes $n \times m$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ e c um escalar, definimos as matrizes $A + B$ e cA como:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad cA := (ca_{ij})$$

Exemplo A.2 *Se*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

então:

$$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad 2A == \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Definição A.3 Dado A uma matriz $m \times p$ e B uma matriz $p \times n$. O produto de A por B denotado AB é definido como a matriz $C = (cij)$ cuja entrada ij é definida como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

É fundamental observar que o produto AB só está definido se o número de colunas de A 'igual ao número de linhas de B.

Exemplo A.4 *Se*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 0\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

A.2 DETERMINANTES

Recordaremos, sem apresentar as demonstrações, algumas propriedades dos determinantes.

Dada uma matriz A o **menor** dessa matriz com respeito do elemento a_{ij} é a matriz que se obtém ao remover da matriz A a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Denotaremos tal menor por A_{ij}.

Exemplo A.5 *O menor de uma matriz* 3×3 *em relação ao elemento* a_{23} *é:*

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square \\ \square & \square & \square \\ a_{31} & a_{32} & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

O **determinante** de uma matriz quadrada é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real, determinado pelo seguinte procedimento indutivo:

1. O determinante de uma matriz 1×1 é igual ao valor da entrada dessa matriz, i.e,

   $$|a| = a$$

2. O determinante de uma matriz $n \times n$ pode ser calculado somando ao longo de uma linha ou coluna o produto de um elemento a_{ij} por $(-1)^{i+j}$ vezes o determinante do menor em relação ao elemento a_{ij}, i.e.,

   Assim, escolhendo uma linha, ou seja fixando um i temos:

   $$|A| = \sum_{j=1}^{n} -(1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

   De modo análogo, escolhendo uma coluna, ou seja fixando um j temos:

   $$|A| = \sum_{i=1}^{n} -(1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

O determinante não depende da escolha da linha ou coluna na expansão anterior.

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz 2×2 e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,|d| - b\,|c| = ad - bc$$

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz 3×3 e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

O sinal $(-1)^{i+j}$ da definição anterior pode ser facilmente calculado, notando que esse fator troca de sinal para cada termo adjacente da matriz, conforme o padrão abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Notação: Dado uma matriz quadrada de ordem n e de entradas a_{ij}, $A = (a_{ij}$, denotaremos suas colunas por $A_1, \ldots, A_n$. Logo:

$$A_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$$

e assim podemos reescrever a matriz A como $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$

Usaremos também a seguinte notação para representar o determinante de uma matriz quadrada:

$$|a \quad b \quad c \quad \ldots| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{vmatrix}$$

Assim por exemplo:

$$|a \quad b| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad |a \quad b \quad c| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Teorema A.6 *Se todos os elementos de uma coluna (ou linha) forem multiplicados por λ, então o determinante fica multiplicado por λ:*

$$|A_1 \quad A_2 \cdots \lambda A_i \cdots A_n| = \lambda |A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_n|$$

Teorema A.7 *O valor do determinante é inalterado se transpormos a matriz.*

Por exemplo:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Teorema A.8 *O valor do determinante troca de sinal se duas colunas (ou linha) são intercambiadas.*

$$\left|A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n\right| = \left|A_1 \quad A_2 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n\right|$$

Teorema A.9 *Se duas linhas ou colunas de uma matriz são idênticas então o determinante dessa matriz é nulo.*

Teorema A.10 *O valor do determinante permanece inalterado se adicionarmos um múltiplo de uma coluna (linha) a outra coluna (linha).*

$$\left|A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n\right| = \left|A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_j + \lambda A_i \cdots A_n\right|$$

A.2.1 Matriz Inversa

Dada uma matriz A o cofator do elemento a_{ij} é $c_i j = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$. A matriz formada pelos cofatores é denominada matriz dos cofatores de A, e denotada por cof A

$$\operatorname{cof}(A) = (c_{ij}) = ((-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|)$$

A transposta da matriz dos cofatores é denominada matriz adjunta de A e é denotada por adj(A).

Uma matriz quadrada A é dita **invertível** se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Teorema A.11 *Dada uma matriz A, essa matriz é invertível se e somente se $|A| \neq 0$ e nesse caso a inversa de A, denotada A^{-1} é dada por:*

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}$$

Exemplo A.12 *Dado*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule a matriz inversa

Solução: Vamos começar calculando a matriz de cofatores:

O cofator em relação ao coeficiente a_{11} é:

$$1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

O cofator em relação ao coeficiente a_{12} é:

$$-1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Calculando os cofatores como acima, temos que a matriz de cofatores é dada por:

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

E a matriz adjunta é:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

E assim como $\det A = 3$, temos que a matriz inversa é:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

A.3 TEOREMA DE CRAMER

Dado um sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = k_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = k_n \end{cases}$$

podemos escrever esse sistema como $AX = k$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

A matriz A é denominada matriz de coeficientes e k a matriz de constantes.

Teorema A.13 *Dado um sistema linear de n equações e n incógnitas*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \cdots = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \cdots = k_2 \\ \quad\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \cdots = k_n \end{cases}$$

com $|A| \neq 0$. Então as soluções desse sistema são:

$$x_1 = \frac{|k \quad A_2 \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}, \quad x_2 = \frac{|A_1 \quad k \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_1 \quad A_2 \quad A_3 \cdots k|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

Demonstração: Escrevendo o sistema linear como $AX = k$. Como $\det A \neq 0$, a matriz A é invertível, e assim multiplicando ambos os lados do sistema por A^{-1} temos:

$$X = A^{-1}k.$$

Usando a caracterização da matriz inversa como a transposta da matriz de cofatores dividido pelo determinante, temos que esse sistema pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Dessa forma temos que

$$x_1 = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

Se expandirmos o determinante $|k \quad a_2 \quad a_3 \cdots \quad a_n|$ em relação a primeira coluna temos:

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

e assim temos que:

$$x_1 = \frac{|k \quad A_2 \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

De modo análogo temos que:

$$x_i = \frac{|A_1 \quad A_2 \cdot k \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

□

Exemplo A.14 *Resolva o sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 2 \\ -3x + y - 7z = -1 \end{cases}$$

Pelo teorema de Cramer, como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

temos que as soluções são

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-19}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-13}{2}$$

A.4 MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

O método de eliminação de Gauss para sistemas lineares baseia-se na aplicação de três operações básicas nas equações de um sistema linear:

- Trocar duas equações;
- Multiplicar todos os termos de uma equação por um escalar não nulo;
- Adicionar a uma equação o múltiplo da outra.

Ao aplicarmos as operações acima a um sistema linear obtemos um novo sistema tendo as mesma soluções que o anterior. Dois sistemas que possuem as mesmas soluções serão ditos equivalentes. Ao utilizar as aplicações anteriores de modo sistemático podemos chegar a um sistema equivalente mais simples e cuja solução é evidente.

Ilustraremos a utilização dessa técnica em alguns exemplos

Exemplo A.15 *Um sistema com solução única. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 30 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + y + z = 12 \end{cases}$$

Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.

Solução:

Começaremos representando esse sistema através de sua matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 30 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

Essa matriz é obtida adicionando a matriz de coeficientes uma coluna com a matriz de constantes.

No método de Gauss, o primeiro objetivo é colocar um 1 na entrada superior a esquerda da matriz. Para isso começamos dividido a primeira linha por 2. Fazendo isso obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

O próximo passo é fazer com que os outros coeficientes da primeira coluna sejam 0. Para isso multiplicamos a primeira linha por -2 e adicionamos a segunda, e multiplicamos a primeira linha por -4 e adicionamos na terceira. Feito isso obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & -9 & -6 & -27 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array}\right)$$

Agora repetiremos o procedimento na segunda coluna, ignorando a primeira linha. Para isso multiplicaremos a segunda linha por $-1/9$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array}\right)$$

Multiplicando a segunda linha por 15 e adicionando a terceira, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

E desta forma o sistema de equações correspondente é:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 15 \\ y + \frac{2}{3}z = 3 \\ -z = -3 \end{cases}$$

E logo $z = 3$. Substituindo na segunda equação temos $y = 1$ e substituindo esses valores na primeira equação temos $x + 4 + 9 = 15$ e assim $x = 2$.

□

Exemplo A.16 *Um sistema com múltiplas soluções Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 6y + 2z + 4w = 34 \\ 3x - 2y = -2 \\ 2x + 2y + z + 2w = 15 \end{cases}$$

Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.

Solução:

Neste caso a matriz aumentada é:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 2 & 4 & 34 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Dividindo a primeira linha por 2 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Multiplicando a primeira linha por -3 e somando na segunda e multiplicando a primeira linha por -2 e somando na terceira temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -19 \end{array}\right)$$

Trocando a segunda linha com a terceira e dividindo posteriormente a segunda por -4 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \end{array}\right)$$

Multiplicando a segunda linha por 11 e adicionando a terceira temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Finalmente multiplicando a terceira linha por -4 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

A última linha nos permite expressar z em função de w: $z = 3 - 2w$. Substituindo o valor de z na segunda linha temos que $y = 4$ e finalmente substituindo esses valores na primeira linha temos que $x = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

□

Exemplo A.17 *Resolva o sistema linear por escalonamento:*

$$\begin{cases} 1x + 4y = 12 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

Solução:

Neste caso a matriz aumentada do sistema é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

que pode ser reduzida à:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Esse sistema não possui soluções, pois a última linha é impossível de ser satisfeita $0 = -\frac{1}{3}$ □

ÍNDICE REMISSIVO