Daniel Miranda, Rafael Grisi, Sinuê Lodovici

Notas de aula - versão preliminar

BC0404 - Geometria Analítica

UFABC - Universidade Federal do ABC
Santo André
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda

Versão compilada em: 30 de novembro de 2010

Escrito em LaTeX.

SUMÁRIO

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

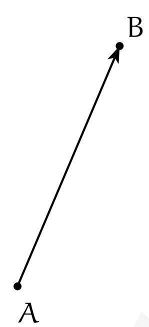
$\exists$	:	*existe*
$\forall$	:	*qualquer que seja* ou *para todo(s)*
$\Rightarrow$	:	*implica*
$\Leftrightarrow$	:	*se, e somente se*
$\therefore$	:	*portanto*
$:=$	:	*definição* (o termo à esquerda de := é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	:	*id est* (em português, *isto é*)
$\square$	:	*indica o final de uma demonstração*
$\overleftrightarrow{AB}$	:	*reta passando pelos pontos* A *e* B
AB	:	*segmento de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overline{AB}$	:	*segmento orientado de reta ligando os pontos* A *e* B
$\overrightarrow{AB}$	:	*vetor determinado pelos pontos* A *e* B
$\mathbf{v}$	:	*vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overline{AB}\|$	:	*comprimento do segmento* $\overline{AB}$
$\|\mathbf{v}\|$	:	*comprimento do vetor* $\mathbf{v}$
$\|\overrightarrow{AB}\|$	:	*comprimento do vetor* $\overrightarrow{AB}$
$\lvert A\rvert$	:	*determinante da matriz* A

1 ESTRUTURA VETORIAL DO PLANO E DO ESPAÇO

1.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

Nossa apresentação dos vetores será primordialmente geométrica, e para tanto utilizaremos livremente os resultados da geometria Euclideana plana e espacial. Assim suporemos conhecidos os conceitos de ângulos, retas, planos, comprimento de segmentos, distância de dois pontos, etc. E ao longo destas notas denotaremos por $\mathbb{E}^3$ o espaço euclideano tridimensional e por $\mathbb{E}^2$ o plano euclideano. Usaremos letras maiúsculas, A, B, etc. para representar os pontos, letras minúsculas r, s, etc. para indicar as retas e as letras gregas minúsculas π, α, etc. para denotar os planos.

Isso posto, comecemos nosso estudo com uma das estruturas sobre a qual pode-se fundamentar a geometria analítica: os vetores. Os vetores permitem uma descrição elegante e unificada da geometria Euclideana e desempenham um papel importante na física, onde são usados para representar grandezas que possuem intensidade (denominada também tamanho, comprimento, magnitude ou norma), direção e sentido. Assim por exemplo a velocidade e a aceleração de um objeto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores.



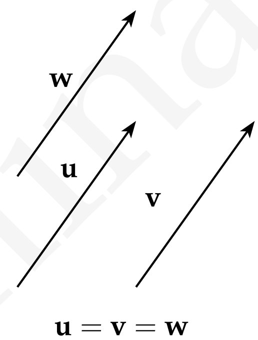
Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados. Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um par ordenado de pontos do espaço Euclideano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A, como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final e o vetor aplicado com ponto inicial A e final B será denotado por $\overline{AB}$. Para nossas considerações um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por $\overline{AA}$ ou por $\overline{0}$.

O comprimento do um segmento $\overline{AB}$ será denotado por $\left|\overline{AB}\right|$.

Os vetores são grandezas matemáticas construídas para representar para representar grandezas que possuem intensidade, direção e sentido. Os vetores aplicados servem parcialmente a esses propósitos, através deles podemos representar grandezas com esses atributos. Porem essa representação não é única, existem vários vetores com pontos iniciais e finais distintos, mas que possuem intensidade, direção e sentido iguais. Para eliminarmos esse problema, identificaremos, i.e, diremos que são iguais, todos esses vetores. Assim diremos que dois **vetores aplicados** são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se, possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido ou ainda se ambos são nulos.

Uma identificação análoga, ocorre com as frações: duas frações podem ter numeradores e denominadores iguais e mesmo assim diremos que elas são iguais (ou equivalentes) pois representam a mesma grandeza.

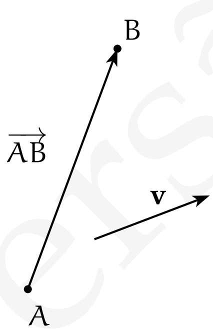
Quando identificamos os vetores aplicados equivalentes obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**.



É fundamental observar que dado um vetor podemos escolher livremente "o ponto onde inicia tal vetor", ou seja, dado um vetor e um ponto podemos escolher um vetor aplicado que inicia nesse ponto e que possui a mesma intensidade, direção e sentido do vetor. Cada vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um **representante do vetor**.

É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e **origem**, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

O vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes será denominado **vetor nulo** . O vetor nulo será denotado por $\overrightarrow{AA}$ ou por $\mathbf{0}$.



Os vetores serão denotados por fontes minúsculas em negrito **a** ou através de uma flecha superior: $\overrightarrow{a}$. Dados dois pontos A e B, denotaremos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor que tem como representante o vetor aplicado $\overline{AB}$. Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta no sentido do vetor.

Como consequência de sua definição um vetor tem três aspectos distinguidos: **direção, sentido e comprimento**. A direção do vetor é a direção do segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o determina.

O comprimento de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ será denotado por $\|\mathbf{v}\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{E}^3$ será denotado por V^3. De modo análogo, denotaremos por V^2 o conjunto de vetores associados a $\mathbb{E}^2$, i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.

De modo geral, conceitos envolvendo vetores são definidos utilizando utilizando seus representantes. Nesse espírito temos as seguintes definições:

Diremos que dois vetores são **paralelos** quando seus representantes tiverem a mesma direção ou quando um desses vetores for o vetor nulo $\mathbf{0}$. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Como consequência da definição anterior temos que o vetor nulo é paralelo a todo vetor e também que todo vetor é paralelo a si mesmo.

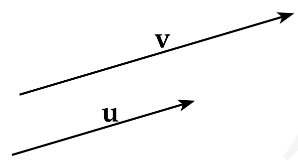


Figura 1.1: Vetores paralelos.

Diremos que dois vetores são **coplanares** se esses vetores possuem representantes contidos no mesmo plano.

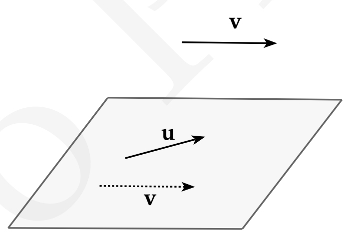


Figura 1.2: Vetores coplanares.

Finalmente, dois vetores u e v são ditos ortogonais, se ao escolhermos dois representantes para esses vetores que iniciam no mesmo ponto, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ esses segmentos forem ortogonais, ou seja, se o ângulo determinado por esses segmentos for um ângulo reto.

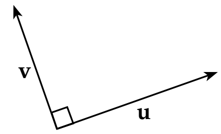


Figura 1.3: Vetores ortogonais

1.1.1 Operações com Vetores

Por tradição, grandezas que possuem apenas magnitude, ou seja que são representadas por números reais são denominadas grandezas escalares. Seguindo essa tradição denominamos um número real k de **escalar**.

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Multiplicação por Escalar: Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar k podemos realizar a multiplicação de k e $\mathbf{v}$ obtendo o vetor $k\mathbf{v}$ definido do seguinte modo:

- Se o vetor $\mathbf{v}$ é nulo ou o escalar k é zero então $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Se $k > 0$, o vetor $k\mathbf{v}$ é o segmento de reta com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Se $k < 0$ então o vetor $k\mathbf{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}$ e comprimento $|k|\,\|\mathbf{v}\|$.

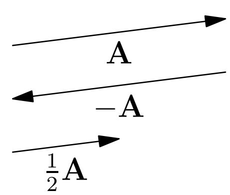


Figura 1.4: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é chamado **vetor unitário**. Dado um vetor $\mathbf{v}$ o vetor unitário

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

possui a mesma direção e sentido que v e é chamado **versor** de $\mathbf{v}$.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor $\mathbf{v}$. Nesse caso o tamanho de $\mathbf{v}$ não é importante e podemos multiplica-lo livremente por um escalar.

Através da multiplicação de vetores por escalares podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.1 *Se dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos e* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *então* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos tratar primeiro o caso em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Com essa escolha, provemos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento.

A demonstração do caso em que $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhemos $\lambda = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Corolário 1.2 *Dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos se e somente se* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ *para algum* $\theta \in \mathbb{R}$.

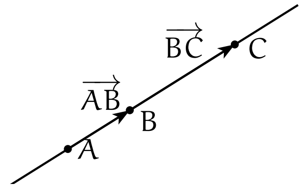
Demonstração: Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos.

Caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, i.e., se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ para $\theta = 0$.

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesma direção, ou seja, são paralelos. □

E como consequência do corolário anterior temos:

Teorema 1.3 *Três pontos* A, B, C *pertencem a mesma reta se e somente se* $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$ *ou* $\overrightarrow{BC} = \theta\overrightarrow{AB}$.



Demonstração: Claramente se A, B, C pertencem a mesma reta então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos e consequentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$$

Se $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$, então pelo corolário anterior os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Consequentemente são paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Mas como o ponto B pertence a ambas as reta, essas são coincidentes, i.e., os pontos A, B, C pertencem a mesma reta. □

Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overline{AB}$, representante arbitrário de $\mathbf{v}$, tome um segmento orientado $\overline{BC}$ que representa $\mathbf{u}$, i.e., tome um representante de $\mathbf{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\mathbf{v}$, desta forma o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de v até a extremidade final do representante de $\mathbf{u}$.

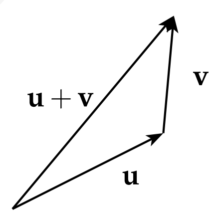


Figura 1.5: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da regra do paralelogramo. Para somar dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O, como na figura 1.6. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P. E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. O vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento $\overline{OP}$ divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores **v** e **u**.

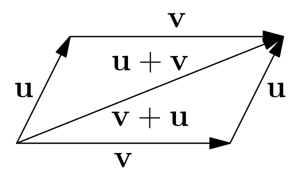
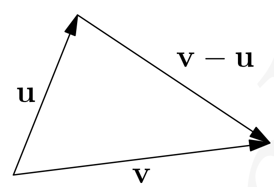


Figura 1.6: Regra do paralelogramo.

Observamos que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição.

A partir da adição de vetores podemos definir a subtração de vetores: o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é o vetor que adicionado a **u** dá o vetor **v**. Consequentemente, se representarmos os vetores **v** e **u** começando no mesmo ponto, o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ será o vetor que liga a extremidade final de **u** a extremidade final de **v**.

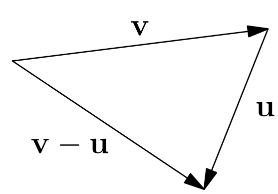


Outro modo de ver a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é através da seguinte propriedade da adição vetores:

Para cada vetor **u** *existe um único vetor* $-\mathbf{u}$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

O vetor $-\mathbf{u}$, conhecido como o **vetor oposto** de **u**, é aquele com mesmo comprimento e direção de **u**, mas sentido oposto.

Sob esse ponto de vista, a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ é apenas a soma de **v** com $-\mathbf{u}$.



Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma é nula:

Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e., $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes:

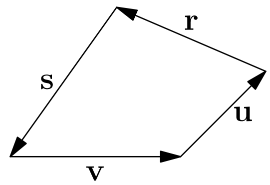


Figura 1.7: $\mathbf{v}+\mathbf{u}+\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{0}$

Proposição 1.4 *Sejam* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vetores e* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *escalares. As operações com vetores possuem as seguintes propriedades:*

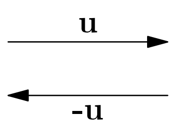
Propriedades da soma:

$\boxed{\text{S1.}}$ Propriedade Comutativa: $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$

$\boxed{\text{S2.}}$ Propriedades associativa: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

$\boxed{\text{S3.}}$ Elemento Neutro: $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

$\boxed{\text{S4.}}$ Elemento oposto: Para cada vetor $\mathbf{u}$ existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

$\boxed{\text{M1.}}$ Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

$\boxed{\text{M2.}}$ Multiplicação por zero $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

$\boxed{\text{M3.}}$ Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$

$\boxed{\text{M4.}}$ Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$

$\boxed{\text{M5.}}$ Elemento neutro multiplicativo $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Demonstração: Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, veja a figura 1.8. A diagonal é simultaneamente os vetores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.9.

As propriedades S3 e S4 seguem como descrito no texto anterior à Proposição.

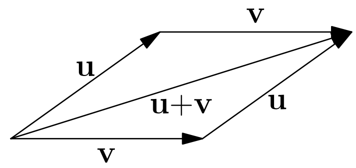


Figura 1.8: Propriedade Comutativa da Soma

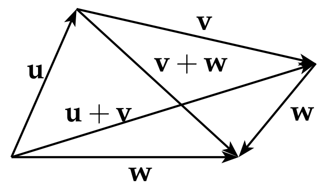


Figura 1.9: Propriedade Associativa da Soma

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido de $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2\mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2|\, \|\mathbf{u}\|) = |\lambda_1\lambda_2| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}\|$$

.

A propriedade M4, i.e, a distributiva dos vetores em relação aos escalares

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u},$$

segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)|\, \|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1 \mathbf{u}\| + \|\lambda_2 \mathbf{u}\| = \|\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = \left|(\lambda_1 + \lambda_2)\right| \|\mathbf{u}\| = \left|\, |\lambda_1| - |\lambda_2| \,\right| \|\mathbf{u}\| = \left| \|\lambda_1 \mathbf{u}\| - \|\lambda_2 \mathbf{u}\| \right|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\left| \|\lambda_1 \mathbf{u}\| - \|\lambda_2 \mathbf{u}\| \right| = \|\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{u}\|.$$

□

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação + e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.5 $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 1\mathbf{v}$ e pela propriedade M4 temos que$1\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (1 + 1)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ □

Exemplo 1.6 $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, *ou seja o vetor oposto a* $\mathbf{v}$ *é* $-1\mathbf{v}$.

Demonstração: Pela propriedade M5 temos que $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = 1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v})$ e pela propriedade M4 temos que $1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = (1 - 1)\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. Finalmente a propriedade M2 nos diz que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a $\mathbf{v}$ é $-1\mathbf{v}$. □

Exemplo 1.7 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ *se, e somente se,* $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$.

Demonstração: Vamos provar a primeira implicação. Se $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ então, $\mathbf{u}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$

Vamos começar calculando $(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v}) \text{ por S2} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{v})=\mathbf{u} \text{ por M4 e M5} \tag{1.2}$$

por outro lado, como $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{v}=\mathbf{u} \tag{1.3}$$

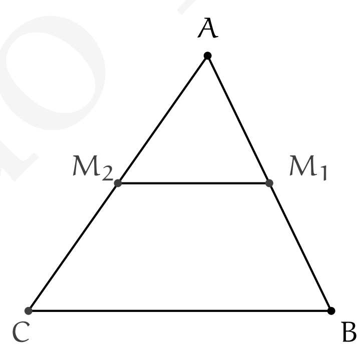
e consequentemente por 1.2 e **??** temos:

$$u=(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{v}$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes.

□

Exemplo 1.8 *Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.*



Solução: Seja o triângulo ΔABC e seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M_2 o ponto médio do lado $\overline{AC}$. O vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor $\overrightarrow{AC}$ pois ambos possuem mesma direção e sentido e o comprimento de $\overrightarrow{BM_1}$ é metade do comprimento de $\overrightarrow{AM_1}$. Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor $\overrightarrow{AC}$, i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \tag{1.4}$$
$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \tag{1.5}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.6}$$
$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \tag{1.7}$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \tag{1.8}$$

substituindo 1.6 e 1.7 em 1.8 temos:

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{M_2A} + 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.9}$$
$$\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AM_1}) = 2\overrightarrow{M_2M_1} \tag{1.10}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento $\overline{CB}$ e seu comprimento é metade do último.

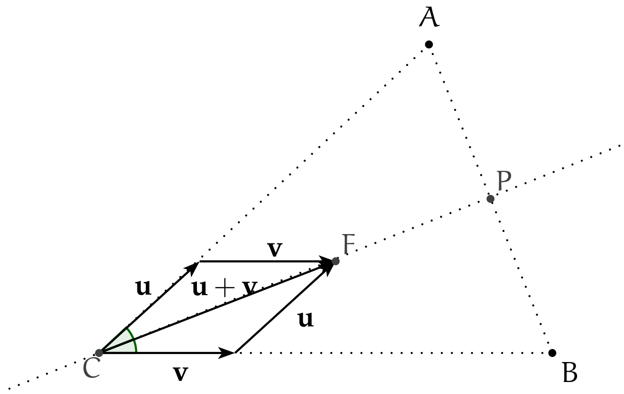
□

Exemplo 1.9 *Dado um triângulo de vértices* A, B, C. *Dado* P *o ponto de encontro da bissetriz do ângulo* $\widehat{C}$ *com o lado* $\overline{AB}$ *Então o vetor* CP *é paralelo ao vetor* $\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$, *ou seja,*

$$\overrightarrow{CP} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}\right)$$

Solução:

Observe que os vetores $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$ e $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$ são unitários. Considere agora o paralelogramo determinado por esses vetores, conforme a figura abaixo:



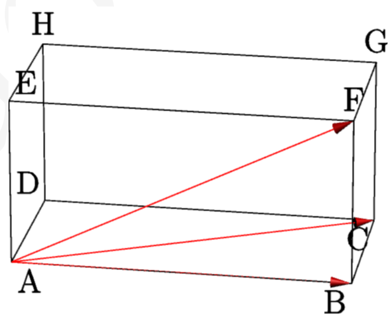
Como os vetores **u** e **v** possuem o mesmo comprimento, pois são unitários o paralelogramo determinado por estes é um losango. E assim a diagonal que liga o vértice C ao vértice F é também a bissetriz do ângulo $\hat{C}$. E consequentemente o vetor CP é paralelo ao vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, i.e,

$$\overrightarrow{CP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} \right)$$

$\square$

Exercícios.

Ex. 1.1 — Sendo ABCDEFGH o paralelogramo abaixo, expresse os seguintes vetores em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$:



a) $\overrightarrow{BF}$
b) $\overrightarrow{AG}$
c) $\overrightarrow{AE}$
d) $\overrightarrow{BG}$

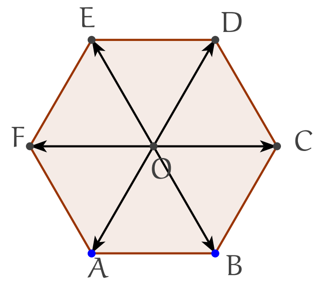
e) $\overrightarrow{AG}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

g) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$

h) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$

Ex. 1.2 — Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular, como na figura abaixo. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$



a) $\overrightarrow{DF}$

b) $\overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{DO}$

e) $\overrightarrow{EC}$

f) $\overrightarrow{EB}$

g) $\overrightarrow{OB}$

Ex. 1.3 — Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular, como no exercício anterior. Expresse os seguintes vetores em função dos vetores $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$

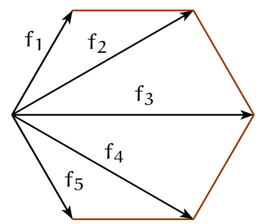
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$

Ex. 1.4 — Dados os vetores $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_5$ os vetores que ligam um vértice de um hexágono regular aos outros vértices como mostra a figura abaixo.

a) Determine a soma desses vetores em função dos vetores $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_3$.



Ex. 1.5 — Dado um triângulo ΔABC, sejam M, N, P os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA respectivamente. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Ex. 1.6 — Dado um triângulo ΔABC, seja M um ponto do segmento AB. Suponha que o vetor $\overrightarrow{AM}$ é igual a λ vezes o vetor $\overrightarrow{MB}$. Exprima o vetor $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Ex. 1.7 — Dado um quadrilátero $ABCD$, tal que $\overrightarrow{AD} = 5\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}$ e tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

a) determine o lado $\overrightarrow{CD}$ e as diagonais $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

b) prove que $ABCD$ é um trapézio.

Ex. 1.8 — Prove que $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$

Ex. 1.9 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares resolva a equação nas incógnitas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i.e., escreva os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

a)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \mathbf{u} \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \end{cases}$$

Ex. 1.10 — Dados os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ tais que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{z}$. Prove que $\mathbf{w}$ é paralelo a $\mathbf{z}$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é paralelo a $\mathbf{z}$.

Ex. 1.11 — Usando as propriedades da soma de vetores e da multiplicação por escalares prove que:

a) $(-\alpha)\,\mathbf{v} = -\,(\alpha\mathbf{v})$

b) $\alpha\,(-\mathbf{v}) = -\,(\alpha\mathbf{v})$

c) $-\alpha\,(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$

Ex. 1.12 — Prove que se $\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\alpha = \beta$.

Ex. 1.13 — Prove que $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então ou $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

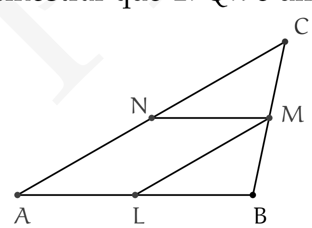
Ex. 1.14 — Dado um pentágono regular e O o seu centro. Mostre que a soma dos vetores ligando o centro do pentágono a seus vértices é o vetor nulo.

Ex. 1.15 — Prove que dados dois vetores **u** e **v** não paralelos então se

$$\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \mathbf{O}$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ex. 1.16 — Se ΔEFG é um triângulo qualquer e P, Q e R são os pontos médios dos lados EF FG e GE respectivamente, demostrar que $EPQR$ é um paralelogramo



1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Como vimos na seção anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Por exemplo, multiplicando um vetor não-nulo por um escalar de módulo diferente de 1 obtemos um vetor de módulo diferente do vetor original. De modo semelhante, dados dois vetores não-nulos com diferentes direções, sua soma é um vetor que tem direção diferente dos dois vetores somados.

Observando isso, alguém poderia perguntar:

Quantos vetores eu preciso dar para a partir deles, através das operações de soma e multiplicação de vetor por escalar, escrever todos os demais vetores existentes no espaço?

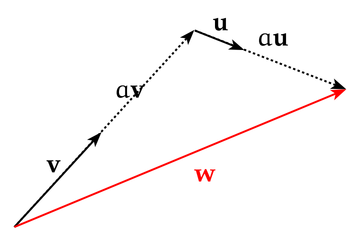


Figura 1.10: O vetor **w** pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores **u** e **v**.

Com o objetivo de responder a questões como a descrita acima, desenvolvemos um conceito fundamental para o estudo de geometria analítica: **Dependência e Independência Linear**. Antes, porém, definamos combinação linear.

Um vetor w é dito **combinação linear** dos vetores $\{v_i\}_{i=1\ldots n}$ se existem escalares $\{\alpha_i\}_{i=1\ldots n}$ tal que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Exemplo 1.10 *O vetor* w *ilustrado na figura 1.11 é combinação de* u, v*. Pois*

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$$

Exemplo 1.11 *Na figura 1.12 temos que vetor* $\mathbf{f}_1$ *é combinação linear de* $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Como os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ *formam um poligono fechado sua soma é* $\boldsymbol{0}$

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \boldsymbol{0}$$

e assim:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 - \mathbf{f}_5$$

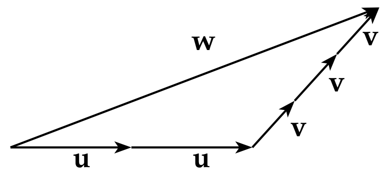


Figura 1.11: $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

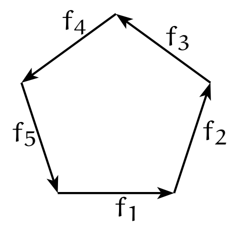


Figura 1.12: O vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Motivados por esse exemplo definimos:

Definição 1.12 Os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que o vetor $\mathbf{v_i}$ seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$\mathbf{v_i} = \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{v_j},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são ditos **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

A partir dessa definição temos o seguinte resultado:

Proposição 1.13 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente dependentes se e somente se existem* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ NÃO todos nulos *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \boldsymbol{0}.$$

Demonstração: Suponha que os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i},$$

para $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Somando $(-1)\mathbf{v_1}$ a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)\mathbf{v_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}.$$

Logo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}$ com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos (pois $\alpha_1 = -1$).

Reciprocamente, considere que existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\alpha_1}$ e isolando $\mathbf{v_1}$ chegamos a:

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \mathbf{v_i}.$$

Ou seja, o vetor $\mathbf{v_1}$ é combinação linear dos demais. $\square$

A negativa lógica de tal proposição nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 1.14 *Os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes se e somente se*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \boldsymbol{0} \right) \Longrightarrow (\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor $\mathbf{0}$ pode ser escrito de modo único como combinação de $\mathbf{v}_i$.

> A partir do Teorema 1.14 e da Proposição 1.13, estudar a dependência linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0},$$
>
> com incógnitas α_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Se tal equação admitir apenas a solução $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LI. Caso contrário, são LD.

A dependência e independência linear de vetores de V^2 e V^3 pode, também, ser caracterizada geometricamente. Para isso definamos a dependência geométrica de vetores:

Definição 1.15 Para vetores em V^2 e V^3 definimos:

1. Um vetor $\mathbf{v}$ é **geometricamente dependente (GD)** se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2. Dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos a uma mesma reta.

3. Três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são **geometricamente dependentes (GD)** se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são paralelos a um mesmo plano.

4. Quatro ou mais vetores são, por definição, **geometricamente dependentes (GD)**.

Um dado conjunto de vetores é dito **geometricamente independente (GI)** se ele não é geometricamente dependente (GD).

Veremos que um conjunto de vetores é **geometricamente dependente [independente]** se e somente se são **linearmente dependente [independente]**.

Observamos que dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD se e somente $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$ (o que inclui o caso em que um deles é o vetor nulo).

Além disso, observamos que um ponto O e dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes determinam um plano. Para ver isso, tome representantes de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ com origem em O. É fácil ver que existe um único plano do espaço $\mathbb{E}^3$ que contém tais representantes. Assim sendo, dados três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ com $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD se e somente se $\mathbf{w}$ é paralelo ao plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e um ponto qualquer do espaço.

Provemos agora dois lemas de fundamental importância, não apenas para a demonstração da equivalência entre os conceitos de dependência linear e geométrica, mas para toda geometria analítica:

Lema 1.16 (Lema da Base para Planos) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$ geometricamente dependentes com $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ geometricamente independentes. Temos que $\mathbf{f}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, isto é:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Considere um ponto arbitrário O do espaço. Primeiramente observe que $\mathbf{f}$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Considere o representante de $\mathbf{f}$ que começa no ponto O e termina em P, i.e., seja $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$. Considere a reta paralela a $\mathbf{u}$ que passa pelo ponto P e a reta paralela a $\mathbf{v}$ que passa por O. Essas retas se encontram num ponto K (Por quê?). É fácil ver, então, que $\mathbf{f} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$.

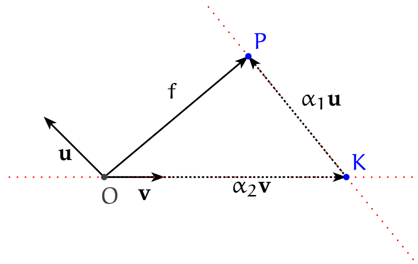


Figura 1.13: Lema da Base para Planos

Como $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{u}$, tal vetor é um escalar vezes $\mathbf{u}$, ou seja, $\overrightarrow{KP} = \alpha_1 \mathbf{u}$. De maneira análoga $\overrightarrow{OK} = \alpha_2 \mathbf{v}$. Desta forma temos:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}.$$

$\square$

Lema 1.17 (Lema da Base para V^3) *Considere três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^3$ geometricamente independentes. Temos que, para qualquer $\mathbf{f} \in V^3$, vale que $\mathbf{f}$ é combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, ou seja:*

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w},$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

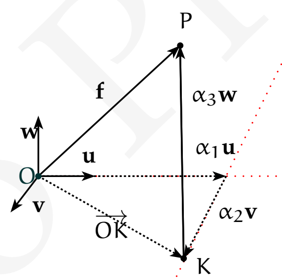


Figura 1.14: Lema da Base para o Espaço

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração anterior. Começamos escolhendo representantes dos vetores $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que começam no ponto O (veja a figura **??**). Seja então a reta paralela a $\mathbf{w}$ passando por P. Essa reta intercepta o plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no ponto K.

O vetor $\overrightarrow{OK}$ estando no mesmo plano que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}$$

O vetor $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{w}$, i.e, $\overrightarrow{KP} = \alpha_3 \mathbf{w}$. Finalmente como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ temos que:

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w}.$$

$\square$

Uma vez provados esses resultados demonstremos o seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Os conceitos de dependência e independência geométrica e dependência e independência linear são equivalentes.*

Demonstração:

1. Se um vetor $\mathbf{v}$ é GD, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Daí temos que $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha = 1 \neq 0$. Daí pela Proposição 1.13 segue que $\mathbf{v}$ é LD. Reciprocamente, se $\mathbf{v}$ é LD então $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para $\alpha \neq 0$ então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, assim, o vetor $\mathbf{v}$ é GD.

2. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, então $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$. Pelo Corolário 1.2, ou $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ ($\lambda, \theta \in \mathbb{R}$). Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD.

   Por outro lado, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LD então um dos vetores é combinação linear do outro, i.e., temos que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ ($\lambda, \theta \in \mathbb{R}$). E assim, pelo Corolário 1.2, temos que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos e, portanto, GD.

3. Se três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD, então duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. Vale então que:

   $$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + 0 \mathbf{w}.$$

   Logo $\mathbf{u}$ é combinação linear dos demais vetores e, portanto, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são GD e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são GI, pelo Lema 1.16 temos que

   $$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Assim, os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD.

   Reciprocamente, suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD. Temos então que um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + \theta \mathbf{w}$. Segue que o vetor $\mathbf{u}$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (Por quê?). Logo os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares e, consequentemente, GD.

4. Considere n vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$, com $n \geqslant 4$ (portanto um conjunto GD de vetores). Duas coisas podem ocorrer: ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, ou $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GI.

   Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são GD, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 + \theta \mathbf{v}_3$. Segue que:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 + \theta \mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^{n} 0 \mathbf{v}_i.$$

   Logo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   Caso tenhamos $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ GD e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ GI, pelo Lema 1.17,

$$\mathbf{v}_4 = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3},$$

   para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Daí temos:

$$\mathbf{v}_4 = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} + \sum_{i=5}^{n} 0 \mathbf{v_i}.$$

   Logo, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ são LD.

   A recíproca no caso de quatro ou mais vetores é imediata. Por definição, quatro ou mais vetores são GD.

□

Proposição 1.19 *Seja* $\mathbf{u}$ *um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i}$$

então essa representação é única.

Demonstração: Suponha que a representação não é única

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \mathbf{v}_i$$

então:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

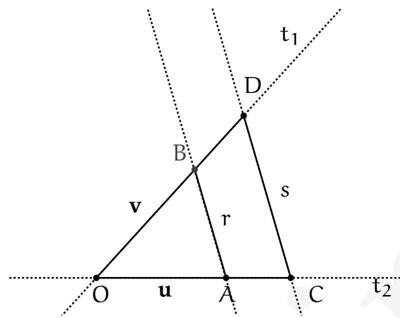
e logo

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Como os vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$ são linearmente independentes, temos que para cada i, $(\alpha_i - \alpha'_i) = 0$, e assim $\alpha_i = \alpha'_i$. Dessa forma, temos que a representação é única. □

Exemplo 1.20 *Dado as retas* r *e* s *e um ponto* O *não pertencente as retas. Dadas duas retas* t_1 *e* r_2*, que interceptam* r *e* s *nos pontos* A, B, C, D *conforme a figura abaixo. Mostre os segmentos* $\overline{AB}$ *e* CD *são paralelos se e somente se*

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$



Solução:

Como os pontos O, A, B não são colineares, os vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ não são paralelos e assim são LI. Como os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ são paralelos temos que

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$$

Como $\overrightarrow{OC}$ é paralelo à $\overrightarrow{OA}$ temos que

$$\overrightarrow{OC} = x\mathbf{u}$$

De modo análogo temos que

$$\overrightarrow{OD} = y\mathbf{v}$$

E assim

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = y\mathbf{v} - x\mathbf{u}$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \lambda(y\mathbf{v} - x\mathbf{u})$$

e logo

$$(1 - \lambda x)\mathbf{u} + (\lambda y - 1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Como os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são LI, temos que

$$\begin{cases} 1 - \lambda x = 0 \\ \lambda y - 1 = 0 \end{cases}$$

e logo $x = y = \frac{1}{\lambda}$.

E finalmente temos que

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

Faremos agora a recíproca. Se

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}$$

então

$$\frac{\|AC\|}{\|OA\|} = \frac{\|BD\|}{\|OB\|}.$$

e assim

$$\frac{\|OA\| + \|AC\|}{\|OA\|} = \frac{\|OB\| + \|BD\|}{\|OB\|}.$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$$

e assim igualando a k, temos que $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = k$

Como os segmentos OC e OA são paralelos temos que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$. De modo similar temos que $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$

E assim

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

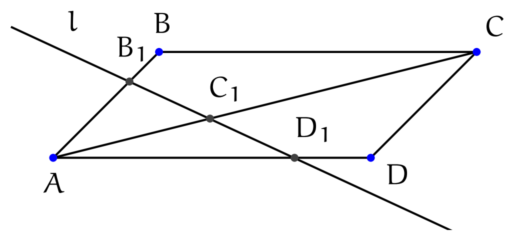
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

Consequentemente os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelos.

$\square$

Exemplo 1.21 *Dado um paralelogramo $ABCD$. Seja l uma linha reta que intercepta AB, AC e AD nos pontos B_1, C_1 e D_1 respectivamente. Prove que se $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3\overrightarrow{AC}$ então:*

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$



Solução: Assuma que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Então $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \mathbf{b}$ e $AC_1 = \lambda_3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Como os três pontos A_1, B_1 e C_1 estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{B_1D_1} \tag{1.11}$$

Mas $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3 \mathbf{b}$
e $\overrightarrow{B_1D_1} = AD_1 - AB_1 = -\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$

Substituindo as expressões acima em 1.11, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\,\mathbf{a} + \lambda_3 \mathbf{b} = -\,k\lambda_1 \mathbf{a} + k\lambda_2 \mathbf{b}$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\,(\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + \mathbf{b}\,(\lambda_3 - k\lambda_2) = \mathbf{0}$$

E logo $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$.

Da segunda equação obtemos $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. Substituindo k na primeira equação e dividindo a mesma por $\lambda_1\lambda_3$ segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

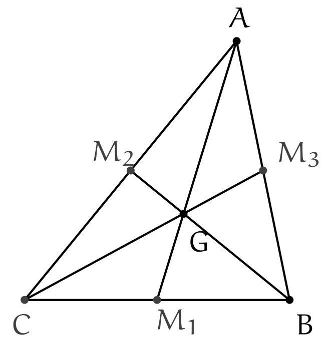
□

Exemplo 1.22 *Sejam M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC. Prove que as três medianas têm um único ponto comum, que divide AM_1, BM_2 e CM_3 na razão 2 para 1. Esse ponto é conhecido como baricentro do triângulo.*

Solução: Dividiremos a resolução em duas partes:

1. Mostrar que G divide AM_1 e BM_2 na razão 2 para 1, ou seja, que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$



2. Mostrar que C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1, i.e.,

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}$$

Resolvidas as partes seguirá de modo natural que o baricentro divide as medianas na razão 2 para 1.

De modo a tornar a notação da resolução mais limpa, chamemos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente. Observe que, como os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI, todos os demais vetores do plano podem ser escritos em função desses.

Estabelecida essa notação, segue imediatamente que $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1. Para estudarmos a intersecção G das medianas AM_1 e BM_2, escrevamos inicialmente os vetores $\overrightarrow{AM_1}$ e $\overrightarrow{BM_2}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$
$$\overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

Como A, G e M_1 são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha\overrightarrow{BM_2} = \alpha\left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right).$$

Observamos que, nesse ponto, não sabemos que G divide os segmentos AM_1 e BM_2 na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes (λ e α) para os escalares das equações acima.

É fácil ver que uma equação envolvendo os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{BG}$ é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Donde temos:

$$\alpha\left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right).$$

Isolando os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos então:

$$\mathbf{a}\left(-\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \mathbf{b}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI segue então que:

$$\begin{cases} -\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, G divide tanto o segmento AM_1 quanto o segmento BM_2 na razão 2 para 1.

2. Para mostrar que C, G e M_3 são colineares, mostremos que a equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta\overrightarrow{CM_3}$$

com incógnita em β admite solução real.

Inicialmente escrevamos $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{CM_3}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}, \\ \overrightarrow{CM_3} &= \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Temos assim a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}\right) = \beta\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right).$$

Isolando $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ temos:

$$\mathbf{a}\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) + \mathbf{b}\left(-\frac{2}{3} + \beta\right) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são LI:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases}$$

Tal sistema admite uma solução:

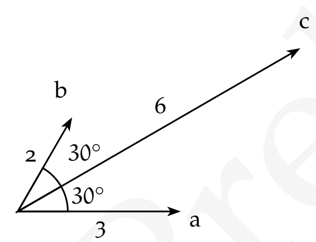
$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Dessa forma temos que os pontos C, G e M_3 são colineares e que G divide CM_3 na razão 2 para 1.

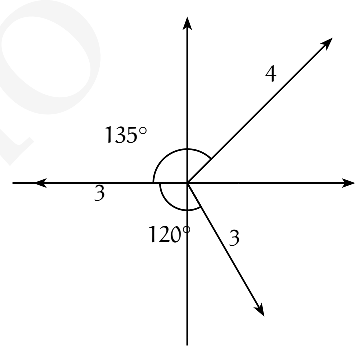
□

Exercícios.

Ex. 2.1 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.



Ex. 2.2 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ como na figura abaixo. Escreva o vetor $\mathbf{c}$ como combinação de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

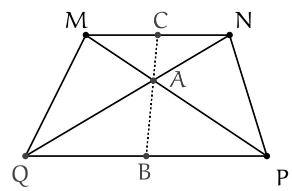


Ex. 2.3 — Sejam B um ponto no lado ON do paralelogramo AMNO e e C um ponto na diagonal OM tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$$

e $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{1+n}\overrightarrow{OM}$. Prove que os pontos A, B e C estão na mesma reta.

Ex. 2.4 — Dado um paralelogramo MNPQ, seja A o ponto de intersecção das diagonais e sejam B e C os pontos médios dos lados opostos MN e PQ. Prove que se os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta então MNPQ é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).



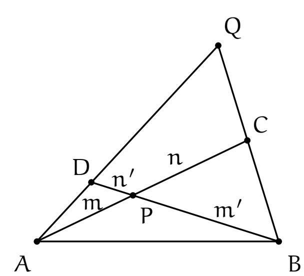
Ex. 2.5 — Se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$, prove que os vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD para qualquer ponto O.

Ex. 2.6 — Os pontos P e Q dividem os lados CA e CB de um triângulo ΔABC nas razões

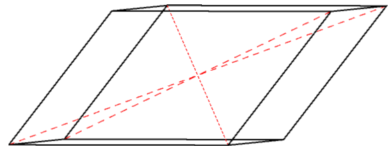
$$\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y}$$

respectivamente. Prove que se $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{AB}$ então $x = y = \lambda$.

Ex. 2.7 — As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um quadrilátero ABCD se interceptam no ponto P, que divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $m : n$ e o segmento $\overline{BD}$ na razão $m' : n'$. Dado Q o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Encontre a razão $AQ : DQ$ e $BQ : CQ$.



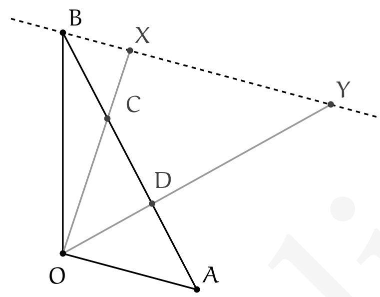
Ex. 2.8 — Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Demostre que as diagonais de um paralelepípedo dividem-se mutuamente ao meio.



Ex. 2.9 — Dado um triângulo ΔOAB, sejam C e D pontos sobre o lado AB dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por B traçamos a reta paralela a OA, e sejam X e Y a intersecção dessa reta com as retas ligando OC e OD respectivamente.

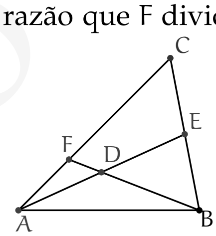
a) Expresse os vetores $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ em função de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

b) Determine as razões nas quais X divide BY, C divide a OX e D divide a OY.



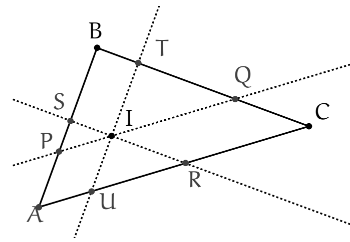
Ex. 2.10 — Num quadrilátero $ABCD$, o Q o ponto de intersecção das diagonais AC e BD se interceptam dividem as diagonais nas razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$ respectivamente. Em qual razão divide o ponto P determinado pelas intersecção os lados AB e CD a estes segmentos.

Ex. 2.11 — Dado o ponto médio da mediana $\overline{AE}$ do triângulo ΔABC se a reta BD corta o lado $\overline{AC}$ no ponto F, determine a razão que F divide $\overline{AC}$



Ex. 2.12 — Dado um triângulo ΔABC e I um ponto interior ao triângulo. Passando por I, traçamos os segmentos $\overline{PQ}, \overline{RS}, \overline{TU}$ paralelos respectivamente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente. (Com os pontos P, S em $\overline{AC}$, T, Q em $\overline{BC}$ e U, R em $\overline{AB}$. Demonstre que

$$\frac{\|PQ\|}{\|AB\|} + \frac{\|RS\|}{\|BC\|} + \frac{\|TU\|}{\|CA\|} = 2$$



1.3 BASES

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ **gera** o espaço (um dado plano) se qualquer vetor $\mathbf{w}$ do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Definição 1.23 Uma **base** para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{v}_i\}$ linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).

Teorema 1.24 (da base para planos) *Qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores não nulos e não paralelos* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$$

com m *e* $n \in \mathbb{R}$ *únicos. Ou seja, dois vetores não nulos e não paralelos formam uma base para* V^2.

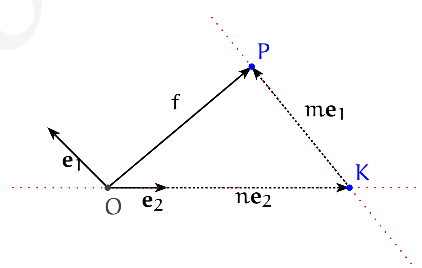


Figura 1.15: Teorema da Base para Planos

Demonstração: O teorema é consequência imediata do Lema 1.16 e da Proposição 1.19. □

Corolário 1.25 *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores.*

Teorema 1.26 (Base para o Espaço) *No espaço tridimensional, sejam* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *no espaço pode ser escrito como combinação linear única de* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$*. Ou seja, três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano formam uma base para* V^2

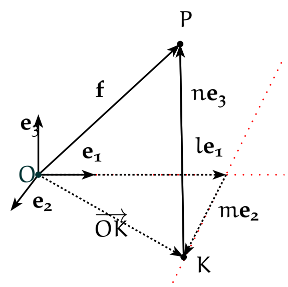


Figura 1.16: Teorema da Base para o Espaço

Demonstração: O teorema é consequência imediata do Lema 1.17 e da Proposição 1.19. □

Exercícios.

Ex. 3.1 — Mostre que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

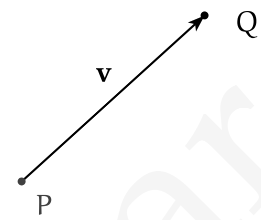
Ex. 3.2 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ também é L.I.

Ex. 3.3 — Prove que se o conjunto de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é L.I., então o conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - 2\mathbf{u}\}$ também é L.I.

Ex. 3.4 — Dado um tetraedro $ABCD$ explique por que os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ formam uma base para o espaço.

1.4 SOMA DE PONTO COM VETOR

Dado um ponto P e um vetor $\vec{v}$ podemos definir uma soma de vetor com ponto do seguinte modo.



Seja um representante de $\vec{v}$ que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:

$$P + \mathbf{v} := Q$$

Ou seja, a soma do ponto com o vetor **v** nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de v.

Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + \mathbf{v} = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.

Se escolhermos um ponto fixo no espaço O que chamaremos de **origem**, cada ponto P do espaço (ou plano) pode ser escrito como

$$P = O + \overrightarrow{OP}$$

Nesse caso o vetor $\overrightarrow{OP}$ é dito **vetor posição** de P.

Proposição 1.27 *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

1. $P + \mathbf{O} = P$
2. $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
4. $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração: Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\mathbf{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.

3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

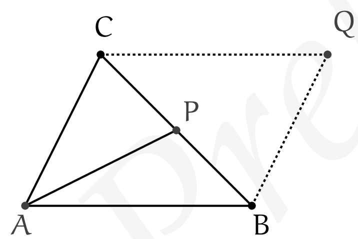
   Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

   Logo

$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.12}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.13}$$
$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.14}$$

□

Exemplo 1.28 *Dado* ΔABC *um triângulo e* P *um ponto sobre* BC. *Se* $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ *demonstre que* $ABQC$ *é um paralelogramo e assim* Q *não depende da escolha de* P.



Solução: Como $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

e logo

$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}$$

e logo

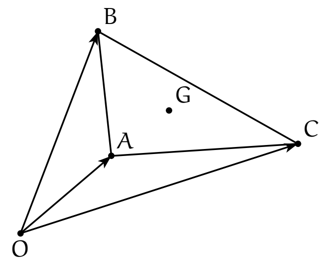
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

E assim $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. De modo análogo podemos provar que $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC}$ e assim $ABQC$ é um paralelogramo.

□

Exemplo 1.29 *Dado um triângulo ΔABC e O um ponto qualquer. Então o baricentro G do triângulo ΔABC é dado por:*

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$



Solução:

Seja

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Como $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, temos que:

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

que simplificando fica:

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

E como $A = O + \overrightarrow{OA}$, a expressão anterior é equivalente a:

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

No exercício 1.22 já provamos que $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$ ou na forma de soma de ponto com vetor que:

$$G = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

E assim temos que $G = P$, ou seja, demonstramos que:

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$\square$

Exercícios.

Ex. 4.1 — Prove que:

a) $(P+\mathbf{u})-\mathbf{u}=\mathbf{P}$

b) $P+\mathbf{u}=Q+\mathbf{v}$ então $\mathbf{u}=PQ+\mathbf{v}$

c) $P+\overrightarrow{PQ}=Q$

Ex. 4.2 — Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutualmente ao meio.

Ex. 4.3 — Sendo A e B dois pontos, mostrar que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$

Ex. 4.4 — Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio do lado AB e F é o ponto médio do lado oposto DC, prove que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

Ex. 4.5 — Seja G o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC. Prove que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

Ex. 4.6 — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

Ex. 4.7 — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

Ex. 4.8 — Dado $ABCD$ um tetraedro, seja M o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC. Exprima o vetor $\overrightarrow{DM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

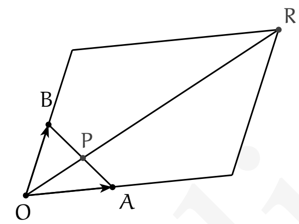
Ex. 4.9 — Prove que se os pontos A, B, C formam um triangulo equilátero então os pontos $A+\mathbf{v}, B+\mathbf{v}, C+\mathbf{v}$ formam um triângulo equilátero para qualquer $\mathbf{v}$.

Ex. 4.10 — Dado $ABCD$ um quadrilátero, e O um ponto qualquer e seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

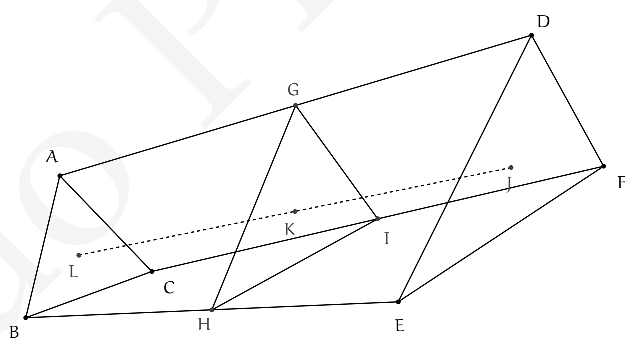
$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Ex. 4.11 — Demostre que o baricentro de um triângulo, é também o baricentro do triângulo cujos vértices são pontos que dividem os lados do primeiro na mesma razão.

Ex. 4.12 — Mostre que dados os vetores $m\overrightarrow{OA}$ e $n\overrightarrow{OB}$, sua soma é igual a $(n+m)\overrightarrow{OP}$, sendo P o ponto de intersecção do segmento AB com a reta OR, onde $R = O + m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.



Ex. 4.13 — Num plano são dados dois triângulos ΔABC e ΔCDE. Sejam G, H, I os pontos médios dos segmentos $\overline{AC}, \overline{BD}$ e $\overline{CE}$ respectivamente. Mostre que os baricentros dos triângulos ΔABC ΔDEF e ΔGHI são colineares.



Ex. 4.14 — Mostre que as alturas de um triângulo ΔABC de ângulos α, β, γ se interceptam num único ponto, denominado **ortocentro** cujo vetor posição é:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\mathbf{a} + \operatorname{tg}\beta\mathbf{b} + \operatorname{tg}\gamma\mathbf{c}}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$$

Ex. 4.15 — Mostre que a bissetriz de um triângulo ΔABC se interceptam num único ponto, denominado **circuncentro** cujo vetor posição é:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha \mathbf{a} + \operatorname{sen} 2\beta \mathbf{b} + \operatorname{sen} 2\gamma \mathbf{c}}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma}$$

Ex. 4.16 — Dado O o circuncentro e H o ortocentro de um triângulo ΔABC, mostre que:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

2 VETORES EM COORDENADAS

No primeiro capítulo estudamos vetores de um ponto de vista totalmente geométrico. Apesar de úteis, principalmente do ponto de vista intuitivo, as definições geométricas acabam perdendo um pouco de seu poder quando nos deparamos com problemas mais complexos. Por isso é necessário que tenhamos em mãos uma representação algébrica, não apenas de vetores, mas de todo o espaço Euclidiano. Uma representação que nos permita fazer cálculos mais finos e assim facilitar o estudo de resultados mais complexos.

Os primeiros passos no sentido de encontrar tais representações já foram dados no capítulo anterior, ao estudarmos o conceito de base. Neste capítulo daremos continuidade a estas ideias e veremos como utilizar as propriedades geométricas estudadas até agora para encontrar representações algébricas não apenas para vetores, mas também para os pontos do espaço Euclidiano. Tais representações serão chamadas de *sistemas de coordenadas*, e serão o foco principal deste capítulo.

Antes de mais nada vamos tentar entender de maneira mais formal como se relacionam vetores e pontos no espaço, e como a representação de um pode ser facilmente traduzida para o outro.

Tomemos então o espaço Euclidiano ($\mathbb{E}^3$ ou $\mathbb{E}^2$). O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é "localizar" os pontos no espaço. Para isto precisaremos de um ponto qualquer para servir de referência. Fixemos então um ponto $O \in \mathbb{E}^3$ e chamemos este ponto de *origem*. Este será o ponto a partir do qual a posição de todos os outros pontos será medida ou, no caso de vetores, será o ponto inicial a partir do qual todos os vetores serão representados.

Tome agora um ponto P qualquer em $\mathbb{E}^3$(ou $\mathbb{E}^2$) e lembre-se que, fixado O, podemos escrever $P = O + \overrightarrow{OP}$. Ou seja, tendo o ponto O como referência relacionamos a cada ponto de $\mathbb{E}^3(\mathbb{E}^2)$ um vetor de $\mathbb{V}^3(V^2)$.

Se considerarmos $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$uma base de V^3, pelo teorema da base para o espaço temos que

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{f}_1 + v_2\mathbf{f}_2 + v_3\mathbf{f}_3.$$

Definimos assim uma bijeção entre os pontos de $\mathbb{E}^3(\mathbb{E}^2)$ e os vetores de $V^3(V^2)$: a cada vetor $\mathbf{v}$ podemos associar a tripla (v_1, v_2, v_3). Isso nos permite que a partir de qualquer representação algébrica dos vetores de $V^3(V^2)$ encontremos uma representação para os pontos do espaço Euclidiano. Na verdade, isso permite que utilizemos de forma indistinta a mesma representação para os dois objetos.

2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Motivado pelo exposto acima, definimos um **sistema de coordenadas no espaço** Σ como o conjunto três vetores linearmente independentes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ (ou seja uma base E para $\mathbb{V}^3$) e um ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas. Denotaremos o sistema de coordenadas por

$$\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O).$$

Observação 2.1 *Se quisermos definir um sistema de coordenadas para o plano precisaríamos apenas de uma base para $\mathbb{V}^2$, e esta seria composta então por apenas dois vetores. Um sistema de coordenadas para o plano teria então a forma $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, O)$. Os resultados a seguir serão apresentados apenas para $\mathbb{V}^3$, deixando implícita sua validade em $\mathbb{V}^2$.*

Se **i**, **j** e **k** forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ é chamado de **sistema cartesiano de coordenadas**. Daqui em diante as letras **i**, **j** e **k** sempre denotarão vetores ortonormais.

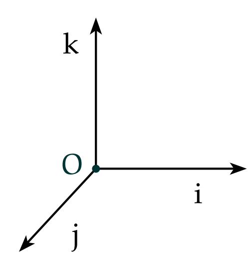


Figura 2.1: Sistema de Coordenadas Ortonormais

Um **sistema de coordenadas** cujos vetores não são ortogonais é dito **sistema de coordenadas oblíquo**.

Usando o que foi visto até agora é fácil estabelecer uma bijeção entre o conjuntos dos vetores tridimensionais $\mathbb{V}^3$ e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ usando o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$.

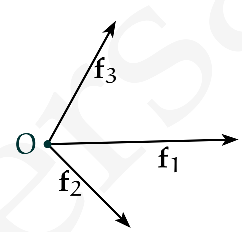


Figura 2.2: Sistema de Coordenadas Oblíquo

Para isso basta observar que do teorema da base para o espaço temos que

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{f}_1 + v_2 \mathbf{f}_2 + v_3 \mathbf{f}_3.$$

E desta forma associamos ao vetor v a tripla (v_1, v_2, v_3). A tripla anterior é denominada coordenadas do vetor **v** no sistema de coordenadas Σ (ou ainda na base $E = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$), e será denotado por:

$$\mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)_\Sigma .$$

De modo análogo podemos estabelecer uma bijeção entre o conjuntos dos pontos do espaço $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$ usando o sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$.

Para isso, dado P um ponto do espaço, seja $\overrightarrow{OP}$ o vetor ligando a origem ao ponto P. Esse vetor é chamado **vetor posição** de P. Pelo teorema da base para o espaço temos que

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + c\mathbf{f}_3.$$

Desta forma associamos ao ponto P a tripla (a, b, c).

Essa tripla é denominada coordenadas do ponto P no sistema de coordenadas Σ e será denotada por:

$$P : (a, b, c)_\Sigma ,$$

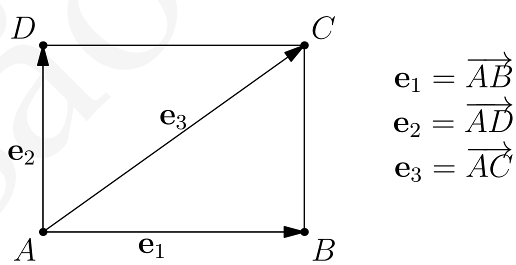
ou simplesmente $P : (a, b, c)$ quando estiver claro a que base estamos nos referindo.

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é chamado de **vetor posição** de P pois as coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ são as mesmas coordenadas do ponto final P.

Para tornar a notação mais simples, nem sempre mencionaremos o sistema de coordenadas adotado, nesse caso, exceto quando fizermos menção contrária, as coordenadas de todos os pontos e vetores serão dadas no mesmo sistema.

Exemplo 2.2 *Dado um retângulo* $ABCD$ *conforme a figura abaixo, vamos encontrar as coordenadas dos pontos* A, B, C, D *e dos vetores* $\overrightarrow{BD}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *nos seguintes sistemas de coordenadas:*

1. $\Sigma_1 = (A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
2. $\Sigma_2 = \left(B, \mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right)$



Solução: (1) Vamos primeiro escrever as coordenadas de A, B, C, D no sistema Σ_1. Para isso devemos escrever os vetores $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Por definição

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = e_2.$$

Temos também que

$$\overrightarrow{AC} = e_1 + e_2$$

e que $\overrightarrow{AA}$, sendo o vetor nulo, é igual a $0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$. Assim as coordenadas são

$$\begin{aligned}
A &: (0,0)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AA} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
B &: (1,0)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AB} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
C &: (1,1)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AC} = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\
D &: (0,1)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AD} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Para encontrar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ basta observar que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ \text{ e } \ \overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

e portanto temos

$$\overrightarrow{BD} : (-1,1)_{\Sigma_1}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1,1)_{\Sigma_1}$$

(2)Vamos agora escrever as coordenadas dos pontos A, B, C, D no sistema $\Sigma_2 = \left(A, \mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right)$.

Para tanto devemos escrever os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ como combinação de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sendo $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.

Observe que

$$\overrightarrow{BA} = -\mathbf{e}_1 = -2\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right) = -2\mathbf{f}_2,$$

$$\overrightarrow{BB} = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 \text{ (vetor nulo)},$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 = -1\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2.$$

E assim as coordenadas dos pontos são

$$\begin{aligned}
A &: (0,-2)_{\Sigma_2} \\
B &: (0,0)_{\Sigma_2} \\
C &: (-1,2)_{\Sigma_2} \\
D &: (1,-4)_{\Sigma_2}
\end{aligned}$$

Calculando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$, usando que $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ obtemos que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1,$$

e portanto vale

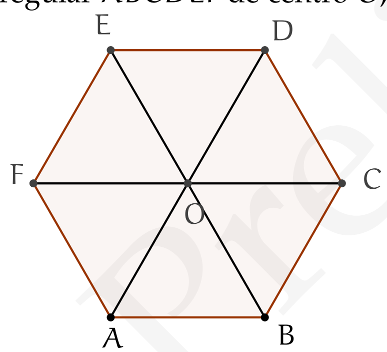
$$\overrightarrow{BD} : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 0)_{\Sigma_2}.$$

$\square$

Exercícios.

Ex. 1.1 — Dado o hexágono regular $ABCDEF$ de centro O, conforme a figura abaixo:



Determine as coordenadas dos pontos OA, B, C, D, E e F nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$

b) $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$

c) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$

d) $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

Ex. 1.2 — Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nos sistemas de coordenadas do exercício anterior:

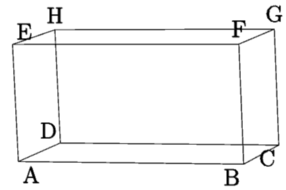
a) $\overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{BE}$

Ex. 1.3 — Dado o paralelogramo retângulo $ABCDEFGH$ abaixo. Sejam $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $e_3 = AF$, $e_4 = AE$.



Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(A; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_3; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

f) $(A; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; \frac{1}{2}\mathbf{e}_2; \frac{1}{2}\mathbf{e}_3)$

Ex. 1.4 — Determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EH}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

a) $(A; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

b) $(A; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

c) $(H; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3)$

d) $(H; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_3)$

e) $(G; -\mathbf{e}_3; \frac{1}{2}\mathbf{e}_1; 3\mathbf{e}_3)$

2.1.1 Operações Vetoriais em Coordenadas

Agora que sabemos como representar vetores e pontos em coordenadas precisamos saber como operar com estas representações. A proposição abaixo nos diz como as operações com pontos e vetores vistas no capítulo anterior podem ser traduzidas para a representação que acabamos de apresentar.

Proposição 2.3 *Se* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ *e* $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ *então:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_\Sigma$
2. $\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_\Sigma$
3. $P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$

Demonstração:

1. Dado um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$, como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{v} &= b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 + b_3\mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

E logo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3 + b_1\mathbf{f}_1 + b_2\mathbf{f}_2 + b_3\mathbf{f}_3 \\ &= = (a_1 + b_1)\mathbf{f}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{f}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

E desta forma as coordenadas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no sistema de coordenadas Σ são

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

2. Como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3$$

Desta forma temos que

$$\lambda\mathbf{u} = \lambda\left(a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + a_3\mathbf{f}_3\right) \tag{2.1}$$

$$= \lambda a_1\mathbf{f}_1 + \lambda a_2\mathbf{f}_2 + \lambda a_3\mathbf{f}_3 \tag{2.2}$$

E consequentemente:

$$\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Fica como exercício para o leitor.

$\square$

Exemplo 2.4 *Dados os pontos* $A : (1, 3, 2)$, $B : (1, 1, 1)$ *e* $C : (1, 1, 0)$ *determine as coordenadas*

1. *dos vetores* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$
2. *do vetor* $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
3. *do ponto* $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Solução:

$$\overrightarrow{AB} : (1-1, 1-3, 1-2) = (0, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} : (1-1, 1-1, 0-1) = (0, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (0, -2, -1) + \frac{1}{3}(0, 0, -1) = (0, -2, -1 - \frac{1}{3}) = (0, -2, -\frac{4}{3})$$

$$C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, -2, -1) = (1, 0, -\frac{1}{2})$$

$\square$

Exemplo 2.5 *Achar as coordenadas de um vetor ligando dois pontos num sistema de coordenadas* $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$

Solução:

Resumindo o que queremos é, dado $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$, encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Temos pela definição de subtração de vetores que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Logo como $\overrightarrow{OP_1} = x_1\mathbf{f}_1 + y_1\mathbf{f}_2 + z_1\mathbf{f}_3$ e $\overrightarrow{OP_2} = x_2\mathbf{f}_1 + y_2\mathbf{f}_2 + z_2\mathbf{f}_3$ e assim

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{f}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{f}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{f}_3$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$\square$

Exemplo 2.6 *Achar o ponto médio* $M = (x, y, z)$ *de um segmento com ponto inicial* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, *num sistema de coordenadas* $\Sigma = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, O)$

Solução: Primeiro vemos que $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\overrightarrow{P_1M}$ já que possuem o mesmo sentido e $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$ é duas vezes $\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|$.

Assim

$$(x_2 - x_1)\mathbf{f}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{f}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{f}_3 = 2(x - x_1)\mathbf{f}_1 + 2(y - y_1)\mathbf{f}_2 + 2(z - z_1)\mathbf{f}_3$$

o que implica que

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 2(x - x_1) \\ y_2 - y_1 &= 2(y - y_1) \\ z_2 - z_1 &= 2(z - z_1) \end{aligned}$$

e logo

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

e

$$M : \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

□

De posse da representação dos vetores em coordenadas podemos agora fornecer critérios para a dependência e a independência linear de vetores:

Teorema 2.7 *Os vetores* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} : (c_1, c_2, c_3)$ *são LI se e somente se*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração: Os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LI se o sistema:

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0 \tag{2.3}$$

Tiver somente a solução trivial $x = y = z = 0$

Em coordenadas podemos expressar a equação 2.4 como:

$$x\,(a_1, a_2, a_3) + y\,(b_1, b_2, b_3) + z\,(c_1, c_2, c_3) = 0 \tag{2.4}$$

E logo teremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer (ver Apêndice) o sistema anterior tem solução única se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

□

Exercícios.

Ex. 1.5 — Os pontos médios dos lados de um triângulo são $(2, 5)$, $(4, 2)$ e $(1, 1)$. Determine as coordenadas dos três vértices.

Ex. 1.6 — Dados dois pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q : (x_2, y_2, z_2)$, encontre a coordenada do ponto R, que se encontra sobre o segmento ligando os pontos P e Q e tal $d(R, Q) = \lambda d(R, P)$.

Ex. 1.7 — Prove utilizando coordenada que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

Ex. 1.8 — Prove que se $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ então:

$$P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$$

Ex. 1.9 — Determine quais dos conjuntos abaixo são L.I.

a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$
b) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$
c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

Ex. 1.10 — Exprima o vetor $\mathbf{w} : (1, 1)$ como combinação linear de $\mathbf{u} : (2, -1)$ e $\mathbf{v} : (1, -1)$.

Ex. 1.11 — Sejam $\mathbf{u} = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Mostre que todo vetor (c_1, c_2) pode ser expresso como combinação linear de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

Ex. 1.12 — Sejam $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$ vetores no espaço.

a) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (a, b, c)$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

b) Mostre que se $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ então as componentes de $\mathbf{z}$ na base formada por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são todas iguais a zero.

c) encontre as componentes de um vetor $\mathbf{z} = (1, 2, 3)$ na base formada por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$.

Ex. 1.13 — Mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LD se e somente se existe λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$$

Utilize esse critério para decidir se os vetores abaixo são LI ou LD:

a) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ $\quad \mathbf{v} = (4, 5, 6)$

b) $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ $\quad \mathbf{v} = (-2, 0, -6)$

c) $\mathbf{u} = (1, 2, 5)$ $\quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$

Ex. 1.14 — Utilizando o exercício anterior, mostre que dois vetores não nulos $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ são LI se e somente se ao menos um dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

é não nulo.

Ex. 1.15 — Determine m, n de modo que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sejam LD, onde:

a) $\mathbf{v} = (1, m, n + 1)\mathbf{w} = (m, n, 2)$

b) $\mathbf{v} = (1, m - 1, m)\mathbf{w} = (m, n, 4)$

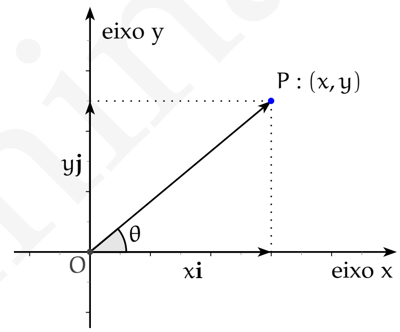
Ex. 1.16 — Dado $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base. Determine condições necessárias e suficientes sobre a, b de modo que os vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sejam LI, com $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dados por:

a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

b) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, w = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + (b^2 + 2a)\mathbf{e}_3$

Ex. 1.17 — Dado um tetraedro $ABCD$, Determine a coordenadas dos pontos médios dos lados AB, CD, BD, BC no sistema de coordenadas determinado pelo ponto A e pela base $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. (compare com o exemplo 3.4

2.2 BASES ORTONORMAIS E COORDENADAS CARTESIANAS



Vamos agora explorar algumas das vantagens de se trabalhar com as chamadas *bases ortonormais* ou, mais geralmente, com *sistemas de coordenadas cartesianas*.

Lembrando, uma base é dita ortonormal se seus vetores são unitários (possuem módulo 1) e perpendiculares dois a dois. Um sistema de coordenadas formado por uma base ortonormal é chamado de sistemas de coordenadas cartesianas. A partir deste ponto vamos fixar notação e utilizar $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ para denotar uma base ortonormal para o plano, e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ para o espaço.

Seja $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ uma base ortonormal para V^2, O um ponto no plano e $\Sigma = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ o sistema de coordenadas cartesianas determinado por eles. Dado agora um ponto P no plano considere o vetor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ e sua representação no sistema Σ dada por $\mathbf{r} : (x, y)$, ou seja:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Como a base considerada é ortonormal, segue diretamente do Teorema de Pitágoras que

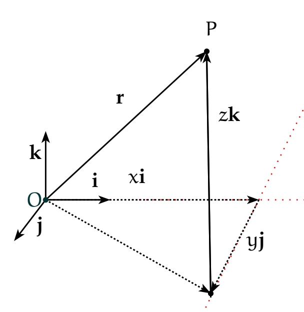
$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|x\mathbf{i}\|^2 + \|y\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2\,\|\mathbf{i}\|^2 + y^2\,\|\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Assim, se denotarmos por r o tamanho do vetor $\mathbf{r}$ temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A mesma ideia pode ser levada para o espaço, onde obtemos que se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Voltemos por momento para o caso planar e denote por θ o ângulo entre o eixo OX e o vetor $\mathbf{r}$. Neste caso, não é difícil ver que

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\operatorname{sen}(\theta).$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos também que a distância entre os pontos $P : (x_1, y_1)$ e $Q : (x_2, y_2)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

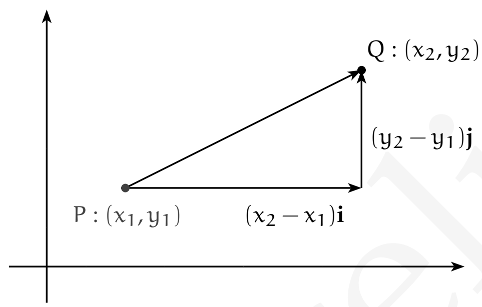


Figura 2.3: Distância entre dois pontos no plano.

E no caso tridimensional distância entre os pontos $P : (x_1, y_1, z_1)$ e $Q : (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:

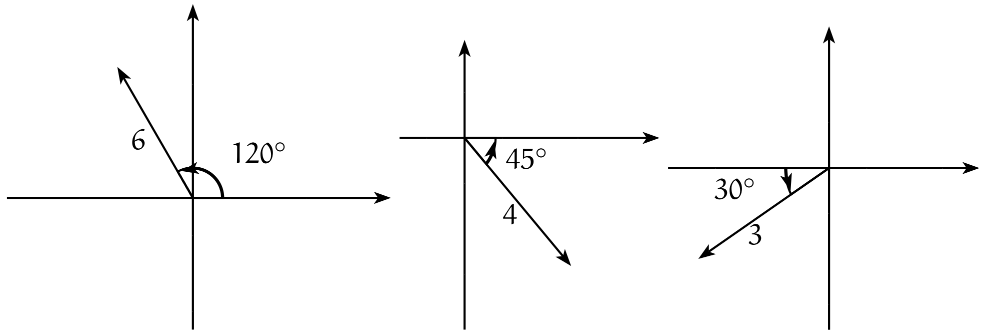
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Observação 2.8 *É importante observar que para realizarmos os cálculos acima foi absolutamente necessário que o sistema de coordenadas considerado fosse cartesiano. Podemos calcular as mesmas quantidades utilizando outros sistemas, mas as expressões ficam diferentes e muito mais complicadas.*

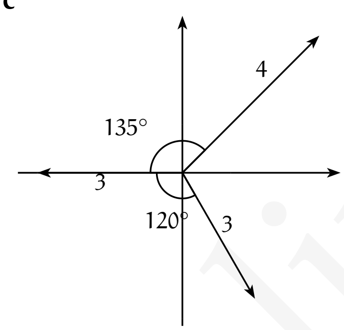
O par (r, θ) assim definido forma as chamadas **coordenadas polares** do ponto P no plano, e suas propriedades serão melhor exploradas no final deste capítulo.

Exercícios. Nos próximos exercícios, as coordenadas são expressas num sistema cartesiano.

Ex. 2.1 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



Ex. 2.2 — Dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e de $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$



Ex. 2.3 — Dados $A : (-3, 2)$, $B : (3, 5)$ e $C : (0, 3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:

a) A distância entre os pontos A e B;
b) A distância entre os pontos B e C;
c) O vetor $\overrightarrow{BA}$ e o vetor $\overrightarrow{AC}$;
d) O vetor $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
e) O ponto médio do segmento $\overline{AC}$
f) O ponto na reta $\overleftrightarrow{AB}$ que dista três vezes mais de A do que de B. (Duas respostas)

Ex. 2.4 — Dados $A : (4, 8, 11)$, $B : (-3, 1, 4)$ e $C : (2, 3, -3)$ desenhe o triângulo ABC e ache:

a) O comprimento dos três lados do triângulo;
b) Os pontos médios dos três lados do triângulo;
c) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$;
d) A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Porque essa soma deve ser zero?;
e) Os ângulos entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Dica: use a lei dos cossenos;
f) A área do triângulo;

g) O ponto D tal que $ABCD$ é um paralelogramo (Três respostas)

Ex. 2.5 — Qual o ponto do eixo x é equidistante dos pontos $A = (1, -3)$ e $B = (3; -1)$?

Ex. 2.6 — O triângulo ABC, com $A = (-a; 0)$ $B = (a; 0)$ $C = (0; y)$ é equilátero. Quais são os possíveis valores de y?

Ex. 2.7 — Três vértices de um retângulo são $(2, -1)$, $(7, -1)$ e $(7; 3)$: Determinar o quarto vértice e a área.

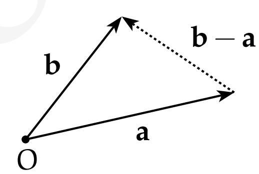
2.3 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES: PRODUTO ESCALAR

Na seção anteriores nos utilizamos de ângulos entre vetores (ou entre vetores e retas) para definir uma nova forma de representar pontos do espaço Euclidiano. Surge então a pergunta: como podemos utilizar os sistemas de coordenadas para determinar o ângulo entre dois vetores **u** e **v**?

O primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas cartesiano $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ e escrever os vetores neste sistema, ou seja:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$



Observe agora que pela lei dos cossenos

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos(\theta),$$

e portanto

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^3 + b_3^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos(\theta).$$

Assim
$$\cos(\theta) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

Ao termo $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ daremos o nome de **produto escalar** (ou de **produto interno**) de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ e denotaremos por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

> Resumindo:
> Se $\Sigma = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$ é um sistema de coordenadas cartesiano, $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, então
> $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
> e
> $$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

Observe também que, da definição acima, segue diretamente que dois vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares se e somente se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (por quê?).

Exemplo 2.9 *Achar o ângulo entre* $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ *e* $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Solução:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{12}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.26^{o} \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.10 *Os vetores* $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *e* $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ *são perpendiculares pois o produto interno entre eles é zero:*

$$(3, 4, 1) \cdot (2, -3, 6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 6 - 12 + 6 = 0$$

Exemplo 2.11 $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

Proposição 2.12 *O produto interno possui as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Demonstração: Se $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ e $\mathbf{w} : (c_1, c_2, c_3)$

1.
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

2.
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

3.
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant 0$$

4. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ então $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ e consequentemente $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
5. A demonstração desse item é deixada como exercício ao leitor.

□

Exemplo 2.13 *No quadrado* ABCD *tem se* $A = (3, -4)$ *e* $B = (5, 6)$. *Quais são as coordenadas dos vetores* C *e* D*?*

Solução: Denotando as coordenadas de C e D por $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - 5, c_2 - 6)$, $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2$ e$\overrightarrow{DA} = (d_1 - 3, d_2 + 4)$.

O vetor $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ logo o produto interno entre eles é nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Isto implica que $2(c_1 - 5) + 10(c_2 - 6) = 0$, que simplificando resulta em

$$2c_1 + 10c_2 = 70 \tag{2.5}$$

Temos ainda que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{104}$, logo

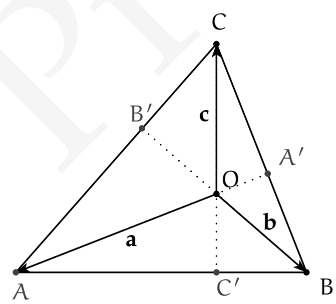
$$(c_1 - 5)^2 + (c_2 - 6)^2 = 104 \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) em (2.6) teremos que $(c_2 - 6)^2 = 4$ e logo $c_2 = 8$ ou $c_2 = 4$

Quando $c_2 = 8$ por (2.5) $c_1 = -5$ e quando $c_2 = 4$ então $c_1 = 15$.

O cálculo de D é análogo. □

Exemplo 2.14 *Mostre que as alturas de um triângulo são concorrentes.*



Solução: Dado um triângulo ΔABC, então as alturas BB' e CC' se interceptam num ponto O. Sejam então os vetores: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Como as retas OB e CA são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

De modo análogo, como as retas OC e AB são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

E logo $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$, ou seja,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Desta forma a reta OA é perpendicular ao lado BC, sendo assim a altura relativa ao vértice A. Essa reta intercepta as outras alturas no ponto O, e assim as três retas se interceptam num único ponto, que é denominado **ortocentro** do triângulo ΔABC.

$\square$

2.3.1 Projeção Ortogonal

Passemos agora a um novo problema. Dados dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, com $\mathbf{u}$ não nulo, queremos decompor o vetor $\mathbf{v}$ em dois vetores $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ tais que $\mathbf{p}$ é paralelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{q}$ é perpendicular a u, ou seja, queremos encontrar $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} = \lambda \mathbf{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Reescrevendo as condições acima temos que

$$(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

e logo

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \lambda \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Desta forma

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

e

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$$

Do mesmo modo podemos ver que o vetor $\mathbf{p}$ assim determinado é único. Tal vetor é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ e é denotado por $\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$.

Demostramos assim o seguinte resultado.

Proposição 2.15 *Dado* $\mathbf{u}$ *um vetor não nulo, e* $\mathbf{v}$ *um vetor qualquer, então a projeção ortogonal* $\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ *de* $\mathbf{v}$ *em* $\mathbf{u}$ *existe e é única.*

Exemplo 2.16 *Sejam* $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ *pontos no plano. Então a área do* $\triangle ABC$ *é dada por*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração: Temos que $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ e $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$. Além disso, é claro que $\mathbf{v} = (y_2 - y_3, x_3 - x_2)$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{BC}$.

A área do $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|h,$$

onde $h = |\text{Proj}_{\mathbf{v}}\overrightarrow{BA}| = \frac{|\langle\overrightarrow{BA},\mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$, é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC.

Como $\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, temos que $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{v}|$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{v}| &= |(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) + (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)| \\
&= |x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + x_2y_3 - x_3y_2| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

Exercícios.

Ex. 3.1 — Pela fórmula do cos ache os três ângulos do triângulo cujos vértices são

a) $(2, -1), (7, -1)$ e $(7, 3)$ (use uma calculadora)

b) $(4, 7, 11), (-3, 1, 4)$ e $(2, 3, -3)$

Ex. 3.2 — Se $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, encontre um vetor não nulo $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Ex. 3.3 — Se $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, encontre escalares a, b tais que $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ex. 3.4 — Prove que os vetores $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ são dois a dois perpendiculares.

Ex. 3.5 — Ache os três ângulos de um triângulo cujos vértices são $(3,1)$, $(5,-2)$ e $(6,3)$. Ache também a área do triângulo.

Ex. 3.6 — Dados vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ tais que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ com $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ e $\|\mathbf{c}\| = 7$. Calcule o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Ex. 3.7 — Prove que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right)$

Ex. 3.8 — Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.

Ex. 3.9 — Decomponha o vetor $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como a soma de dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_1$ paralelo ao vetor $\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_2$ ortogonal a este último.

Ex. 3.10 — Suponha que $\overrightarrow{AB}$ seja o diâmetro de um circulo e seja C outro ponto qualquer desse circulo. Mostre que os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são ortogonais.

Ex. 3.11 — Prove que:

a) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \lambda\mathbf{v} = \lambda \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$

b) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$

c) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}\left(\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\right) = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$

d) $\mathbf{v} \cdot \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w} = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

Ex. 3.12 — Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

Ex. 3.13 — Prove que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ e que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ se e somente se um vetor é múltiplo do outro (Desigualdade de Schwarz).

Ex. 3.14 — Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Desigualdade Triangular).

Ex. 3.15 — Mostre que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ se e somente se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Ex. 3.16 — Prove que se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ para todo vetor $\mathbf{v}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ex. 3.17 — Num triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre essa hipotenusa. Prove esse fato escolhendo um sistema de coordenadas no qual a hipotenusa esta sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.

Ex. 3.18 — Mostre que o ângulo entre as projeções $\mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$ e $\mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v}$ é igual ao ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2.4 VETOR PERPENDICULAR A DOIS VETORES DADOS: PRODUTO VETORIAL

Voltemos nossa atenção agora para um novo problema: dado dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como podemos encontrar um novo vetor $\mathbf{w}$ perpendicular aos dois vetores dados? Note que, ao contrário do que ocorre com a projeção, este problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor $\mathbf{w}$ satisfazendo as condições acima, qualquer vetor $\lambda\mathbf{w}$ também satisfará.

Passemos à solução. Como sempre, tomemos primeiro uma base ortonormal $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ e façamos $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Vamos denotar por $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor que queremos determinar. Como queremos que o vetor $\mathbf{w}$ seja perpendicular aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, precisamos então que $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{v}$ se $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Temos assim o seguinte sistema linear:

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

ou ainda

$$a_1x + a_2y = -a_3z$$

$$b_1x + b_2y = -b_3z$$

Pelo exercício 1.14 podemos supor sem perda de generalidade que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

e, usando a regra de Cramer, concluímos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3 z & a_2 \\ -b_3 z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 z \\ b_1 & -b_3 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Escolhendo

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

temos que

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Chamaremos o $\mathbf{w}$ de **produto vetorial** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e denotaremos por

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Um modo fácil de recordar da expressão do produto vetorial é através do seguinte determinante formal:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

onde $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

Antes de continuar listemos as propriedades do produto vetorial.

Teorema 2.17 *Dados os vetores* $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$ *o produto vetorial possui as seguintes propriedades:*

1. *Linearidade com relação ao primeiro termo:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
2. *Antisimetria* $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{u}$

3. *Produto misto* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

4. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2$

5. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta)$, *onde* θ *é o ângulo entre os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Demonstração: A demonstração dos três primeiros itens é direta e é deixada como exercícios:

Para demonstrarmos a quarta propriedade basta observar que

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 = \\
&= \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= \left(a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2\right) \\
&-a_1^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-a_2^2b_2^2-2a_2a_3b_2b_3-a_3^2b_3^2 \\
&= a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_1^2+ \\
&a_3^2b_2^2\,(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+a_1b_2-a_2b_1 \\
&= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 .
\end{aligned}$$

A quinta propriedade decorre facilmente da anterior, bastando para isso lembrar que

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cdot\cos^2(\theta)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cdot\cos^2(\theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\left(1-\cos^2(\theta)\right) = \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\operatorname{sen}^2(\theta)
\end{aligned}$$

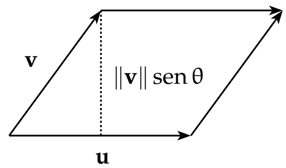
□

Vamos agora explorar algumas consequências geométricas do produto vetorial.

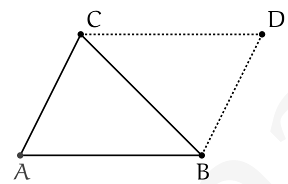
Área de um Paralelogramo e de um Triângulo Primeiro considere o paralelogramo determinado por dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como na figura abaixo

A altura do paralelogramo é dada por $\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta)$ e portanto, da propriedade 5 do produto vetorial, concluímos facilmente que sua área é dada por $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}(\theta) = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. Em resumo, mostramos que a área do paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é igual ao comprimento do produto vetorial destes vetores.

$$A = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$$



A partir da expressão anterior podemos encontrar uma expressão para a área de um triângulo ΔABC. Para isso considere o paralelogramo determinado pelos vetores AB e BC, como na figura abaixo. A diagonal BC desse paralelogramo divide este em dois triângulos de áreas iguais. Logo a área do triângulo será metade da área do paralelogramo:



$$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right\|$$

Volume de um Paralelepipedo A seguir vamos calcular o volume de um paralelepípedo, em função dos vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$.

Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto $V = A_b h$ da área A_b da base pela altura h. Como já vimos a área da base pode ser calculada por $A_b = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Já a altura é dada pela norma da projeção do vetor $\mathbf{w}$ sobre o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Como

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}),$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{w}\right\| &= \frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2}\,\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| \\
&= \frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}.
\end{aligned}$$

Segue portanto que

$$V = A_b h = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\,\frac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|\,.$$

Exercícios.

Ex. 4.1 — Calcule o produto vetorial entre

a) $7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i}-15\mathbf{j}-13\mathbf{k}$

b) $6\mathbf{i}-16\mathbf{j}-15\mathbf{k}$ e $3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

c) $3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ e $5\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

Ex. 4.2 — Se $\mathbf{u} = (3, 41)$, $\mathbf{v} =(2, 3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 3)$ encontre

a) $2\mathbf{u}{+}3\mathbf{v} - 7\mathbf{w}$

b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

c) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$,

d) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$,

e) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$,

f) $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$

g) $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$

Ex. 4.3 — Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. Expresse o vetor $\mathbf{a} = (2, 2, 3)$ como combinação de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}$;

Ex. 4.4 — Dado $\mathbf{b} = 1, 2, 1$, determine $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a}$ é ortogonal ao eixo z e

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (1, -1, 1)$$

Ex. 4.5 — Determine $\mathbf{v} = (x, y, z)$ tal que

$$(x, y, z)\times(1, 2, -1) = (1, 1, 3)$$

$(x, y, z) \cdot (3, 1, 1) = 3$

Ex. 4.6 — Sejam os pontos $P = (1, 1, 2)$, $Q = (1, 2, 0)$ e $R = (3, 1, 2)$ pontos médios dos lados de um triângulo ΔABC. Calcule a área do triângulo ΔABC.

Ex. 4.7 — Prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Ex. 4.8 — Prove que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Ex. 4.9 — Prove que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Ex. 4.10 — Prove que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Ex. 4.11 — Prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pode ser escrito como o determinante formal

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ex. 4.12 — Prove que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ de dois modos: primeiro calculando diretamente e segundo utilizando as propriedades de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

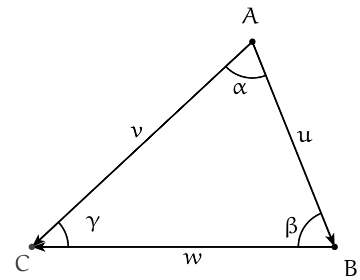
Ex. 4.13 — Mostre que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos se, e somente se, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ex. 4.14 — Prove que em geral $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ pode ser escrito como o determinante da matriz que tem como componentes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ex. 4.15 — Dado um triângulo ΔABC como na figura a seguir.Usando o produto vetorial demonstre a lei dos senos:

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\beta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|}$$



Ex. 4.16 — Dado um triângulo ΔABC e O um ponto qualquer, mostre que a área A do triângulo ΔABC é:

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\|$$

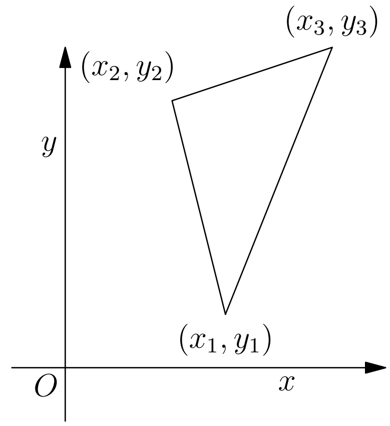
sendo $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$

2.5 ESCOLHA DO SISTEMA DE COORDENADAS

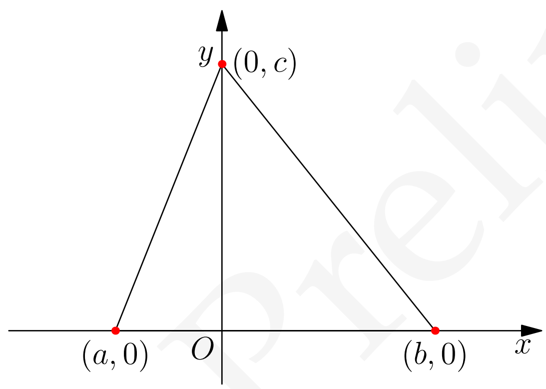
Um sistema de coordenadas cartesianas do plano pode ser escolhido tomando qualquer ponto O como origem e qualquer duas retas perpendiculares como os eixos. Em geral resultados geométricos não dependem de como escolhemos nosso sistema de coordenadas, mas fazendo a escolha correta podemos simplificar significativamente o resolução de um problema. É possível, por exemplo, fazer com que as coordenadas dos vértices de certas figuras geométricas fiquem mais simples, aumentando a quantidade zeros em suas coordenadas, simplificando assim a manipulação algébrica.

Considere, por exemplo, um triângulo ΔABC. Vamos descrever esse triângulo através de coordenadas $A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2)$ e $C : (x_3, y_3)$ em um sistema de coordenadas Σ.

Consideraremos o seguinte sistema de coordenadas: escolha como eixo x a reta AB, e como eixo y a reta perpendicular a AB passando por C. Determine o sistema de coordenadas colocando a origem no ponto O dado pela intersecção dos dois eixos, e escolhendo uma base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ formada por vetores unitários paralelos a estes eixos. Neste sistema o vértice A tem então coordenadas do tipo $(a, 0)$ e o ponto B coordenadas do



tipo $(b, 0)$, já que ambos estão sobre o eixo x. Já o ponto C, que está posicionado sobre o eixo y, tem coordenadas do tipo $(0, c)$.



Veja que com a escolha adequada do sistema de coordenadas conseguimos reduzir o número de variáveis de 6 para apenas 3.

A seguir apresentamos exemplos onde a escolha de um sistema de coordenadas adequado facilita a demonstração de propriedades geométricas. Você consegue demonstrar estas propriedades usando um sistema de coordenadas arbitrário?

Exemplo 2.18 *Se um triângulo é isósceles, as medianas dos dois lados de mesmo comprimento possuem o mesmo tamanho.*

Solução: Consideremos o mesmo sistema de coordenadas descrito acima. Neste sistema temos $A : (a, 0)$, $B : (b, 0)$ e $C : (0, c)$.

Supondo que segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ possuem o mesmo comprimento, concluímos que

$$\sqrt{a^2+c^2} = |\overline{CA}| = |\overline{CB}| = \sqrt{b^2+c^2}$$

e logo $a^2 = b^2$. Segue que $a = b$ ou $a = -b$. Se $a = b$ não temos um triângulo já que dois vértices coincidem, de onde segue que $a = -b$.

Seja M_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo exemplo 2.6 temos que as coordenadas de $M_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Analogamente, o ponto médio M_2 de $\overline{BC}$ tem coordenadas $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Como a mediana de $\overline{CA}$ é dada pelo segmento $\overline{BM_1}$ e a de $\overline{CB}$ é dada pelo segmento $\overline{AM_2}$, segue que

$$|\overline{BM_1}| = \left\|(-\frac{b}{2}, \frac{c}{2}) - (b, 0)\right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e

$$|\overline{AM_2}| = \left\|(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}) - (-b, 0)\right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

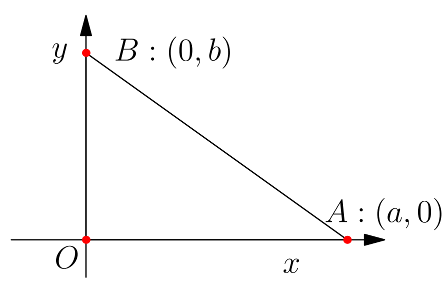
e as medianas relativas aos vértices A e B possuem o mesmo tamanho. □

Exemplo 2.19 *Num triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.*

Solução: Para um triângulo retângulo ΔABC com hipotenusa AB um sistema de coordenadas adequado é o que toma como origem o vértice $C = O$ e como eixos as retas que ligam C a A e C a B.

Neste Sistema de coordenadas temos que $A : (a, 0)$, $B : (0, b)$ e $C : (0, 0)$. O comprimento da hipotenusa é

$$|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$$

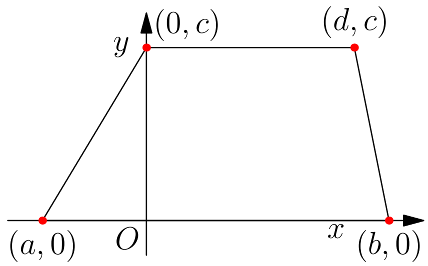


Já o ponto médio M da hipotenusa tem coordenadas $M : \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ e logo o comprimento da mediana é

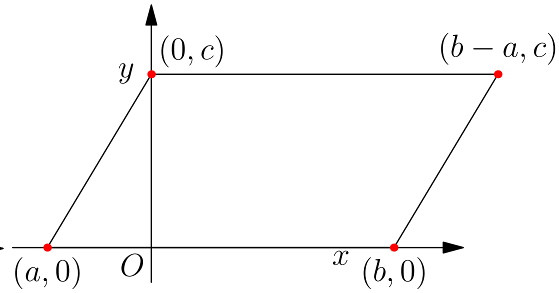
$$|CM| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}|AB|$$

Logo temos que a distância do vértice C a M é metade da distância entre os vértices A e B, e logo M está equidistante dos três vértices. □

Exercícios.



trapézio



paralelogramo

Ex. 5.1 — Mostrar que $(-5, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$ são os vértices de um triângulo isósceles e achar sua área.

Ex. 5.2 — Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, com $a \neq 0$. Ache x de modo que o ponto $C = (x, x)$ seja o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

Ex. 5.3 — Dado um paralelogramo $ABCD$, escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ (ou seja, a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

Ex. 5.4 — Num triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre essa hipotenusa. Prove esse fato escolhendo um sistema de coordenadas no qual a hipotenusa esta sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.

Ex. 5.5 — Se no triângulo ABC as medianas que partem dos vértices A e B são iguais, prove que os lados AC e BC são iguais, logo o triângulo é isósceles.

Ex. 5.6 — Enunciar e demonstrar a recíproca do teorema de Pitágoras.

Ex. 5.7 — Se as diagonais de um paralelogramo são iguais então ele é um retângulo.

Ex. 5.8 — Determine a soma dos quadrados (dos comprimentos) das medianas do triângulo ΔABC, sabendo que os lados do δABC medem a, b e c.

2.6 O PROBLEMA DO LUGAR GEOMÉTRICO

Até este ponto estudamos como representar algebricamente o espaço euclidiano, e como podemos usar tais representações na resolução de alguns problemas geométricos. Nesta seção vamos dar uma passo além, e iniciar os estudos sobre um dos problemas fundamentais da geometria analítica: o problema do lugar geométrico. Em poucas palavras, dada uma figura ou condição geométrica queremos determinar uma equação ou condições algébrica que a represente. Ou ainda, de modo contrário, dada uma equação ou condição algébrica determinar sua representação geométrica.

O lugar geométrico de uma equação Dada uma equação (por simplicidade, em duas x, y ou três variáveis x, y, z)

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x, y, z) = 0 \tag{2.7}$$

cada par ou tripla de números reais que satisfizer a equação acima é dito solução da equação e o conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem a equação (2.7) acima é chamado de **lugar geométrico da equação**.

Definição 2.20 O conjunto dos pares (ou triplas) que satisfazem a equação 2.7 é denominado o **lugar geométrico da equação**2.7.

É importante ressaltar que o lugar geométrico, como definido acima, depende do sistema de coordenados escolhidos. Em outras palavras, uma certa figura ou condição geométrica pode ser descrita algebricamente de várias formas distintas, dependendo, dentre outros fatores, do sistema de coordenadas escolhido. Por esta razão, buscaremos dentre as possíveis representações aquela que proporcione a maior simplicidade algébrica.

Durante esse processo (e em vários outros) podemos substituir uma certa equação por outra que possua as mesmas soluções, ou seja, que defina o mesmo lugar geométrico. Neste sentido, duas **equações algébricas** são ditas **equivalentes** se definem o mesmo lugar geométrico.

Exemplo 2.21 *Analisemos a equação*

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Observe que tomando $C = (2, 3)$ *a distância* r *de um ponto qualquer* (x, y) *no plano euclidiano até* C *é dada por*

$$r = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2},$$

ou de modo equivalente

$$r^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2.$$

Deste modo vemos que um ponto (x, y) *no plano satisfaz a equação acima se, e somente se, sua distância para o ponto* $C : (2, 3)$ *for igual a* 5*.*

Em outras palavras, escolhido o sistema de coordenadas descrito acima, o lugar geométrico da equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é um círculo de raio r *e centro no ponto de coordenadas* (a, b)*.*

Exemplo 2.22 *Generalizando o exemplo anterior, um circulo de centro* C *e raio* r *é definido como o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é igual a* r*. Esta é a condição geométrica que descreve o círculo. Busquemos agora uma representação algébrica. Se escolhermos um sistema de coordenadas cartesiano no qual* $C : (a, b)$*, então todo ponto* $P : (x, y)$ *no círculo deve satisfazer*

$$|CP| = r,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

ou ainda a equação algébrica equivalente

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

É importante observar que um ponto pertence ao círculo (ou seja esse ponto dista r do centro) se e somente se satisfizer a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

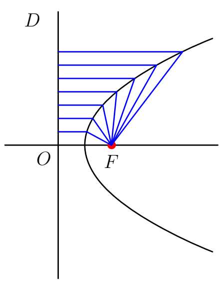
Em geral, sempre que tivermos este tipo de relação entre uma curva e uma equação diremos que esta é a *equação da curva*.

Definição 2.23 Diremos que uma equação $f(x, y) = 0$ é a equação de um dado lugar geométrico se todo ponto que satisfaz a equação pertence ao lugar geométrico e todo ponto que pertence ao lugar geométrico satisfaz a equação.

Exemplo 2.24 *Dado um sistema de coordenadas cartesiano, lugar geométrico conhecido descrito pelo eixo* x *é formado por todos os pontos cuja segunda coordenada* (y) *é zero, ou seja, a equação do eixo* x *é* $y = 0$*.*

Exemplo 2.25 *Como vimos* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ *é a equação do círculo de raio* r *e centro em* $P : (a, b)$.

Exemplo 2.26 *Determinar a equação do lugar geométrico formado por todos os pontos cuja a distãncia a um ponto fixo*F *é igual a distância a uma reta fixa* d.



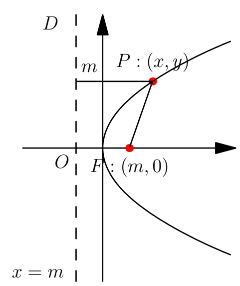
Solução: Dados uma reta fixa d, chamada **diretriz**, e um ponto fixo F chamado foco, a **parábola** é o conjunto dos pontos P equidistantes do foco e da diretriz, ou seja, o ponto P tal que

$$\left\|\overrightarrow{PD}\right\| = \left\|\overrightarrow{PF}\right\|,$$

onde D é o ponto de d mais próximo de P.

A reta passando por F perpendicular a d é chamada **eixo da parábola.** O ponto de intersecção entre o eixo da parábola e a parábola é chamado **vértice** da parábola. Observe que o vértice está localizado na metade da distância do foco a diretriz.

Escolheremos como sistema de coordenadas os eixos formados pelo eixo da parábola e a reta passando pelo vértice da parábola, perpendicular ao eixo. Essa última reta é paralela a diretriz da parábola.



Seja $2m$ a distância entre o foco e a diretriz d. No sistema de coordenadas que adotamos F tem coordenadas $(m, 0)$ e a equação da diretriz é $x = -m$. Como P satisfaz $\left\|\overrightarrow{PD}\right\| = \left\|\overrightarrow{PF}\right\|$ temos que

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} = x + m.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade concluímos que

$$\begin{aligned} (x-m)^2 + y^2 &= (x+m)^2 \\ m^2 - 2mx + x^2 + y^2 &= \left(m^2 + 2mx + x^2\right) \\ y^2 &= 4mx \end{aligned}$$

é a equação satisfeita pelos pontos da parábola neste sistema de coordenadas. □

Intersecção Dadas duas equações

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0,$$

os pontos que pertencem ao lugar geométrico de ambas as equações é chamados de pontos de intersecção. Analiticamente as coordenadas de tal ponto satisfazem ambas as equações.

A intersecção de duas equações pode ser vazia, neste caso diremos que os seus lugares geométrico não se interceptam.

Exemplo 2.27 *Determinar analítica e graficamente os pontos de intersecção de*

$$x - 12 = 0$$
$$y^2 - 3x = 0$$

Solução: Primeiro observemos que $x - 12 = 0$ é a equação de uma reta paralela ao eixo y, enquanto $y^2 - 3x = 0$ é a equação de uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y. Assim o conjunto dos pontos de intersecção dos dois lugares geométricos é formado de no máximo dois pontos.

Analiticamente, concluímos da primeira equação que todo ponto de intersecção (x, y) deve ter $x = 12$. Substituindo na equação da parábola encontramos que

$$y^2 = 36,$$

e portanto

$$y = \pm 6.$$

De modo que os pontos de intersecção são $(12, 6)$ e $(12, -6)$. □

Exercícios.

Ex. 6.1 — Escrever a equação do lugar geométrico dos pontos no plano que satisfazem a condição:

a) O conjunto dos pontos P tal que P está sempre duas unidades a esquerda do eixo Y

b) O conjunto dos pontos P tal que P dista sempre duas unidades do eixo X

c) O conjunto dos pontos P tal que a abscissa de P é igual ao inverso da sua ordenada

d) O conjunto dos pontos P tal que P está a distância igual do eixo x e do eixo y.

Ex. 6.2 — Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo de modo que a soma das distancias a dois pontos $F : (c, 0)$ e F':$(-c, O)$ é constante igual a $2a$.

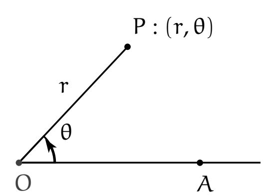
Ex. 6.3 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto no espaço que se move de modo que a soma das distancias a dois pontos $F : (c, 0, 0)$ e F':$(-c, 0, 0)$ é constante igual a $2a$.

Ex. 6.4 — Dados dois pontos dois pontos $F : (c, 0, 0)$ e F':$(-c, 0, 0)$, determinar a equação do lugar geométrico de um ponto P que se move no espaço de modo que

$$\left| \|PF\| - \|PF'\| \right| = 2a$$

Ex. 6.5 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo que a distância ao ponto $(1, 0, 0)$ é sempre igual a distância ao plano YZ.

2.7 COORDENADAS POLARES



Num sistema de coordenadas polares um ponto P é localizado no plano em relação a uma semi-reta $\overrightarrow{OA}$. A origem O dessa semi reta é denominada origem do sistema de coordenadas polares ou **polo** e a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ é dito **eixo polar**.

As coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas polares é um par (r, θ), onde r é a distância do ponto ao polo, isto é, $r = d(O, P)$ e θ é o ângulo orientado que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ faz com a semi-reta $\overrightarrow{OA}$. Claramente a posição do ponto fica bem determinada se conhecemos r e θ. O par (r, θ) é denominado**coordenadas polares** do ponto P, e neste caso escreveremos simplesmente $P : (r, \theta)$

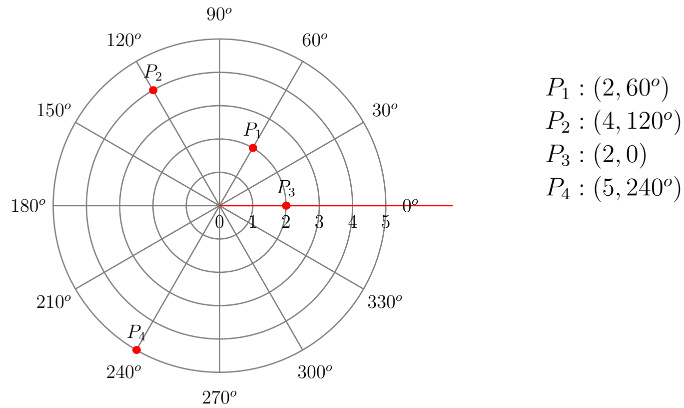
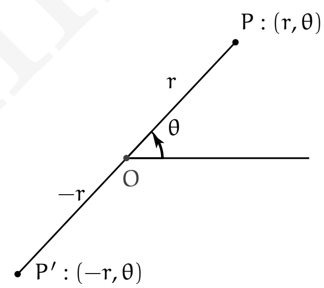


Figura 2.4: Coordenadas polares

Como θ é o ângulo orientado entre o eixo OA e a reta OP seus valores podem ser positivo ou negativo conforme a orientação no sentido anti-horário ou horário do ângulo.

Por outro lado, o raio r, sendo a distância de P a origem, é naturalmente um número real positivo, porém podemos estender seu significado de modo a termos raios negativos. Para isso convencionamos que o ponto $(-r, \theta)$ com $r > 0$ deve ser construído do seguinte modo: construímos uma semi-reta faz uma ângulo θ com o eixo polar e estendemos essa semi-reta. marcarmos o ponto $(-r, \theta)$ como sendo o ponto sobre a extensão da semi reta que dista r do polo O.

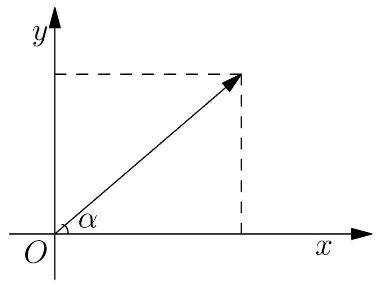


Uma diferença fundamental entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares é que em coordenadas polares um ponto P pode ser descrito por uma infinidade de coordenadas. Por exemplo, a origem O é descrita por todas as coordenadas da forma $(0, \theta)$., enquanto que um ponto $P : (r, \theta)$ distinto da origem é descrito por todas as coordenadas da forma $(r, \theta + 2\pi n)$ e $(-r, \theta + \pi(2n + 1))$.

Todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo e o angulo θ esteja entre $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Denominamos esse par como o **conjunto principal de coordenadas polares** do ponto em questão.

A cada sistema de coordenadas polares podemos associar um sistema cartesiano escolhendo como a origem o polo, o eixo x como o eixo polar e o eixo y como a reta perpendicular ao eixo polar passando pela origem. Esse sistema de coordenadas é chamado **sistema cartesiano associado** . Quando, ao tratarmos de coordenadas polares, nos referirmos as coordenadas x, y, eixos x ou y, etc. de um sistema cartesiano este sempre será o sistema cartesiano associado.

E fácil ver que as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas do sistemas associado se relacionam pelas igualdades:



$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Exemplo 2.28 *Determinar as coordenadas retangulares do ponto* P *cujas coordenadas polares são* $(3, 120^o)$

Solução: Neste caso $r = 3$ e $\theta = 120^o$ logo as coordenadas são:

$$x = r\cos(\theta) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \tag{2.8}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{2.9}$$

Ou seja, $P : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ □

Exemplo 2.29 *Determinar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são* $(1, -1)$.

Solução: Temos que $r = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$ e que $\theta = \mathrm{arctg}(-1)$ .Para $0 \leqslant \theta < 2\pi$. temos que $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Logo o conjunto principal de coordenadas do ponto é $\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Outras coordenadas possíveis para o ponto são $\left(1, \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$ e $\left(-1, \frac{7}{4}\pi + \pi(2\pi n + 1)\right)$.
□

Exemplo 2.30 *Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é*

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

Solução: A equação dada é equivalente a $r - r\cos\theta = 2$. Substituindo r e $r\cos\theta$ temos:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

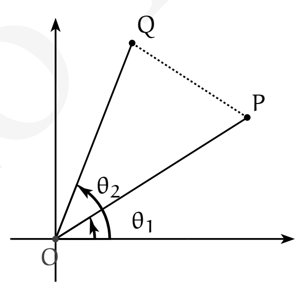
Transpondo x e elevando ao quadrado temos

$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

que simplifica para $y^2 = 4(x + 1)$ (uma parábola). □

Exemplo 2.31 *Mostre que a distância* d *entre os pontos* (r_1, θ_1) *e* (r_2, θ_2) *em coordenadas polares é*

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



Solução: Usando a lei dos cossenos temos:

$$\|PQ\|^2 = \|OP\|^2 + \|OQ\|^2 - 2\|OP\|^2\|OQ\|\cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad (2.10)$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad (2.11)$$

E consequentemente a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\|PQ\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$\square$

Exercícios.

Ex. 7.1 — Ache as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

a) $(0, 4)$

b) $(1, -\sqrt{3})$

c) $(-\sqrt{3}, -1)$

d) $(-3, 3)$

Ex. 7.2 — Ache as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são:

a) $(3, \pi/3)$

b) $(-5, \pi/4)$

c) $(2, \pi)$

d) $(4, 5\pi/6)$

Ex. 7.3 — Transforme as seguintes equações para coordenadas polares:

a) $y^2 + 4ax = 4a^2$

b) $y^2 = 4ax$

c) $x^2 + y^2 = 16$

d) $3x + 4y = 5$

e) $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$

Ex. 7.4 — Transforme as seguintes equações para coordenadas cartesianas:

a) $r = 4a\cos\theta$

b) $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

c) $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

d) $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{a}$

e) $\frac{1}{r} = 1 + e\cos(\theta)$

Ex. 7.5 — Prove que os pontos $(0, 0°)$, $(3, 90°)$ e $(3, 30°)$ formam um triângulo equilátero.

Ex. 7.6 — Mostre que a área A de um triângulo cujos vértices são o polo e (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} |r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)|$$

Ex. 7.7 — Utilizando a formula anterior, mostre que a área de um triângulo de vértices (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) e (r_3, θ_3) é

$$A = \frac{1}{2} (r_2 r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_1 r_3 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3))$$

2.7.1 Gráficos de curvas em coordenadas polares

Nesta seção vamos apresentar algumas estratégias para o traçado do gráfico de curvas $f(r, \theta) = 0$ em coordenadas polares.

A grande diferença para o traçado de curvas no sistema cartesiano é que em coordenadas polares um ponto pode admitir várias coordenadas diferentes. Esse fato deve ser levado em conta dentre outras coisas na determinação de intersecções e simetrias.

Uma curva $f(r, \theta) = 0$ admite algumas representações equivalentes, por exemplo se trocarmos r por $-r$ e θ por $\theta + \pi/2$ ou se trocarmos θ por $\theta + 2\pi n$. Equações que representam o mesmo lugar geométrico serão ditas equivalentes.

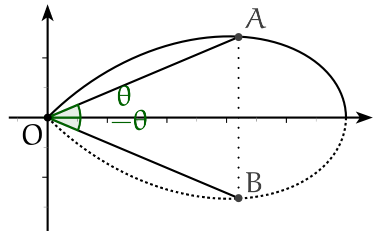
Intersecções As intersecções com o eixo x ocorrem quando $\theta = 2n\pi$ ou quando $\theta = (2n+1)\pi$. As intersecções com o eixo y ocorrem quando $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

A curva passa pelo polo se existe θ tal que $r = 0$.

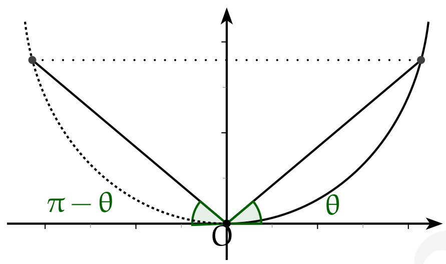
Simetrias Dizemos que uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo x se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos θ por $-\theta$.

Para curvas simétricas em relação ao eixo x, o conhecimento de seu gráfico no primeiro e segundo quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a reflexão no eixo x

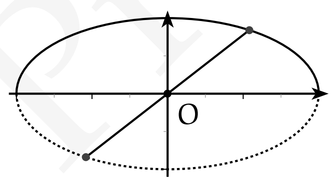
Uma curva é simétrica em coordenadas polares em relação ao eixo y se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos θ por $\pi - \theta$. Para curvas simétricas em relação ao eixo y, o conhecimento de



seu gráfico no primeiro e quarto quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a reflexão no eixo y.



Finalmente, uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao polo se a equação da curva permanece sem modificação ou é modificada para uma equivalente quando trocamos r por $-r$. Para curvas simétricas em relação ao polo , o conhecimento de seu gráfico no primeiro e segundo quadrante nos permite obter o seu gráfico nos outros quadrantes, fazendo a inversão em relação ao polo.



Periodicidade Dada uma curva em coordenadas polares descrita como

$$r - f(\theta) = 0$$

ela será periódica se existir um número real $a \geqslant 0$ tal que $f(\theta + a) = f(\theta)$ para todo θ.

Para uma curva periódica basta traçarmos seu comportamento para valores de θ entre 0 a a, pois para valores maiores de a a curva repete o comportamento dos valores menores de a.

Exemplo 2.32 *Traçar a curva cuja equação é*

$$r = 2(1 - \cos\theta)$$

Solução: Começamos observando que essa curva é periódica com período 2π. Ela passa no polo quando $1 - \cos\theta = 0$ ou seja quando $\theta = 0\ (+2n\pi)$

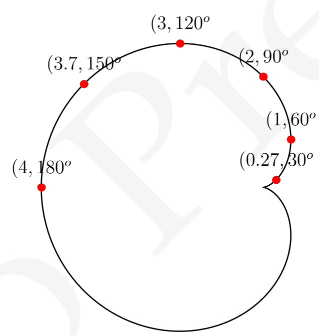
Se substituirmos θ por $-\theta$ temos que a equação permanece inalterada pois $\cos(-\theta) = \cos(\theta$. Logo essa curva é simétrica em relação ao eixo x.

Temos também que a curva é limitada pois $2(1 - \cos\theta) \leqslant 4$ já que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ e o máximo é atingido quando $\cos\theta = -1$ ou seja quando $\theta = (2n+1)\pi$.

Finalmente, atribuindo alguns valores para θ temos:

θ	$r(\theta) = 2(1 - \cos\theta)$
0	$r(0) = 0$
$\pi/6$	$r(\pi/6) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.26795$
$\pi/4$	$r(\pi/4) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.58579$
$\pi/3$	$r(\pi/3) = 1$
$\pi/2$	$r(\pi/2) = 2$
$3\pi/4$	$r(3\pi/4) = \sqrt{2} + 2 \approx 3.4142$
π	$r(\pi) = 4$

Traçando os pontos e utilizando as simetrias temos que o gráfico da curva é:



□

Exemplo 2.33 *Esboçe o gráfico da curva descrita pela equação* $r^2 = 4\cos(2\theta)$

Solução: A curva passa no polo quando $4\cos(2\theta) = 0$, ou seja, quando $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

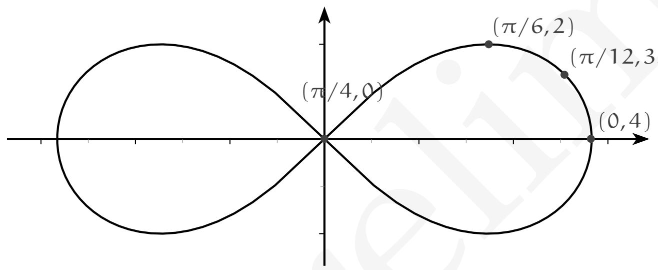
Substituindo θ por $-\theta$ temos que a equação permanece inalterada pois $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Logo ela é simétrica em relação ao eixo x. Esta curva também é simétrica em relação ao eixo y e em relação ao polo.

A curva é limitada pois $4\cos(2\theta) \leqslant 4$ já que $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ e o máximo é atingido quando $\cos(2\theta) = +1$ ou seja quando $\theta = n\pi$.

Veja que para θ entre $\pi/4$ e $3\pi/4$, $4\cos(2\theta)$ é negativo e como r^2 é positivo, a curva não está definida nesses intervalos.

Como a curva possui as simetrias acima basta tomarmos valores entre 0 e $\pi/4$. Atribuindo alguns valores para θ temos:

θ	$r(\theta) = 4\cos(2\theta)$
0	$r(0) = 4$
$\pi/12$	$r(\pi/12) = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$
$\pi/6$	$r(\pi/6) = 2$
$\pi/4$	$r(\pi/4) = 0$



$\square$

Exercícios.

Ex. 7.8 — Desenhe a curva cuja equação é:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

b) $r = 2\sec\theta$

c) $r = a\cos\theta$

d) $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$

e) $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ (cardioide)

f) $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$ (lemniscata)

g) $r\theta = a$ (espiral hiperbólica)

h) $r = e^\theta$

Ex. 7.9 — Determinar analiticamente e graficamente os pontos de intersecção das curvas

a) $r = a\theta$ com $a \neq 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ e $r = 1$

c) $r\cos\theta = 4$ e $r\,\text{sen}\,\theta = 4$

Ex. 7.10 — Determine o perímetro do quadrilátero cujos vértices são $(0, 19^o)$, $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ e $(3, 0)$

Ex. 7.11 — Mostre que a equação de uma reta que passa pelo polo é da forma

$$\theta = k$$

Ex. 7.12 — Mostre que todos os pontos da reta $x\cos\omega + y\,\text{sen}\,\omega - p = 0$ satisfazem a equação $r\cos(\theta - \omega) = p$.

Ex. 7.13 — Reescreva as seguintes equações em coordenadas cartesianas, então identifique e desenhe a curva

a) $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

b) $r + 6\,\text{sen}\,\theta = 0$

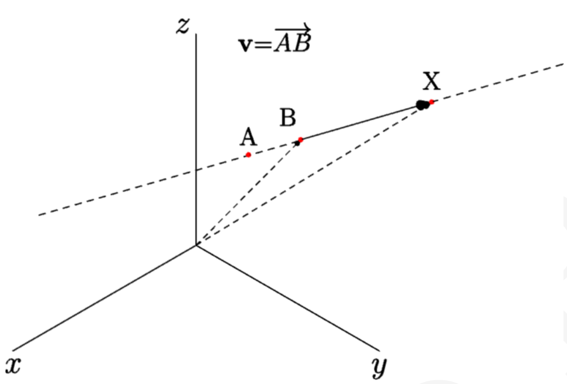
c) $r^2 - 3r + 2 = 0$

3 RETAS E PLANOS

Dando continuidade ao nosso estudo sobre lugares geométricos e suas equações, vamos nos concentrar agora no estudo de dois dos mais básicos e impotantes elementos geométricos da geometria: retas e planos.

Para isto, durante todo este capítulo utilizaremos um sistema de coordenadas cartesiano $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$.

3.1 EQUAÇÕES DA RETA



Um dos postulados da geometria Euclidiana nos diz que, dados dois pontos no espaço existe uma única reta contendo estes pontos. Isso nos leva ao seguinte problema: dados dois pontos A e B, determinar a equação da reta r que passa por estes dois pontos.

Para isto, observe que dado um ponto X em r, o vetor $\overrightarrow{AX}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, e portanto existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$. Assim, temos que

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + t\overrightarrow{AB},$$

e considerando $A : (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, vemos que um ponto $X : (x, y, z)$ pertence a reta r se e somente se $\overrightarrow{AX} = \mathbf{v}t$, ou ainda

$$r : X = A + \mathbf{v}t. \tag{3.1}$$

Expandindo obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t, \tag{3.2}$$

ou de forma mais simplificada:

$$r : \begin{cases} x = a + v_1 t \\ y = b + v_2 t \\ z = c + v_3 t \end{cases} \tag{3.3}$$

A equação 3.1 é conhecida como equação vetorial da reta r, e nestas condições o ponto A é chamado **ponto inicial** e o vetor $\mathbf{v}$ é dito **vetor diretor** da reta reta r. As equações em 3.3 são chamadas as equações paramétricas da reta r.

Heuristicamente, pensando no parâmetro t como tempo, podemos entender esta equação como a trajetória de um ponto que se move no espaço tendo o ponto A como o ponto inicial e o vetor $\mathbf{v}$ como a velocidade, e assim para cada valor de t obtemos um ponto no espaço.

Outra forma de representar a reta r pode ser obtida ao isolarmos o parâmetro t nas equações paramétricas. Assim, se em 3.3 tivermos $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t e obter

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3},$$

chamadas de equações da reta r na forma simétrica.

É importante observar que a equação de uma reta, em qualquer uma de suas formas, não é única. De fato, as equações dependem fundamentalmente da escolha do ponto inicial e do vetor diretor, gerando assim uma infinidade de equações para representar um mesma reta. Para entender esta afirmativa, consideremos uma reta $r : X = A + \mathbf{v}t$. Escolhendo um ponto B em r, podemos trocar o ponto inicial por B e assim representar r por $r : X = B + \mathbf{v}t$. Do mesmo modo, trocando o vetor diretor $\mathbf{v}$ por outro vetor $\mathbf{v}'$ paralelo, obtemos que $X = A + \mathbf{v}'t$ é também uma equação vetorial para r (veja exercício 1.1).

Exemplo 3.1 *Encontre as equações da reta que passa pelos pontos* $A : (0, 1, 1)$ *e* $B : (1, 3, 0)$.

Solução: Escolhendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} : (1, 2, -1)$ como vetor diretor e A como ponto inicial obtemos a equação vetorial

$$r : X = A + \mathbf{v}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

As equações paramétricas ficam então $x = t, y = 1 + 2t, z = 1 - t$.

As equações simétricas para essa reta são obtidas isolando o parâmetro t nas equações anteriores, ou seja,

$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

□

Exemplo 3.2 *Dada a reta r de equação paramétricas $r : X = (1,3,2) + (1,1,2)t$.*

1. *Encontre três pontos pertencentes a essa reta.*
2. *Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o ponto inicial seja distinto.*
3. *Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o vetor diretor seja distinto*

Solução:

1. Claramente o ponto $(1,3,2)$ pertence a essa reta. Para obter outros pontos desta reta bastan que escolhamos valores distintos para o parâmetro t. Assim, se $t = 1$ temos que $(1,3,2) + (1,1,2) = (2,4,4)$ pertence a reta. E tomando $t = -2$ temos que $(1,3,2) - 2(1,1,2) = (-1,1,-2)$ pertence a reta.
2. Substituindo o ponto inicial por outro ponto pertencente a reta obtemos equações com as propriedades exigidas. Escolhendo, por exemplo, o ponto $(-1,1,-2)$ obtemos a equação vetorial
$$r : X = (-1,1,-2) + (1,1,2)t.$$
3. Substituindo o vetor diretor por um de seus múltiplos não nulos obtemos equações com as propriedades exigidas. Se, por exemplo, multiplicarmos o vetor diretor por $\frac{1}{2}$ encontramos a equação vetorial
$$r : (-1,1,-2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)t.$$

□

Exemplo 3.3 *Verifique se os pontos* $A : (4,1,5)$ *e* $B : (0,0,0)$ *pertencem a reta* $r : (1,1,2) + (1,0,1)t$.

Solução: Para que o ponto A pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(4,1,5) = (1,1,2) + (1,0,1)t$$

Ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 4 = 1 + t \\ 1 = 1 + 0t \\ 5 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

O sistema acima possui solução, $t = 3$, e logo o ponto A pertence à reta r.

De modo análogo, para que o ponto B pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0,0,0) = (1,1,2) + (1,0,1)t,$$

ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 1 + 0t \\ 0 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

Como sistema acima não possui solução, o ponto B não pertence à reta r.

□

Exemplo 3.4 *Identifique o lugar geométrico dado pelas equações*

$$\frac{2-3x}{7} = \frac{2y-2}{3} = \frac{5z-1}{2}$$

Solução: Dividindo os numeradores e os denominadores de cada fração pelo coeficiente das variáveis, obtemos

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = \frac{z - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Esta são as equações na forma simétrica de uma reta. E portanto o lugar geométrico é uma reta passando pelo ponto $(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5})$ com vetor diretor $(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})$. □

Exemplo 3.5 *Verifique se as retas* $r : X = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t$ *e* $s : X = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t$ *se interceptam.*

Solução: Para que um ponto P pertença simultaneamente as retas r e s, devem existir números reais t_1 e t_2 tais que

$$P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 \quad \text{e} \quad P = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2.$$

De onde encontramos que

$$(1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2$$

Resolvendo o sistema acima encontramos $t_1 = 2, t_2 = -3$. Como o sistema possui solução, concluímos que as retas r e s se interceptam.

Para determinar o ponto de intersecção substituímos $t \to t_1$ na equação $P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1$ e obtemos

$$P : ((3, 1, 3)).$$

É importante observar que para determinarmos se as retas interceptam, usamos parâmetros distintos para cada reta. Isso é fundamental, pois o ponto P apesar de pertencer a ambas as retas, é descrito em cada conjunto de equações por um valor distinto de t. □

Exercícios.

Ex. 1.1 — Dados $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ vetores não nulos paralelos, ou seja, $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}'$. Mostre que $X = A + \mathbf{v}t$ e $X = A + \mathbf{v}'t$ são equações vetoriais para a mesma reta. (Dica: Mostre que as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto sendo assim coincidentes).

Ex. 1.2 — Determine as equações na forma paramétrica e na forma simétricas das seguintes retas:

a) A reta que passa pelos pontos $A : (1, 4, -2)$ e $B : (0, 1, 1)$
b) A reta que passa pelos pontos $A : (1, 0, -2)$ e $B : (3, 1, 1)$
c) As retas que determinam os eixos x, y, z

d) A reta paralela ao eixo z que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$

e) A reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$

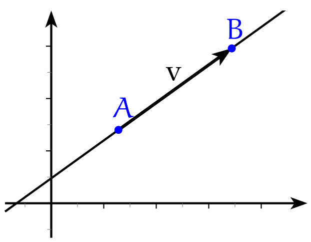
f) A reta paralela a reta $\frac{1-2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2z+1}{4}$ que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$

g) A reta paralela a reta

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$

3.1.1 Equações da reta no plano



No caso bidimensional, as equações que descrevem as linhas retas podem ser descritas de modo mais simplificado. Começamos observando que, de modo análogo ao caso tridimensional, escolhidos um ponto inicial A e um vetor diretor $\mathbf{v}$, esta reta pode ser descrita vetorialmente como:

$$r : X = A + \mathbf{v}t \tag{3.4}$$

Nesse caso a expressão em coordenadas fica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t \tag{3.5}$$

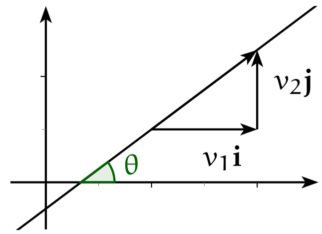
Se $v_1, v_2 \neq 0$ podemos escrever a forma simétrica das equações da reta no plano

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2},$$

ou ainda,

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x - a).$$

O número real $m = \frac{v_2}{v_1}$ é denominado **coeficiente angular** da reta r, e admite uma interpretação geométrica muito simples: o coeficiente angular é a tangente do ângulo angulo entre a reta e o eixo x. Com essa definição é fácil ver que, para as retas não



paralelas ao eixo y, podemos escolher o vetor diretor como $\mathbf{i}+m\mathbf{j}$, e assim obter equação canônica da reta bidimensional

$$y-b=m(x-a).$$

As retas paralelas aos eixos coordenados ($v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$) são especiais. Para as retas paralelas ao eixo y, ou seja, retas com vetor diretor $\mathbf{j}$, o coeficiente angular não está definido já que $m = \frac{v_2}{v_1}$. Para obter uma equação para este tipo de reta, basta observar que todos os pontos possuem a primeira coordenada (coordenada x) iguais. Ou seja, se a reta passa pelo ponto $A : (a, b)$ então todo ponto (x, y) em r é do tipo (a, y), e portanto sua equação será dada por $x = a$.

Do mesmo modo, se a reta é paralela ao eixo x e passa por um ponto $A : (a, b)$, então sua equação é dada por $y = b$.

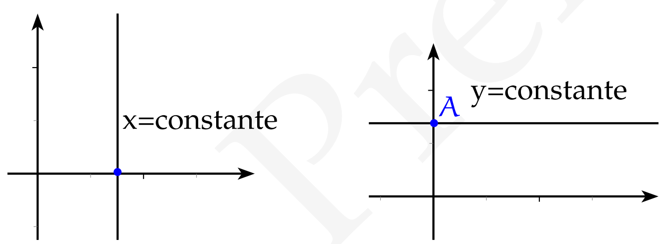


Figura 3.1: Retas paralelas aos eixos coordenados

Exemplo 3.6 *Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 1)$ e que faz ângulo de 60^o com o eixo x.*

Exemplo 3.7 *Seja r a reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Mostre que o coeficiente angular da reta r é:*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solução: O vetor diretor dessa reta é:

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

E consequentemente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. □

Exemplo 3.8 *Mostre que a equação da reta passando pelos pontos* $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$, *pode ser escrita como:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solução: Seja $P : (x, y)$ um ponto qualquer. O ponto P pertence a reta determinada pelos pontos A e B se e somente se A, B, P forem colineares, e o resultado segue. □

Exercícios.

Ex. 1.3 — Desenhe a reta que passa por $(-1, 3)$ e $(3, 0)$. Ache sua equação e onde ela intercepta os eixos.

Ex. 1.4 —

a) A reta que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, b)$ sendo ambos os pontos distintos da origem. Mostre que a equação dessa reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

b) Ache a equação da reta que passa a uma distância h da origem e cujo segmento de tamanho h forma um ângulo α como o eixo x (veja **??**)
[**Dica:** *Ache os pontos onde a reta intercepta o eixo* x *e o eixo* y *em termos de* h, α *e use o resultado do item a.*]

Ex. 1.5 — Dado $A : (1, 2)$. Ache o ponto B tal que o triângulo OAB seja equilátero.

Ex. 1.6 — Ache a equação da reta que passa pelos pontos. Tanto na forma canônica como na forma paramétrica

a) Pelos pontos $(3, 5, 1)$ e $(-2, 3, 2)$

b) Pelos pontos $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$

c) Pelos pontos $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 0)$

d) Pelos pontos $(3, 2, 1)$ e $(6, 1, 4)$

Ex. 1.7 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que começa em $(3, -1, -5)$ e que se move retilineamente e uniformemente na direção do vetor $(-2, 6, 3)$ com velocidade $v = 14$.

Ex. 1.8 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que se move retilineamente e uniformemente e percorreu a distância distância entre os pontos $(-7, 12, 5$ e $(9, -4, -3)$ no intervalo de tempo $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$.

Ex. 1.9 — Duas partículas P_1 e P_2 se movem retilineamente e uniformemente. A primeira partícula inicia seu movimento em $A : (-5, 4, -5)$ e se move com velocidade $v = 14$ na direção do vetor $(3, -6, 3)$, a segunda partícula começa no ponto $B : (-5, 16, -6)$ e se move com velocidade $v = 13$ na direção oposta ao vetor $(-4, 12, -3)$.

a) Escreva as equações de movimento para cada partícula.

b) Mostre que suas trajetórias se interceptam e ache o ponto P de intersecção.

c) Determine o tempo que a primeira partícula gasta para ir de A até P.

d) Determine o tempo que a segunda partícula gasta para ir de B até P.

Ex. 1.10 — Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$ determine a equação paramétrica da reta que passa por A e B. Determine também os pontos onde essa reta corta os planos coordenados XY, XZ e YZ.

Ex. 1.11 — Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Ache os vértices desse triângulo.

Ex. 1.12 — Ache a equação das três medianas de um triângulo com vértices $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$.

Ex. 1.13 — Os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação padrão e paramétrica dessa reta.

Ex. 1.14 — Chama -se baricentro de um triângulo o ponto de encontro das três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos.

a) $A = (1,5)\,, B = (3,2)\; C = (2,4)$

b) $A = (x_1, y_1)\,, B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$

Ex. 1.15 — Ache as coordenadas do ponto de trissecção de uma mediana (o ponto que está a $\frac{2}{3}$ do caminho do vértice ao ponto médio do lado oposto) e prove que não somente ele satisfaz a equação das outras duas medianas, mas que também ele é o ponto de trissecção das outras duas medianas. Conclua que as três medianas são concorrentes, i.e, elas passam pelo mesmo ponto.
[**Dica:** *Para triângulo genérico as coordenadas podem ser escolhidas de modo que os vértices sejam* $(0,0)\,, (0,a)$ *e* (b,c)]

Ex. 1.16 — O ponto em que duas retas não paralelas se encontram deve satisfazer ambas equações. Ache o ponto de intersecção de $3x - 4y = 1$ e $4x + 6y = 14$.

Ex. 1.17 — Ache a inclinação, o ponto de intersecção com o eixo y e desenhe. Quando a inclinação ou o ponto de intersecção não existir, diga.

a) $3x - 4y = 6$

b) $2x + 3y = 6$

c) $7y + 9 = 0$

d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

e) $y = mx + b$

f) $bx + ay = 0$

g) $4x^2 = 9$

h) $xy(2x - 3y + 4) = 0$

i) $x\cos(\alpha) + y\,\mathrm{sen}(\alpha) = h$ (indique h e α em sua figura).

j) $x = 3 + 2t, y = -1 - 3t$

Nos próximos exercícios ache a equação da reta e desenhe uma figura de cada.

Ex. 1.18 — A linha que passa por $(-5,7)$ perpendicular a $4x - 5y = 10$.

Ex. 1.19 — Duas retas por $(-2,3)$, uma paralela e outra perpendicular a $3x + 2y + 5 = 0$

Ex. 1.20 — A reta que passa por $(a, 0)$ perpendicular a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ex. 1.21 — No triângulos de vértice $(a, 0), (b, 0), (0, c)$:

a) ache as equações das três alturas;
b) ache as equações das três medianas;
c) prove que as três alturas se encontram num ponto H chamado ortocentro do triângulo.
d) prove que as três medianas se encontram num ponto O', chamado circuncentro do triângulo.

Ex. 1.22 — Ache duas linhas retas de inclinação $\frac{2}{3}$ que fazem com os eixos coordenados um triângulo de área $\frac{4}{3}$

Ex. 1.23 — Mostre que para quaisquer valores de s e t as retas $(2s + 3t)x + (3s - 2t)y = 5s + 4t$ passam pelo mesmo ponto. Determine esse ponto e mostre também que toda reta que passa por esse ponto é representada por uma equação da forma acima para uma escolha conveniente de s e t.

Ex. 1.24 — Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

Ex. 1.25 — Identifique a linha cujas equações são $2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5$. Ache o vetor diretor e três pontos que pertençam a essa reta.

Ex. 1.26 — Faça o mesmo para a reta $2x = 3$ e $4y = 5$.

Ex. 1.27 — Ache a equação padrão da reta $3x - 2y + 5z = 6$, $2x + y - 3z = 0$. Escreva a equação da reta na forma paramétrica.

Ex. 1.28 — Ache a equação da reta perpendicular ao plano que passa pelos pontos $(3, 4, 2), (-1, 5, 3), (2, 1, 4)$ e que passe pela origem.

Ex. 1.29 — Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

a) $A = (1,2,1), B = (1,2,3)$.

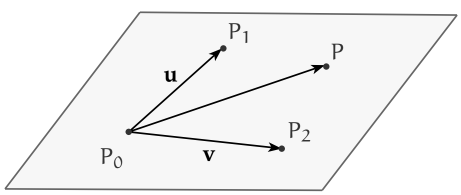
b) $A = (1,3,2), B = (2,2,2)$.

c) $A = (3,0,2), B = (2,1,2)$.

d) $A = (3,-2,1), B = (0,0,1)$.

3.2 EQUAÇÕES DO PLANO

3.2.1 Equações Paramétricas e Vetoriais do Plano



Passemos agora a um novo problema: determinar uma equação (ou conjunto de equações) que representem um dado plano no espaço euclidiano. Primeiro, lembremos que dados três pontos P_0, P_1 e P_2 não colineares existe um único plano π passando por esses pontos.

Seguindo então as mesmas idéias utilizadas no caso da reta, para determinar as equações de π utilizaremos um ponto inicial (por exemplo P_0) em conjunto com vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$, determinados pelos pontos escolhidos. Tome agora um ponto P qualquer deste plano, e observe que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao plano π, e portanto coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Como os pontos P_0, P_1 e P_2 são não colineares, concluímos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes, e asssim, pelo Teorema da Base, podemos escrever o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, existem escalares $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t,$$

e portanto

$$P = P_0 + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t. \tag{3.6}$$

Assim como no caso das retas, a equação (3.6) é chamada de **equação vetorial do plano**.

Escrevendo $P : (x, y, z)$, $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} : (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 s + v_1 t \\ y &= y_0 + u_2 s + v_2 t \\ z &= z_0 + u_3 s + v_3 t, \end{aligned}$$

encontrando assim **equações paramétricas do plano**. Vale comentar que, assim como no caso das retas, as equações apresentadas acima não são únicas pois dependem do ponto e dos vetores considerados.

Exemplo 3.9 *Encontre as equações vetorial e paramétricas do plano* π *determinado pelos pontos* $P_0 : (1,0,1)$, $P_1 : (-1,2,3)$ *e* $P_2 : (3,1,0)$.

Solução: Definindo $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} : (-2,2,2)$ e $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_2} : (2,1,-1)$, a equação vetorial de π fica

$$\pi : P = (1,0,1) + (-2,2,2)s + (2,1,-1)t.$$

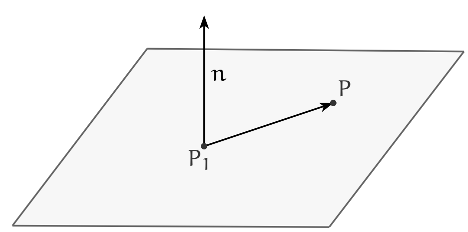
A forma paramétrica é encontrada ao olharmos coordenada por coordenada, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2s + 2t \\ y &= 2s + t \\ z &= 1 + 2s - t. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Equação Geral de um Plano

Na seção anterior vimos como encontrar a equação de um plano a partir das coordenadas de três pontos não colineares neste plano. Mas a geometria Euclidiana nos dá uma outra forma de encontrarmos a equação de um plano. Para isso vamos primeiro lembrar que, dada uma reta e um ponto P_1 podemos encontrar um único plano π que contenha o ponto P_1 e que seja ortogonal a reta dada. Observe que, neste resultado, a reta serve apenas para determinar uma direção. Isso nos permite portanto substituir esta reta por um vetor paralelo a ela. Neste sentido, dado um plano π, dizemos que um vetor $\mathbf{n}$ não nulo é normal a pi se $\mathbf{n}$ é ortogonal a todos os vetores paralelos a π. É fundamental notar que todo plano possui uma infinidade de vetores normais (veja o exercício 2.3).



Sejam dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x, y, z)$ no plano π. Como o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é perpendicular a $\mathbf{n} : (a, b, c)$, calculando o produto interno, obtemos que

$$a(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

e assim

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

e assim, definindo $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, encontramos que $ax + by + cz = d$ para qualquer ponto $P : (x, y, z)$ pertencente ao plano. Em resumo, determinamos que se um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π, então suas coordenadas satisfazem $ax + by + cz = d$.

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ tomando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ teremos, pela definição de d, que $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ e subtraindo obtemos que

$$a(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Ou seja o segmento $\overrightarrow{P_1P}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{A}$ e consequentemente pertence a π.

Observe que, para que o plano fique bem determinado, o vetor $\mathbf{n} : (a, b, c)$ deve ser não nulo, ou seja, é necessário que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

A equação $ax + by + cz = d$ é chamada de equação geral do plano, e dada esta equação é fácil recuperarmos um vetor normal ao plano. Mais precisamente teremos $\mathbf{n} : (a, b, c)$.

Exemplo 3.10 *Encontre a equação geral do plano passando pelos pontos* $A : (2, 1, 0)$, $B : (3, 3, 2)$ *e* $C : (1, 2, 4)$.

Solução: Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano que queremos, um possível vetor normal a esse plano é dado por $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Calculando obtemos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e logo

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, -6, 3).$$

Segue daí que a equação geral do plano é da forma $6x - 6y + 3z = d$. Para determinar d basta notar que o ponto $A : (2, 1, 0)$ pertence ao plano, e logo deve satisfazer esta equação. Assim obtemos

$$6 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = d$$

e logo a equação geral do plano é $6x - 6y + 3z = 6$. □

Exemplo 3.11 *Encontre a equação geral do plano com equação vetorial*

$$P = (0, 1, 2) + (3, 1, 2)t + (1, 2, 1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano nesse caso é

$$n = (3, 1, 2) \times (1, 2, 1) = (-3, -1, 5)$$

e logo a equação do plano é da forma $-3x - y + 5z = d$. Como $(0, 1, 2)$ pertence a esse plano, temos que

$$-3 \cdot 0 - 1 + 5 \cdot 2 = d$$

e a equação geral do plano fica $-3x - y + 5z = 9$ □

Exemplo 3.12 *Encontre equações paramétricas para o plano cuja equação geral é* $2x + 3y + z = 1$.

Solução: Apresentaremos duas soluções possíveis para este problema.

Solução 1: O primeiro modo é encontrar três pontos não colineares do plano. Podemos, por exemplo, fazer $x = 0$ e $y = 0$. Substituindo na equação geral encontramos $z = 1$, e portanto o ponto $A = (0, 0, 1)$ pertence ao plano. De modo análogo, fazendo $x = 0$ e $y = 1$ e depois $x = 2$ e $y = -1$, encontramos que $B = (0, 1, -2)$ e $C = (2, -1, 0)$ pertencem ao plano.

Como $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$ são LI, os pontos A, B, C não são colineares e assim um conjunto possível de equações paramétricas para π é

$$\begin{cases} x = 0 + 2s \\ y = 0 + t - s \\ z = 1 - 3t - s \end{cases}$$

Solução 2: Outro modo, mas rápido, é o que chamamos de "isolar os parâmetros". Para isso fazemos $x = t$ e $y = s$, e substituindo em $2x + 3y + z = 1$, obtemos que $z = 1 - 3s - 2t$. Assim outro conjunto possível de equações paramétricas para este plano é dada por $(x, y, z) = (t, s, 1 - 3s - 2t)$. □

Exercícios.

Ex. 2.1 — Determine as equações paramétricas do plano:

a) passando pelos pontos $(4, 3, 1)$, $(-3, 0, 4)$ e $(0, 0, 3)$

b) pelo ponto $(2, 1, 3)$ e contendo a reta

$$\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$$

c) passando pelos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c$

Ex. 2.2 — Mostre que os pontos $(-1, 2, 3), (-3, 1, 2), (-5, 4, 6)$ e $(9, -1, -2$ são colineares.

Ex. 2.3 — Dado um plano π passando pelos pontos A, B, C não colineares.

a) Mostre que para qualquer escalar λ o vetor $\lambda\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vetor normal a π

b) Mostre que todos os vetores normais a pi são da forma $\lambda\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Ex. 2.4 — Mostre que a equação $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + d = 0$ representa um plano perpendicular ao vetor $\mathbf{n}$.

Ex. 2.5 — Ache a equação geral do plano:

a) passando pelos pontos $(4, 3, 1)$, $(-3, 0, 4)$ e $(0, 0, 3)$

b) passando pelo ponto $(1, 0, 1)$ e de vetor normal $(3, 4, 5;$

c) passando pelos pontos $A : (4, 0, 1)$, $B : (3, 2, 0)$ e $C : (-1, 2, 3)$;

d) pelo ponto $(2, 1, 3)$ e contendo a reta

$$\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$$

e) passando pelos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c$ é

f) Por $(1, 1, 5)$ e contendo a reta:

$$\begin{cases} 1x + 3y + 2z = 2 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases}$$

g) de equação paramétrica: $(1,2,1) + (1,0,1)t + (3,4,2)s$

h) de equação paramétrica: $(-1,3,2) + (2,-2,1)t + (5,-1,2)s$

Ex. 2.6 — Dado um plano $ax + by + cz = d$. Mostre que

a) $a \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x,y,z) = (-\frac{b}{a}t - \frac{c}{a}s + \frac{d}{a}, t, s)$$

b) $b \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x,y,z) = (t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}s + \frac{d}{b}, s)$$

c) $c \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x,y,z) = (t, s, -\frac{a}{c}t - \frac{b}{c}s + \frac{d}{c}$$

3.3 POSIÇÕES RELATIVAS

Nosso objetivo nesta seção é entender como usar as equações de retas e planos vistas até agora para determinar o posicionamento destes elementos no espaço. Como definir, por exemplo, se duas retas dadas são ou não paralelas? De modo geral, estaremos interessados em comparar a posição relativa entre dois elementos dados.

3.3.1 Posição relativas entre retas

Comecemos com o estudo da posição relativa de duas retas. Começando pelo mais simples, lembremos primeiro que duas retas **em um mesmo plano** podem ser:

- coincidentes, i.e., são a mesma reta;
- paralelas;
- concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Tomemos então duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}t$.

Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, é fácil ver que r e s são paralelas se seus vetores diretores v e u são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas coincidentes são, no fundo, a mesma reta. Mais formalmente, r e s são coincidentes se possuem o mesmo lugar geométrico. Um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de r (ponto A) pertence à reta s. Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes.

Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas elas claramente só podem possuir um ponto em comum.

Resumindo, duas retas em um mesmo plano são:

- Paralelas se e somente se seus vetores diretores são múltiplos um do outro.

  Neste caso elas podem ser:

  - Coincidentes: se o lugar geométrico de r e de s são o mesmo. Neste casos as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto. Para verificar se suas retas paralelas são coincidentes é suficiente verificar se elas possuem um ponto em comum. Por exemplo se o ponto B pertence a reta r.
  - Paralelas não coincidentes, se não possuem pontos em comum.

- Concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.

Exemplo 3.13 *Ache a posição relativa entre as retas:*

1. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ *e* $s : (4, 1) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})t$
2. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ *e* $s : (2, 2) + (1, -\frac{1}{3})t$
3. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ *e* $s : (2, 2) + (0, 1)t$

Solução:

1. Coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(4, 1)$ pertence a r.

2. Paralelas não coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(2, 2)$ pertence a r.

3. Concorrente, pois os vetores diretores não são paralelos.

□

As condições acima valem apenas para equações vetoriais, e consequentemente para equações paramétricas. Mas no caso bi-dimensional as equações ficam mais simples e podemos representar uma reta através de uma única equação linear. Seria interessante então que tivéssemos uma maneira de comparar equações nesta forma.

Tome então duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$. Vamos supor por um instante que $b \neq 0$ e $b' \neq 0$ (r e s não são paralelas ao eixo y). Não é difícil se convencer que r e s são paralelas se, e só se, seus coeficientes angulares forem os mesmos. Ou seja, precisamos que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Mas isto é equivalente a dizer que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que se ambas forem paralelas ao eixo y, então $b = b' = 0$ e a mesma condição vale.

Se r e s forem coincidentes então, pela condição dada acima, temos que

$$0 = a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by) + c' = \lambda(ax + by + c) - \lambda c + c' = -\lambda c + c',$$

e portanto $c' = \lambda c$.

Resumindo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.14 *Dadas duas retas na forma* $r : ax + by + c = 0$ *e* $s : a'x + b'y + c' = 0$*, então:*

1. *Se o vetor* (a, b, c) *é múltiplo de* (a', b', c') *as retas são coincidentes.*

2. *Se o vetor* (a, b) *é múltiplo de* (a', b')*, ou equivalentemente os coeficientes angulares são iguais então as retas são paralelas.*

3. *Se o vetor* (a, b) *não é múltiplo de* (a', b')*, ou equivalentemente os coeficientes angulares são distintos então as retas são paralelas.*

Passemos agora para uma análise espacial. Quando tomamos duas retas no espaço precisamos primeiro verificar se elas estão em um mesmo plano (retas coplanares). Observe que se duas retas são paralelas elas são necessariamente coplanares. Por esta razão, retas não coplanares recebem o nome de reversas. Em resumo, duas retas no espaço podem ser

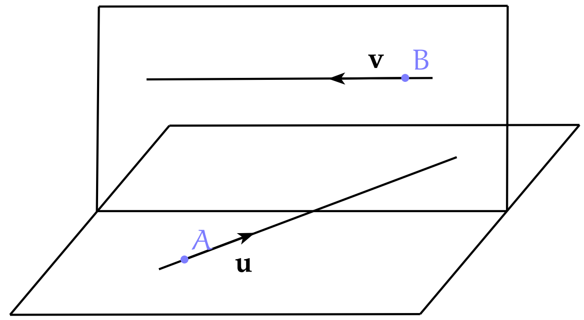


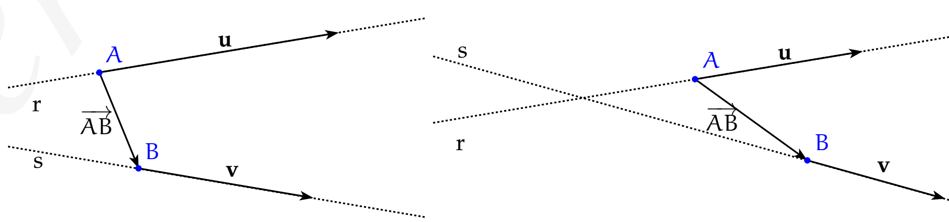
Figura 3.2: Retas Reversas

- Reversas, se as duas retas não estiverem contidas num mesmo plano.
- Coplanares, se as duas retas estiverem contidas num mesmo plano. Neste caso, valem as classificações vistas até agora, e as retas podem ser:
  - Coincidentes;
  - Paralelas;
  - Concorrentes.

Precisamos então encontrar um critério para determinar se duas retas são ou não coplanares. Tome então duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$, com $A \neq B$. Se r e s forem coplanares, então necessariamente o vetor $\overrightarrow{AB}$ deve ser coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes. Do mesmo modo, se $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem coplanares então a reta s está contida no mesmo plano determinado pela reta r e pelo ponto B. Isso nos dá o seguinte resultado.

Teorema 3.15 *Duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$ são coplanares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ forem linearmente dependentes, ou seja se:*

$$\left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right| = 0.$$



Exemplo 3.16 *Determine a posição relativa entre as seguintes retas:*

a) $r : (1, 2, 0) + t(2, 2, 2)$ *e* $s : (1, 3, 3) + t(2, 2, 3)$

b) $r : (1, 0, 0) + t(2, 2, 2)$ *e* $s : (2, 3, 0) + t(1, -1, 2)$

c) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ *e* $s : (2, 3, 0) + t(1, 1, 1)$

d) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ *e* $s : (2, 1, 1) + t(1, 1, 1)$

Solução:

a) Para determinar se r e s são coplanares precisamos estudar a dependência linear dos vetores $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ e $(0, 1, 3) = (1, 3, 3) - (1, 2, 0)$. Como o determinante formado pelas coordenadas destes vetores vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluímos que as retas não são coplanares, sendo portanto reversas.

b) Como o determinante formado pelas coordenadas dos vetores $(2, 2, 2)$, $(1, -1, 2)$ e $(1, 3, 0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

as retas são coplanares. Como os vetores diretores não são múltiplos, as retas são concorrentes.

c) As retas acima possuem o mesmo vetor diretor, de onde concluímos que são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ não pertence a s, as retas são paralelas e não coincidentes.

d) Assim como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ pertence a reta s (basta fazer $t = -1$ na equação de s) obtemos que r e s são de fato coincidentes.

□

Exercícios.

Ex. 3.1 — Sejam r a reta representada parametricamente por $x = at + b$ e $y = ct + d$ e s a reta cuja equação é $\alpha x + \beta y = c$.

a) Quando r intersepta s?

b) Se r interceptar s determine o ponto P de intersecção entre as duas retas:

Ex. 3.2 — Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de intersecção.

a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$; $s : X = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$.

b) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}, s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$

c) $r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}, s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z.$

d) $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z$, $s : \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Ex. 3.3 — A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ABC estão contidas, respectivamente, em $r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ e $s : X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$. Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine A e B.

Ex. 3.4 — Mostre que duas retas

$$r : \{\ x = mz + ay = nz = b$$

e

$$s : \{\ x = m'z + a'y = n'z = b'$$

se interceptam se e somente se $(a - a')(n - n') = (b - b')(m - m')$

Ex. 3.5 — Estude a posição relativa das retas r e s.

a) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (2, 4, 6)t$

b) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (1, 4, 1)t$

c) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$.

d) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$;

e) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$

f) $r : x+3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ e $s : X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$.

Ex. 3.6 — Sejam $r : X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$ e $s : X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r e s.

Ex. 3.7 — Dadas as retas $r : X = (0,1,0) + \lambda(1,0,0)$ e $s : X = (-1,2,-7) + \lambda(2,1,-3)$, obtenha uma equação vetorial da reta t, concorrente com r e s e paralela a $\vec{u} = (1,-5,-1)$.

Ex. 3.8 — Determine o ponto de intersecção entre a reta que passa pelos pontos $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ e a reta que passa pelos pontos $(2,1,1)$ e $(1,2,1)$.

Ex. 3.9 — Determine a, b de modo que as retas sejam paralelas:

$$r : \begin{cases} ax + 3y - 7z - 1 = 0 \\ 5x + 6y - bz = 0 \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} ax + by = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

3.3.2 Posição relativas entre retas e planos

Passemos agora para o estudo da posição de uma reta e um plano. Dado um plano π e uma reta r temos três possibilidades:

- a intersecção de r e π é vazia. Nesse caso a reta r é dita paralela a π.
- a intersecção de π e r é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta r é transversal a π
- a intersecção de π e r tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta r pertencem ao plano π e dizemos que a reta r está contida em π.

Não é difícil ver que uma reta r é transversal a π se, e somente se, o vetor diretor dessa reta não é paralelo ao plano π. Ou, equivalentemente, se o vetor diretor dessa reta não é ortogonal ao vetor normal ao plano.

Colocando em coordenadas, obtemos que o plano π de equação geral $ax + by + cz = d$ e a reta r de equação paramétrica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0 + z_0) + (v_1, v_2, v_3)t$$

são transversais se, e somente se,

$$(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3 \neq 0,$$

ou seja,

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0.$$

Reescrevendo esta condição utilizando o vetor normal ao plano $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e o vetor diretor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos o seguinte critério.

> A reta $r : X = P + \mathbf{v}t$ é transversal ao plano π de vetor normal $\mathbf{n}$ se, e somente se,
>
> $$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0.$$

Caso r não seja transversal à π, nos restam duas opções: ou r é paralela ou está contida em π. Para decidirmos qual é o caso basta tomarmos um ponto qualquer da reta e verificarmos se este pertence ao plano. Se isso ocorrer a reta está contida no plano, caso contrário a reta é paralela.

Exemplo 3.17 *Determine a posição relativa entre o plano*

$$\pi : X = (1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2$$

e a reta

$$r : X = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano é dado por:

$$(1, -1, 1) \times (0, 1, 2) = (-3, -2, 1)$$

E como $(-3, -2, 1) \cdot (1, 1, 1) = -4 \neq 0$, a reta é transversal ao plano.

O ponto de intersecção ocorre quando:

$$(1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2 = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s$$

cuja solução é $s = \frac{1}{4}, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Substituindo $s = \frac{1}{4}$ na equação da reta obtemos o ponto $(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4})$, que é portanto o ponto de intersecção de r com π. □

Exercícios.

Ex. 3.10 — Mostre que a reta

$$x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$$

é paralela ao plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$

Ex. 3.11 — Determine a equação do plano contendo a reta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

e paralela a reta $x = -\frac{y}{6} = \frac{z}{7}$

Ex. 3.12 — Mostre que a reta

$$\frac{1}{3}(x - 7) = -(y + 3) = z - 4$$

intersecciona os planos $\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4$ e $\pi_2 : x - 5y + 2z = 12$ no mesmo ponto. Conclua que essa reta é coplanar com a reta determinada pela intersecção desses planos.

Ex. 3.13 — Encontre o ponto de intersecção da reta dada com o plano dado:

a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \qquad 2x + 3y + z - 1 = 0$

b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \qquad x - 2y + z - 15 = 0$

c) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \qquad x + 2y + 2z + 6 = 0$

Ex. 3.14 — Escreva as equações do plano que passa por $(1, 2, -3)$ e é paralelo as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

Ex. 3.15 — Mostre que as equações do plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralelo as retas:

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{l_2} = \frac{z-c_1}{l_3}, \qquad \frac{x-a_2}{m_1} = \frac{y-b2}{m_2} = \frac{z-c_2}{m_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex. 3.16 — Mostre que a equação do plano que passa pelos pontos (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1) e é paralelo a reta:

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{l_2} = \frac{z-c_1}{l_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex. 3.17 — Prove que as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (3t-7, 2t+2, -2t+1)$$

são coplanares e determine a equação desse plano.

3.3.3 Posição relativas entre planos

Queremos agora estudar a posição de dois planos no espaço. Para começar analisemos quais as possíveis posições relativas, para depois determinar condições algébricas que as determinem. Dados então dois planos π_1 e π_2 temos três possibilidades:

- a intersecção de π_1 e π_2 é vazia. Nesse caso, os planos são ditos **paralelos distintos**.
- a intersecção de π_1 e π_2 é não vazia, e dois sub-casos são possíveis:

- a intersecção de π_1 e π_2 é uma reta, e os planos são ditos **transversais**.
- a intersecção de π_1 e π_2 são **coincidentes**.

Assim como no caso reta×plano, para estudar a posição relativa entre dois planos utilizaremos intensamente os vetores normais a estes planos. Para dois planos serem paralelos, por exemplo, precisamos que seus vetores normais sejam paralelos entre si.

A seguinte proposição caracteriza a posição relativa de dois planos. Sua demonstração é simples e fica como exercício para o leitor.

Proposição 3.18 *Sejam π_1 e π_2 dois planos de equações $a_1x + b_1y + c_1 = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ respectivamente. então:*

- *Os planos π_1 e π_2 são paralelos se os seus vetores normais forem paralelos, isto é, se*

$$(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_1, b_1, c_1).$$

  Nesse caso se:

  - (a_1, b_1, c_1, d_1) *for proporcional a* (a_2, b_2, c_2, d_2)*, então os planos são coincidentes*
  - (a_1, b_1, c_1, d_1) *não for proporcional a* (a_2, b_2, c_2, d_2)*, então os planos são paralelos distintos.*

- *Os planos π_1 e π_2 são transversais se os seus vetores normais não forem paralelos, isto é, se (a_1, b_1, c_1) e (a_1, b_1, c_1) não são proporcionais.*

É interessante observar que se π_1 e π_2 forem transversais, então a reta r determinada pela interseção dos dois planos deve ser perpendicular aos vetores normais $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, e podemos tomar o vetor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ como vetor diretor de r. Assim, escolhendo um ponto P qualquer na interseção de π_1 e π_2, obtemos

$$r : X = P + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)t.$$

Exemplos 3.19

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 6x + 2y + 2x = 3$ são transversais. E assim a sua intersecção, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

  determina uma reta.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 2$ são paralelos e não coincidentes. E assim a sua intersecção é o conjunto vazio.Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

não possui soluções.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 10$ são coincidentes. E assim a sua intersecção é o plano $\pi_1 = \pi_2$. Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 4x + 6y + 8x = 10 \end{cases}$$

tem como solução um plano.

Exemplo 3.20 *A reta* r *é dada como intersecção de dois planos*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} . \tag{3.7}$$

Escreva as equações paramétricas para essa reta.

Solução: Um modo de escrever as equações paramétricas é escolher uma das variáveis é faze-la igual ao parâmetro t. Assim por exemplo, fazendo $z = t$. A equação $x - z = 1$, nos diz que $x = 1 + t$. Substituindo esse valores na equação $x + y + 2z = 0$, temos $y = -1 - t$. E assim as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Outro modo de escrever a equação vetorial é encontrando dois pontos que satisfazem a equação. Assim por exemplo tomando $z = 0$, o sistema de equações 3.7 fica

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} .$$

Cuja solução é o ponto $(1, -1, 0)$, que pertence a reta determinada pela intersecção dos dois planos. Similarmente tomando $z = -1$, temos que o ponto $(0, 2, -1)$ pertence a reta.

De posse dos pontos podemos escrever a equação vetorial dos planos:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}.$$

□

Exercícios.

Ex. 3.18 — Mostre que os planos $bx - ay = n$, $cy - bz = 1$ e $az - cx = m$ se interceptam numa reta se e somente se $al + bm + cn = 0$.

Ex. 3.19 — Mostre que a reta:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contida no plano $4x + 3y + 7z - 7$.

Ex. 3.20 — Determine os valores de a e b de modo que os planos $x + 2y + z = b$ e $3x - 5y + 3z = 1$ e $2x + 7y + az = 8$ se interceptem:

a) um ponto
b) uma reta
c) três retas distintas e paralelas

3.4 Ângulos

Na seção passada nos concentramos no estudo da posição relativa entre dois objetos no espaço. Tal estudo nos ensinou a determinar apenas se dois objetos são ou não paralelos, mas sem a necessidade de verificar algum tipo de medida angular entre eles. Nesta seção vamos aprofundar um pouco mais o estudo de posição relativa, definindo e estudando o que chamaremos de ângulo entre dois objetos no espaço.

3.4.1 Ângulo entre duas Retas

O ângulo entre duas retas é definido como o ângulo entre seus vetores diretores. Assim se $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}t$ então o ângulo θ entre r e s será tal que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \tag{3.8}$$

e consequentemente

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Lembramos que a função $\arccos(x)$, retorna um ângulo x tal que $0 \leqslant x < \pi$. Como $\cos(x) = \cos(-x)$, o ângulo que obtemos acima é não orientado, ou seja obtemos apenas o valor absoluto do ângulo. Em outras palavras, nesta defnição, o ângulo entre a reta r e a reta s é o mesmo que o ângulo entre a reta s e a reta r.

Observamos também que entre duas retas não paralelas sempre existem dois ângulos possíveis, e o ângulo que encontramos não é necessariamente o menor deles, ou seja, o ângulo agudo. Em algumas situações é desejável conhecermos o ângulo agudo entre as retas r e a reta s. Para isto, observe que se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \geqslant 0$ então $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \geqslant 0$. Portanto

$$\arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

e o objetivo foi alcançado.

Caso contrário, se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$, temos que

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} < \pi,$$

e estamos interessados portanto no ângulo suplementar $\pi - \theta$.

Mas note que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, e portanto, substituindo em (3.8) obtemos que se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$, então

$$\cos(\pi - \theta) = -\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \tag{3.9}$$

Desta forma se, denotarmos por α o ângulo agudo entre as retas r e s temos que

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \qquad \text{com } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Exemplo 3.21 *Encontre o ângulo entre as reta* $r : (1,2,1) + (1,1,0)$ *e* $s : \frac{x-2}{1/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z+7}{1/\sqrt{2}}$.

Solução: A reta r tem vetor diretor $(1,1,0)$ e a reta s tem vetor direto $(1/2,1/2,1/\sqrt{2})$. E assim

$$\cos\theta = \frac{(1,1,0)(1/2,1/2,{}^1\!/\!\sqrt{2})}{\|(1,1,0)\|\|({}^1\!/\!_2,{}^1\!/\!_2,{}^1\!/\!\sqrt{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e logo $\theta = \frac{\pi}{4}$. □

É importante observar que para medir o ângulo entre duas retas não é necessário que estas se cruzem. Do modo que definimos, podemos medir ângulo entre retas reversas, e o ângulo entre duas retas paralelas (coincidentes ou não) é sempre 0.

Também neste sentido, duas retas são ditas **ortogonais** se seus vetores diretores são perpendiculares. E duas retas são ditas **perpendiculares** se elas se interceptam e são ortogonais.

Exemplo 3.22 *Verifique se as retas* $r : (1,2,1) + (1,1,0)t$ *e* $s : (1,3,4) + (1,-1,3)t$ *são ortogonais e/ou se são perpendiculares.*

Solução: Como $(1,1,0)\cdot(1,-1,3) = 0$ elas são ortogonais.

Para verificar se elas se interceptam, basta resolvemos o sistema linear:

$$(1,2,1) + (1,1,0)t_1 = (1,3,4) + (1,-1,3)t_2$$

Como o sistema acima, não possui soluções, as retas não se interceptam e assim elas não são perpendiculares.

□

No caso bidimensional, lançando mão da representação por equações lineares, podemos redefinir as fórmulas para o ângulo entre duas retas, e colocá-las em função da inclinação das retas estudadas.

Tome então duas retas $r : y = m_1x + d$ e $s : y = m_2x + d$ e lembre-se que podemos expressar seus vetores diretores respectivamente por $\mathbf{v} = \mathbf{i} + m_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{i} + m_2\mathbf{j}$. Assim obtemos que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|u\|\|v\|} = \frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$

A expressão acima, assim como no caso tridimensional, nos permite calcular o ângulo θ não orientado entre as retas. Esse ângulo está entre 0 e ${}^\pi\!/\!_2$ se $1 + m_1m_2$ é positivo, e entre $\pi/2$ e pi se $1 + m_1 m_2$ é negativo. Se $1 + m_1 m_2 = 0$ o ângulo é igual a $\pi/2$ e assim as retas são perpendiculares.

De modo análogo, podemos encontrar

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}$$

ou equivalentemente

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}.$$

Neste caso, como $0 \leqslant \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}} \leqslant 1$, temos que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Outro modo de determinar o ângulo entre duas retas no plano é lembrando que o coeficiente angular é a tangente do ângulo orientado (no sentido anti-horário) entre a reta é a parte positiva do eixo x. Assim dadas duas retas de coeficiente angulares $m_1 = \operatorname{tg}\phi_1$ e $m_2 = \operatorname{tg}\phi_2$. Pela figura 3.3 temos que $\theta = \phi_2 - \phi_1$ e logo:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

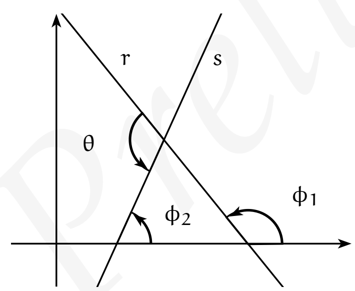


Figura 3.3

Uma vantagem da expressão

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

é que o ângulo determinado por esta é o ângulo orientado entre as retas r_1 e r_2.

Dadas duas retas de coeficientes angulares m_1, m_2, então o ângulo entre elas é dado por:

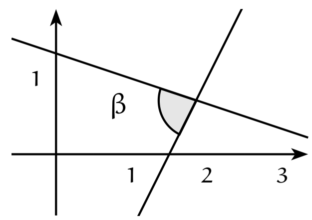
$$\cos\theta = \frac{1+m_1 m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|m_2-m_1|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_1 m_2}$$

Exemplo 3.23 *Ache o ângulo entre as retas* $2x - y = 3$ *e* $x + 3y = 4$.

Solução: Neste caso temos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)2} = -7$$

E assim $\theta = \operatorname{arctg}(-7) \approx -81.8699°$.



□

Exemplo 3.24 *Ache duas retas que passe pelo ponto* $(2, 2)$ *e que faça um angulo de 45°com a reta* $2x - 3y = 4$

Solução: Inicialmente vamos encontrar o coeficiente angular dessas retas. Para isso, observamos que:

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $1 + \frac{2}{3}m = \frac{2}{3} - m$ e logo $\frac{5}{3}m = -\frac{1}{3}$ e assim $m = -\frac{1}{5}$. Logo a equação da reta é $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

No caso

$$\operatorname{tg} 45° = 1 = \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $m = 5$. Logo a equação da reta é $y - 2 = 5(x - 2)$ □

Exercícios.

Ex. 4.1 — Ache o ângulo agudo entre as retas $3x-4y+2=0$ e $2x+3y=7$

Ex. 4.2 — Qual o ângulo entre o eixo x e $5x+12=3$?

Ex. 4.3 — Ache duas retas passando por $(1,-1)$ que faz um ângulo de 45º com $3x-4y=7$.

Ex. 4.4 — Ache os três ângulos de um triângulo cujos vértices são $(2,1)\,,(-1,2)\,,(3,-2)$. Veja se eles somam 180º

Ex. 4.5 — Seja α um dos ângulos formados pelas retas $ax+by=c$ e $y=px+q$. Dê uma expressão para $|\cos\alpha|$.

Ex. 4.6 — Escreva a equação da reta que passa pela origem e faz um angulo de 45º com a reta $\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}=1$.

Ex. 4.7 — Mostrar que os quatro pontos $(2,2)$, $(5,6)$, $(9,9)$ e $(6,5)$ são os vértices de um losango e que suas diagonais se cortam mutuamente ao meio e uma é perpendicular a outra.

Ex. 4.8 — O segmento retilíneo que une os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento retilíneo que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero cortam se mutualmente ao meio.

Ex. 4.9 — Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(1,-2,1)$ e é perpendicular as retas $r:(1,-3,0)+(1,2,1)t$ e $s:(-2,1,0)+(1,-1,1)t$.

Ex. 4.10 — Determine as equações paramétricas da reta perpendicular as retas:

$$x=3t-7,\quad y=-2t+4,\quad z=3t+4$$

e

$$x=t+1,\quad y=2t-9,\quad z=-t-12$$

O ângulo θ entre uma reta r e um plano π é definido como o ângulo complementar ao ângulo agudo entre o vetor diretor a essa reta e o vetor normal ao plano (ver figura 3.4).

Se $\mathbf{v}$ é um vetor diretor da reta r e $\mathbf{n}$ é um vetor normal ao plano π então

$$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

e logo

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}$$

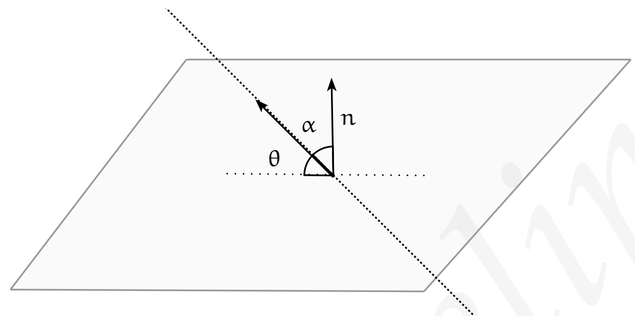


Figura 3.4: Ângulo θ entre uma reta e um plano.

Dizemos que um plano π com vetor normal $\mathbf{n}$ e uma reta r com vetor diretor $\mathbf{v}$, são ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, ou equivalentemente se os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são paralelos.

Exemplo 3.25 *Determine o ângulo entre a reta* $X = (6, 7, 0) + (1, 1, 0)t$ *e o plano de equação vetorial* $X = (8, -4, 2) + (-1, 0, 2)t + (1, -2, 0)s$.

Solução: Vamos encontrar inicialmente um vetor normal a esse plano:

$$\mathbf{n} = (-1, 0, 2) \times (1, -2, 0) = (4, 2, 2)$$

Logo o angulo entre a reta é o plano é dado por:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{(1, 1, 0) \cdot (4, 2, 2)}{\sqrt{2}\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e assim $\theta = \frac{\pi}{3}$ □

Exemplo 3.26 *Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto* $(1, 2, 1)$ *e que é perpendicular a reta* $X = (1, 0, 0) + (1, 3, -1)t$

Solução: O vetor normal ao plano pode ser escolhido como $(1, 3, -1$ e assim a equação geral desse plano é: $x + 3y - z = d$. Como o ponto $(1, 2, 1)$ pertence ao plano, ele satisfaz a equação do plano, i.e, $1 + 3 \cdot 2 - 1 = d$. Logo $d = 6$ e a equação geral do plano é $x + 3y - z = 6$. □

3.4.3 Ângulo entre dois Planos

O ângulo entre dois planos π_1 e π_2 é definido como o ângulo agudo entre os vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}|}{\|\mathbf{n_1}\| \, \|\mathbf{n_2}\|}$$

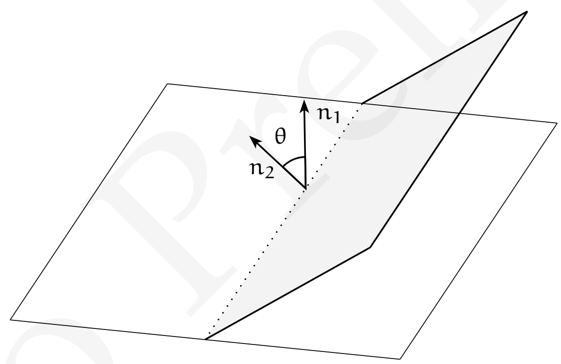


Figura 3.5

Dois planos π_1 e π_2 com vetores normais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ respectivamente, são ditos ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, o que implica que seus vetores diretores são perpendiculares, i.e,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

Exemplo 3.27 *Determine a equação do plano que contém o ponto* $(1, 0, 1)$ *e que é perpendicular aos planos* $2x + y + z = 2$ *e* $-x + z = 7$.

Solução: O vetor $\mathbf{n}$ normal ao plano, será ortogonal aos vetores $(2, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$. E assim

$$\mathbf{n} = (2, 1, 1) \times (-1, 0, 1) = (1, -3, 1)$$

Logo a equação geral do plano é da forma $x - 3y + z = d$. Como o ponto $(1, 0, 1)$ pertence ao plano:

$$d = 1 + 3 \cdot 0 + 1 = 2$$

E a equação geral é $x - 3y + z = 2$. □

Exercícios.

Ex. 4.11 — Ache os ângulos entre os planos:

a) $3x - y + z = 2$ e $x - y = 6$

b) $x + 2y - 3z = 8$ e $2x + 4y - 6z + 31 = 0$

c) $x = 0$ e $y = 0$

d) $x = 1$ e $x + y = 1$

Ex. 4.12 — Escreva a equação vetorial do plano que passa pelo ponto P e é perpendicular as planos:

$$\mathbf{rn_1} + D1 = 0 \qquad \mathbf{rn_1} + D1 = 0.$$

Escreva também a equação geral desse plano dado que:

$$P : (x_0, y_0, z_0) \quad \mathbf{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \quad \mathbf{n_1} = (a_2, b_2, c_2)$$

Ex. 4.13 — Ache a equação do plano perpendicular ao plano xz, que contem o ponto $(1, 2, 3)$ e que faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com $3x + 2y + z = 1$.

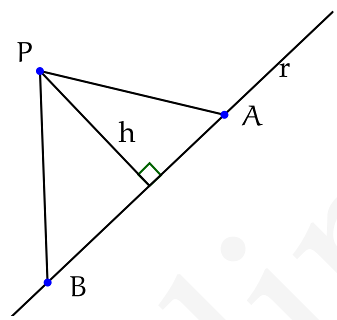
3.5 DISTÂNCIAS

Passemos agora a um novo problema: definir e determinar a distância entre dois objetos (ponto, reta ou plano) no espaço.

Sabemos facilmente como determinar a distância entre dois pontos no espaço. Bastando para isso medir o tamanho do vetor determinado por estes pontos. Mas como medir a distância entres outros dois objetos? Este será nosso objetivo nesta seção.

3.5.1 Distância de um ponto a uma reta

A distância entre um ponto P e uma reta r é definida como a distância entre P e ponto $A \in r$ mais próximo de P. Para determinar a distância de P a r, sejam A e B dois pontos de r e considere o triângulo ABP.



A área do triangulo ABP pode ser calculada usando o produto vetorial e assim temos:

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\|$$

Por outro lado usando que a área do triângulo é metade da base vezes a altura temos:

$$A = \frac{\|AB\|h}{2}$$

e assim $\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|h$ e logo

$$h = d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Exemplo 3.28 *Calcule a distância do ponto* $P = (1, 0, 2)$ *a reta* $r : (1, 0, 1) + (2, 0, 1)t$.

Solução: Escolhemos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, 0, 2)$. E assim $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$

$$d(P, r) = \frac{\|(0, 0, 1) \times (2, 0, 1)\|}{\|(2, 0, 1)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

□

Assim como nas seções anteriores, o caso bidimensional pode ser estudado separadamente. Queremos então utillizar as expressões determinadas anteriormente para encontrar uma maneira de expressar a distância do ponto $P = (p, q)$ a reta $Ax + By + C = 0$.

Começaremos tratando o caso onde a reta é paralela ao eixo x ($A = 0$). Neste caso, a reta terá equação $y = -\frac{C}{B}$ e a distância será dada pela diferença entre a coordenada y do ponto e da reta, ou seja, $d(P, r) = |q + \frac{C}{B}|$.

Se a reta r não é paralela ao eixo y, então ela intercepta o eixo x no ponto $(-\frac{C}{A}, 0)$ e seu vetor diretor pode ser escolhido como $\mathbf{v} = B\mathbf{i} - A\mathbf{j}$ (por quê?).

Desta forma, a equação vetorial da reta é $r : (-\frac{C}{A}, 0) + (B, -A)t$. Escolhendo $A = (\frac{C}{A}, 0)$ e $B = A + \mathbf{v}$, temos que $\overrightarrow{AP} = (p + \frac{C}{A}, q)$, e temos

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

onde o vetor $\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}$ pode ser calculado através do seguinte determinante formal

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B & -A & 0 \\ p + \frac{C}{A} & q & 0 \end{vmatrix},$$

e assim $\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v} = (Bq + Ar + C)\,\mathbf{k}$.

Segue então que $\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\| = |Ar + Bs + C|$ e assim

$$d(P, r) = \frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Observe que fazendo $A = 0$ na expressão acima, recuperamos a expressão encontrada para retas paralelas ao eixo x, e portanto esta fórmula pode ser usada em qualquer caso.

Exemplo 3.29 *Calcule a distância do ponto* $(1, 3)$ *a reta* $4x - 2y - 3 = 0$.

Solução:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

□

Exemplo 3.30 *Existem duas pontos cuja coordenadas* x *são iguais a* -3 *e que distam* 6 *da reta* $r: 5x - 12y - 3 = 0$. *Ache as coordenadas* y *desse ponto.*

Solução: Ambos os pontos podem ser representados como $(3, s)$. Para esses pontos temos que:

$$d = \frac{|5(-3) - 12s - 3|}{13} = 6$$

e logo $|18 + 12s| = 78$ e logo $s = 5$ ou $s = -8$. E os pontos são $(-3, 5)$ e $(-3, -8)$ □

Exercícios.

Ex. 5.1 — Ache as distâncias entre os pontos e as retas dadas:

a) $(-3, 4)$ a $5x - 2y = 3$.

b) $(-2, 5)$ a $7x + 3 = 0$.

c) $(-3, 4)$ a $4y + 5 = 0$.

d) Origem a $3x - 2y + 6 = 0$.

Ex. 5.2 — Determine a distância δ entre o ponto $A = (3, 1)$ e a reta $x + 2y = 3$.Pelo seguinte método: primeiro ache o ponto B sobre essa reta tal que $d(A, B) = \delta$. Escreva a equação da reta de forma paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ e calcule o produto interno dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e v. Conclua.

Ex. 5.3 — Ache o comprimento das alturas de um triângulo com vértices $(a, 0), (b, 0), (0, c)$.

Ex. 5.4 — Ache a distância entre as duas retas paralelas: $3x + 2y = 6$ e $6x + 4y = 9$. (Porque essas retas são paralelas?)

Ex. 5.5 — Prove que a distância entre duas retas paralelas cujas equações são $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + C' = 0$ é:

$$\frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

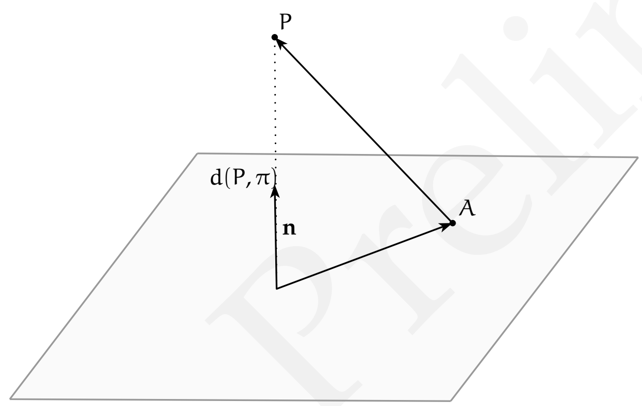
Ex. 5.6 — Ache os pontos da reta $y = 2x + 1$que estão situados a distância 2 da origem.

Ex. 5.7 — Quais são as retas paralelas a reta $3x - 4y = 1$ que estão a distância 5 desta?

3.5.2 Distância de um ponto a um plano

A distância entre um ponto e um plano é definida de maneira análoga ao caso ponto-reta. Considere então um plano π com vetor normal $\mathbf{n}$, e P um ponto qualquer. Para calcularmos a distância de P a π, tome A um ponto qualquer de π e considere o vetor $\overrightarrow{AP}$. A distância de P a π será dada então pela norma da projeção de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\mathbf{n}$, ou seja,

$$d(P,\pi) = \|\text{Proj}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{AP}\| = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}\right|}{\|\mathbf{n}\|}.$$



Se na expressão anterior tomarmos $P : (x_0, y_0, z_0)$, $A : (a_1, a_2, a_3)$ e supormos que o plano π tem equação geral $ax + by + cz = d$, teremos que o vetor normal a este plano é $\mathbf{n} = (a, b, c)$, e portanto

$$d(P,\pi) = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(y_0 - y_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.10}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - (ax_1 + by_1 + cy_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.11}$$

Como o ponto A pertence ao plano, temos que $ax_0 + by_0 + cy_0 = d$ e assim

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{3.12}$$

Observe que, como seria de se esperar, a distância não depende do ponto A escolhido.

Exercícios.

Ex. 5.8 — Determine a distância entre os planos dados e a origem:

a) $x = 5$

b) $x + y = 1$

c) $2x + y - z = 0$

d) $2x + y + z = 2$

Ex. 5.9 — Se a distância da origem a um plano é d, e esse plano intercepta os eixos em $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$ prove que:

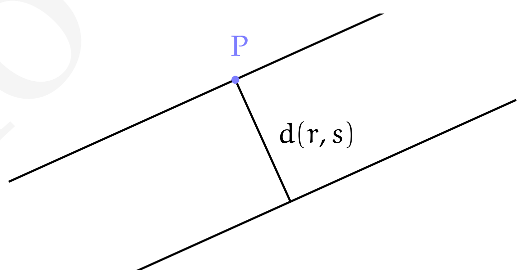
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3.5.3 Distância entre Duas Retas

Seguindo as idéias utilizadas nos casos anteriores, a distância entre duas retas r e s será definida como a menor distância entre um ponto r e um ponto de s.

Sejam então r, s duas retas no espaço tais que $r : A + \mathbf{u}t$ e $s : B + \mathbf{v}t$.

Se as retas forem coincidentes ou concorrentes, claramente a distância entre elas é nula. Se as retas forem paralelas e não coincidentes a distância entre elas é igual a distância de um ponto P qualquer de r a s, e assim essa distância pode ser calculada usando os conhecimentos obtidos na seção anterior.



Se as retas r e s forem reversas começamos escolhendo um ponto P sobre r e um ponto Q sobre s. Projetamos então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ sobre o vetor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ que é ortogonal as retas r e s. A norma dessa projeção é a distância entre as retas.

Como

$$\text{Proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

e assim:

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot \mathbf{n}\right|}{\|\mathbf{n}\|^2} \tag{3.13}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot \mathbf{n}\right|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2} \tag{3.14}$$

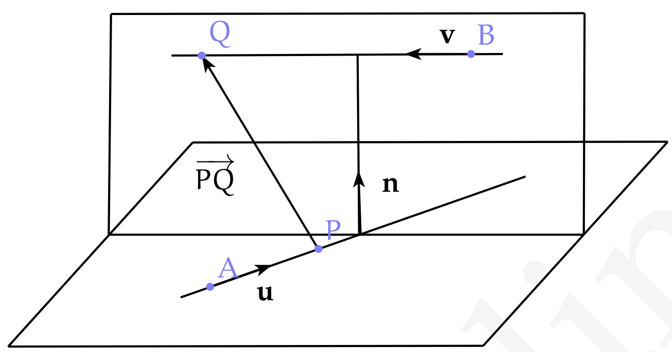


Figura 3.6: Distância entre retas reversas.

Exercícios.

Ex. 5.10 — Determinar as equação da reta que passa pelo ponto $(3,1)$ e tal que a distância desta reta ao ponto $(-1,1)$ é igual a $2\sqrt{2}$. (Duas soluções)

Ex. 5.11 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância a reta $4x-3y+12=0$ é sempre igual a duas vezes a distância ao eixo x.

Ex. 5.12 — O ângulo de inclinação de cada uma de duas retas paralelas é α. Se uma reta passa pelo ponto (a,b) e a outra pelo ponto (c,d), mostrar que a distância entre elas é

$$|(c-a)\operatorname{sen}\alpha-(d-b)\cos\alpha|$$

Ex. 5.13 — Ache as equações dos planos paralelos ao plano $3x-2y+6z+8=0$ e que distam 2 desse plano.

Ex. 5.14 — Ache a distância entre os planos paralelos

a) $4x + 8y + z = 9$ e $4x - 8y + z + 18 = 0$

b) $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ e $6x - 4y + 12z + 12 = 0$

Ex. 5.15 — Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(2, 1, 5)$ e que intercepta a reta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

perpendicularmente.
$(-2, 1)$ é sempre igual a três vezes a distância a reta $y + 4 = 0$.

Ex. 5.16 — Determinar a distância do ponto a reta:

a) ponto $(7, 7, 4)$ à reta $6x + 2y + z - 4 = 0$ e $6x - y - 2z - 10 = 0$

b) ponto $(-1, 2, 3)$ à reta $\frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}$

Ex. 5.17 — Ache os pontos sobre o eixo y que distam 4 do plano $x + 2y - 2z = 0$

Ex. 5.18 — Determinar a distância d do plano $3x - 12y + 4z - 3 = 0$ ao ponto $A = (3, -1, 2)$ pelo seguinte processo: Encontrar o ponto B , pé da perpendicular desde A até o plano. Então determinar d como o comprimento do segmento AB.

Ex. 5.19 — Determine a distância do ponto $(2, 2, 2)$ a reta

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= 3t + 2 \\ z &= 5t + 1 \end{aligned}$$

Ex. 5.20 — Determine a distância entre as retas r que tem equação paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= 3t + 2 \\ z &= 5t + 1 \end{aligned}$$

e a reta s que tem equação paramétrica:

$$\begin{aligned} x' &= 4s + 1 \\ y' &= 2s + 2 \\ z' &= 1s + 5 \end{aligned}$$

3.6 RETAS EM COORDENADAS POLARES

Se sobrepormos um sistemas de coordenadas polares a um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o polo e a origem coincida e a direção principal OA, sobreponha-se a parte positiva do eixo x (veja figura 3.7), podemos ver que a relação entre as coordenadas para o mesmo ponto é dada por:

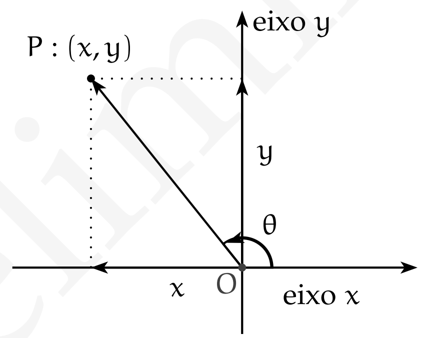


Figura 3.7

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \tag{3.15}$$

sendo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \mathrm{arcsen}\,\frac{y}{x^2 + y^2} = \arccos\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Substituindo as relações dada por 3.15, na equação geral de uma reta $s : Ax + By = C$, temos que esta pode ser expressa em coordenadas polares como:

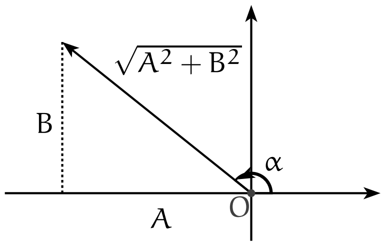
$$r\,(A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta) = C \tag{3.16}$$

ou equivalentemente:

$$\frac{C}{r} = (A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{3.17}$$

Exemplo 3.31 *A equação da reta $3x + 2y = 7$ em coordenadas polares é:*

$$r(3\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta) = 7$$



Sem perda de generalidade, podemos assumir que C é positivo (Mudando os sinais de ambos os lados se necessário).

Se construirmos, no quadrante apropriado, um triângulo retângulo de lados A e B, a hipotenusa desse triângulo será $\sqrt{A^2+B^2}$, logo:

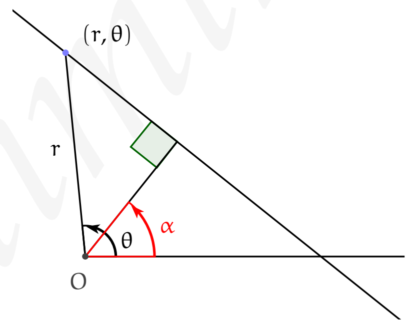
$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \operatorname{sen}\alpha, \quad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha$$

Se dividirmos ambos os lados da equação 3.16 por $\sqrt{A^2+B^2}$ ficamos com:

$$r\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen}\theta\right) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

e consequentemente

$$r\left(\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta\right) = h$$



sendo

$$h = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

e desse modo a equação da reta em coordenadas polares pode ser escrita como:

$$r\cos(\theta-\alpha) = h$$

A equação anterior é conhecida como equação padrão da reta em coordenadas polares.

O significado geométrico de h é a distância da reta a origem enquanto α é o ângulo entre o eixo polar e a reta passando pela origem e pelo ponto que realiza a distância minima entre a origem e a reta s. Podemos ver esse fato revertendo o problema, isto é, seja s uma reta tal que a distância dessa reta à origem O é h. Se tomarmos um ponto de coordenadas (r,θ) sobre essa reta de vetor posição $\mathbf{r}$. Então o triângulo delimitado por h, r e a reta s forma um triangulo retângulo com hipotenusa r. Em relação ao ângulo $\theta-\alpha$ o lado adjacente é h e assim

$$\cos(\theta-\alpha) = \frac{h}{r}$$

e logo

$$r\cos(\theta-\alpha) = h$$

Exemplo 3.32 *Ache o tamanho e a direção do segmento que liga a perpendicularmente origem a reta abaixo.*

$$\frac{1}{r} = 8\cos\theta + 6\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Solução: Começaremos colocando a equação

$$\frac{1}{r} = 8\cos\theta + 6\,\mathrm{sen}\,\theta$$

na forma padrão:

$$r\cos(\theta - \alpha) = h$$

que expandindo fica:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h}\cos\alpha\cos\theta + \frac{1}{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Igualando os temos temos:

$$\frac{1}{h}\cos\alpha = 8 \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{h}\,\mathrm{sen}\,\alpha = 6 \tag{3.19}$$

Elevando as equações 3.18 e 3.19 ao quadrado e somando temos:

$$\frac{1}{h^2} = 100$$

e consequentemente $h = \frac{1}{10}$.

Dividindo a equação 3.19 pela equação 3.18 temos:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Consequentemente, temos que a distância é $\frac{1}{10}$ e a inclinação da reta é $\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)$

□

Exercícios.

Ex. 6.1 — Ache a distância da reta

$$\frac{6}{r} = \cos\theta + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

a origem.

Ex. 6.2 — Ache o tamanho e a direção do segmento que liga a perpendicularmente origem a reta abaixo.

$$\frac{2}{r} = 4\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta$$

Ex. 6.3 — Identifique e desenhe as seguintes retas, colocando as na forma padrão. Confira suas respostas usando coordenadas cartesianas

a) $r\cos\theta = 3$

b) $r\,\text{sen}\,\theta = 3$

c) $r(5\cos\theta + \text{sen}\,\theta) = 3\sqrt{2}$

d) $5(5\cos\theta - 12\,\text{sen}\,\theta) = 39$

Ex. 6.4 — Mostre que se uma reta é paralela ao eixo x e dista h da origem, então sua equação é dada por $r\,\text{sen}\,\theta = h$

Ex. 6.5 — Mostre que se uma reta é paralela ao eixo y e dista h da origem, então sua equação é dada por $r\cos\theta = h$ ou por $r\cos\theta = -h$, dependendo se a reta se encontra a esquerda ou a direita do eixo y.

Ex. 6.6 — Mostre que a equação da reta ligando os pontos de coordenadas polares (r_1, θ_1) (r_2, θ_2) é dada por:

$$\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{r} = \frac{\text{sen}(\theta - \theta_1)}{r_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta}{r_1}$$

Ex. 6.7 — Dada a equação $\frac{C}{r} = f(\theta)$ com

$$f(\theta) = a\cos(\theta + \alpha) + b\cos(\theta + \beta)$$

a) Mostre que esta equação representa uma linha reta.

b) Conclua que $\frac{C_2}{r} = f(\theta + \pi/2)$ também representa uma linha reta. E que essa reta é perpendicular a reta de equação $\frac{C}{r} = f(\theta)$.

c) Mostre finalmente que todas as retas perpendiculares a $\frac{C}{r} = f(\theta)$ são da forma $\frac{C_2}{r} = f(\theta + \pi/2)$ para algum C_2

4 CÍRCULOS E ESFERAS

4.1 EQUAÇÕES CANÔNICAS DE CÍRCULOS E ESFERAS

Um círculo é o conjunto de pontos no plano que estão a uma certa distância r de um ponto dado (a, b).

Desta forma um ponto (x, y) pertence ao círculo de centro (a, b) e raio r se e somente se satisfaz a equação:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r}$$

ou equivalentemente:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

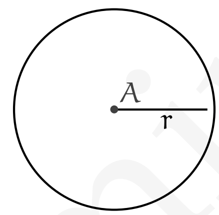


Figura 4.1: Círculo de centro A e raio r.

No caso de uma esfera de centro (a, b, c) e raio r a equação reduzida da esfera é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

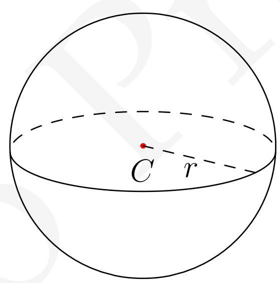


Figura 4.2: Esfera de Centro C e raio r.

Exemplo 4.1 *Achar a equação do círculo de centro* $(-3, 1)$ *que é tangente a reta* $3x - 4y - 2 = 0$

Solução: Temos o centro e precisamos achar o raio. O raio é a distância entre a reta e o ponto, já que a tangente a um círculo é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência. Logo:

$$r = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

e assim a equação do círculo é:

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ ou } x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

$\square$

Exemplo 4.2 *Achar a equação da esfera cujo diâmetro é o segmento que liga* $(3, -1, 2)$ *a* $(5, 3, 4)$.

Solução: Não temos nem o centro nem o raio aparentemente. Mas temos que o centro é o ponto médio do segmento e que o raio é metade do diâmetro. Logo:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6}$$

O ponto médio é $(4, 1, 3)$ e logo a equação da esfera é:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 6$$

$\square$

Exemplo 4.3 *Identificar a curva cuja equação é:*

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

Solução: Identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 - 6x$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos 9 e $y^2 - 4y$ pode ser convertido num quadrado somando 4. Desta forma, somaremos $4 + 9$ em cada lado da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$. Logo temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \tag{4.1}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 4 + 9 \tag{4.2}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \tag{4.3}$$

Logo a curva é um círculo de raio 5 e centro $(3, 2)$. $\square$

Podemos generalizar o exemplo anterior:

Exemplo 4.4 *Identificar a curva cuja equação é:*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Solução: Como no exemplo anterior, identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 + Ax$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos $\frac{A^2}{4}$ e $y^2 + By$ pode ser convertido num quadrado somando $\frac{B^2}{4}$. Desta forma, somaremos $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$ em cada lado da equação:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{4.4}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \tag{4.6}$$

Observamos que para a equação anterior ser a equação de um circulo, $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$, e assim temos que ter $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

No caso em que $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$, o lugar geométrico descrito pela equação 4.6 é vazio, pois a equação não pode ser satisfeita pois a soma de quadrados é necessariamente negativa.

No caso em que $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$, o lugar geométrico descrito pela equação 4.6 é o ponto $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, pois se a soma de quadrados perfeitos é 0 cada termo da soma é zero. □

De modo análogo, podemos demonstrar que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

descreve uma esfera se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D > 0$, um ponto se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D = 0$ e o conjunto vazio se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D < 0$.

Exemplo 4.5 *A superfície cuja equação é:*

$$12 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 8z + z^2 = 0$$

é uma esfera. Encontre seu centro e raio.

Solução: Completando os quadrados temos

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) - 1 - 4 - 16 + 12 = 0.$$

Daí segue que:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 9$$

E logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -4)$ e o raio é 3. □

4.1.1 Círculo por três pontos

Três pontos não colineares determinam um único círculo. Assim sendo, fixados P_1, P_2 e P_3 não colineares podemos facilmente encontrar a equação do círculo que passa por tais pontos. Tal equação pode ser encontrada observando que a equação geral de um círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

e que um ponto pertence ao círculo se e somente se suas coordenadas satisfazem tal equação. A substituição de cada ponto resulta assim numa equação linear nas variáveis A, B, C e assim o fato dos três pontos pertencerem ao círculo nos fornecem um sistema linear em três equações e três variáveis A, B, C. Resolvendo tal sistema encontramos, então, a equação do círculo.

Exemplo 4.6 *Determine a equação do círculo que passa pelos pontos* $(-1, 2)$, $(0, 1)$ *e* $(-3, 2)$.

Solução: Substituindo os pontos na equação

temos o sistema:

$$\begin{cases} 5 - A + 2B + C = 0 \\ 1 + B + C = 0 \\ 13 - 3A + 2B + C \end{cases}$$

cujas solução é $A = 4, B = 0, C = -1$. E logo a equação é

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0.$$

Completando quadrado obtemos, então:

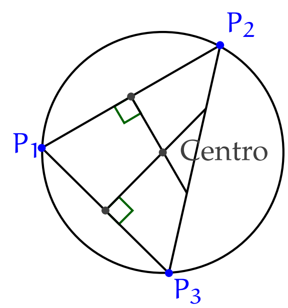
$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 - 4 - 1 = 0.$$

Donde segue:

$$(x+2)^2 + y^2 = 5.$$

Desse modo vemos que o círculo que passa por tais pontos tem centro $(-2, 0)$ e raio $\sqrt{5}$. □

É possível encontrar a equação de um círculo por três pontos não colineades de uma outra maneira. Nessa consideramos o triângulo determinado pelos pontos P_1, P_2, P_3 e esse circunscrito na circunferência. Assim o seu centro é o circuncentro desse triângulo, isto é, o encontro das mediatrizes.



Exemplo 4.7 *Determine a equação do círculo que passa pelos pontos* $(-1, 2)$, $(0, 1)$ *e* $(-3, 2)$.

Solução: A equação da reta passando pelos pontos $(-1, 2)$, $(0, 1)$ é $y - 1 = -x$, e como o ponto médio desses pontos é: $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ temos que a mediatriz relativa a esse lado é: $y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2}$ (lembrando que como a mediatriz é perpendicular ao lado seu coeficiente angular é igual a menos o inverso do coeficiente da reta).

De modo análogo a equação da reta passando pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 2)$ é $y = -\frac{x}{3} + 1$ e a equação da mediatriz é: $3x = -6 + y$

temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x = -6 + y \\ y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

cujas solução é $x = -2, y = 0$, ou seja o centro da circunferência é $(-2, 0)$. O raio pode ser calculado observando que este será a distância do centro $(-2, 0)$ a um dos vértices do triângulo, por exemplo $(0, 1)$. Assim $r^2 = 5$, e logo a equação é:

$$(x+2)^2 + y^2 = 5.$$

□

Exemplo 4.8 *Obtenha a equação da esfera que passa pelos pontos* $(0,0,1), (2,0,0), (1,1,1), (0,1,0)$

Solução: Impondo que os pontos pertençam a esfera temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
&1 + C + D = 0 \\
&4 + 2A + D = 0 \\
&3 + A + B + C + D = 0 \\
&1 + B + D = 0
\end{aligned}$$

cuja solução é $A = -\frac{5}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{1}{3}, D = -\frac{2}{3}$ e assim a equação da esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Completando quadrado obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - \frac{5x}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) + \left(y^2 - \frac{y}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) + \\
&\qquad + \left(z^2 - \frac{z}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{24}{36} = 0.
\end{aligned}$$

Donde segue:

$$\left(x^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{51}{36}.$$

□

Exercícios.

Ex. 1.1 — Ache a equação dos seguintes círculos:

a) Centro $(-2, 5)$ e raio $r = 3$.

b) Centro $(1, 3)$ e raio $r = 2$

c) Centro a origem e raio $r = a$

d) Centro $(5, 2)$ e passando pelo ponto $(2, 3)$

e) Tangente ao eixo y na origem e raio a

f) Diâmetro $(5, 2)$ a $(-2, 10)$

g) Centro $(3, -2)$ tangente a $2x - y = 0$

h) Tangente a $2x - 5y + 1 = 0$ no ponto $(2, 1)$ e raio 3 (duas respostas)

Ex. 1.2 — Identifique, dando o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

c) $x^2 + y^2 = 2ax$

d) $4x^2 - 4x = 5y - 4y^2$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

Ex. 1.3 — Ache a equação do círculo que passa pelos pontos $(4,0)$, $(0,3)$ e a origem.

Ex. 1.4 — Ache a equação dos seguintes círculos

a) Tangente aos eixos coordenados coordenados no segundo quadrante e com raio $r = 4$.

b) Tangente ao eixo x, ao eixo y e a linha que intercepta o eixo x e o eixo y em 3 e 2 respectivamente.

Ex. 1.5 — Verifique que as equações abaixo descrevem esferas, em caso afirmativo identifique o centro e o raio:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

b) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 14z + 58$

c) $x^2 + y^2 - 6y + z^2 + 4z + 16$

d) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - z^2 + 6z - 29$

Ex. 1.6 — Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ então a equação da esfera que tem P_1P_2 como diâmetro é

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

4.2 RETAS TANGENTES E PLANOS TANGENTES

Uma reta é dita tangente a um círculo se a intersecção entre essa reta e o círculo for somente um ponto. Para uma reta tangente o seu vetor diretor é perpendicular ao vetor ligando o raio ao ponto de intersecção. Além disso a distância do centro do círculo a reta tangente é igual ao raio do círculo.

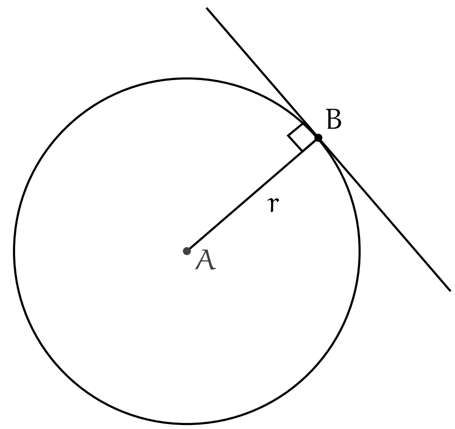


Figura 4.3: Reta tangente a um círculo

De modo análogo, dizemos que um plano é tangente a uma esfera se esse plano interceptar a esfera num único ponto. Nesse caso o vetor normal ao plano é paralelo ao vetor radial ligando o centro da esfera ao ponto onde o plano intercepta a esfera. E a distância do plano tangente ao centro da esfera é igual ao raio da mesma.

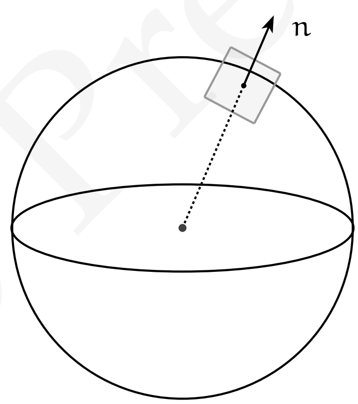


Figura 4.4: Plano tangente a uma esfera

Exemplo 4.9 *Ache a reta tangente ao círculo de equação* $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$ *no ponto* $(3, 3)$

Solução: Completando quadrados podemos colocar a equação $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$ na forma reduzida:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

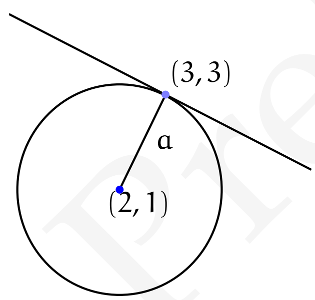
Logo o centro do círculo tem coordenadas $(2, 1)$. Logo, o vetor ligando o centro do círculo ao ponto $(3, 3)$ é $\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e assim o coeficiente angular da reta passando por estes pontos é igual a 2. Logo, o coeficiente da reta tangente é $-\frac{1}{2}$ (Por quê? Tente escrever a equação da reta tangente na forma padrão obtendo antes equações paramétricas para a mesma.). E assim a equação da reta tangente é:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-3)$$

ou

$$x + 2y = 9.$$

□



Podemos generalizar o exemplo anterior. Dado um círculo de equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Vamos calcular a equação da reta tangente no ponto (x_1, y_1).

Para tanto, consideraremos o vetor ligando o centro do círculo ao ponto de tangencia: $(x_1 - a)\mathbf{i} + (y_1 - b)\mathbf{j}$. Consequentemente a inclinação da reta passando por esses pontos é: $\frac{y_1-b}{x_1-a}$ Logo o coeficiente angular da reta tangente é $-\frac{x_1-a}{y_1-b}$. E assim a equação da reta tangente é da forma

$$(y - y_1) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x + x_1)$$

e logo

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

e assim expandindo:

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = k$$

para alguma constante k. Somando $(x_1 - a)(-a) + (y_1 - b)(-b)$ em ambos os lados da equação obtemos:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = k_2$$

para alguma constante k_2, que determinaremos agora. Se substituirmos $x = x_1$ e $y = y_1$ teremos que

$$k_2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

e assim a equação da reta tangente no ponto (x_1, y_1) é

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$$

Exemplo 4.10 *Obtenha as equações dos planos tangentes a esfera* $-3 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 2z + z^2 = 0$ *que são paralelos ao plano* $x - 2y + 2z = 3$.

Solução: Completando quadrados temos que a equação da esfera pode ser escrita como:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -1)$ e o raio é 3.

A equação geral de um plano paralelo a $x - 2y + 2z = 3$ tem equação da forma: $x - 2y + 2z = d$

Como esse plano é tangente a esfera a distância do centro dessas esferas ao plano é igual ao raio dessa esfera. E assim:

$$d(C, \pi) = \frac{|1 - 2(-2) + 2(-1) - d|}{9} = 3$$

e logo $d = -6$ ou $d = 12$ e assim as equações dos planos são $x - 2y + 2z = -6$ e $x - 2y + 2z = 12$.

□

Exercícios.

Ex. 2.1 — Ache a equação a reta tangente no ponto indicado:

a) $x^2 + y^2 = 25$, $(-3, 4)$

b) $x^2 + y^2 = 2x - 4y$, origem.

c) Ache as retas tangentes ao circulo $x^2 + y^2 = 4x$ que passam pelo ponto $(3, 2)$.

d) Uma corda da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ se encontra sobre a reta cuja equação é $x - 7y + 25 = 0$. Qual o comprimento dessa corda?

Ex. 2.2 — Para um triângulo qualquer encontrar:

a) a equação da circunferência circunscrita ao triângulo

b) a equação da circunferência inscrita ao triângulo

c) a equação da circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo. [**Dica:** *As coordenadas podem ser escolhidas de modo que os vértices do triangulo sejam* $(0, 0)$, $(0, a)$, (b, c)]

Ex. 2.3 — As equações dos lados de um triângulo são $9x + 2y + 13 = 0, 3x + 8y - 47 = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Encontrar a equação da circunferência circunscrita.

Ex. 2.4 — Mostrar que as tangentes de inclinação m à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ são $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

Ex. 2.5 — Qual a equação da circûnferencia que passa pelos pontos $(1, 2), (3, 4)$ e que tem centro sobre o eixo y?

Ex. 2.6 — Fixado a, quais devem ser os dois valores de b para que a reta $y = ax + b$ seja tangente ao círculo de centro na origem e raio r?

Ex. 2.7 — Uma circunferência de raio 5 é tangente a reta $3x - 4y - 1 = 0$ no ponto $(3, 2)$. Determinar sua equação (duas soluções).

Ex. 2.8 — Mostrar analiticamente que qualquer reta que passa pelo ponto $(-1, 5)$ não pode ser tangente a circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interprete o resultado geometricamente.

Ex. 2.9 — Ache a equação dos círculos que passam pelos seguintes conjuntos de pontos. Diga qual o centro, o raio e desenhe.

a) $(3,4),(-1,2),(-2,4)$

b) $(4,2),(-2,3),(-1,6)$

c) $(a,0),(b,0),(0,c)$

Ex. 2.10 — Mostrar que o plano tangente à esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ no ponto (a,b,c) tem equação $ax+by+cz=r^2$

Ex. 2.11 — Ache a equação da esfera que passa pelos pontos $(0,0,1)$,$(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e cujo centro esta no plano $x+y-z=0$

Ex. 2.12 — Ache a esfera que tem centro na reta

$$r:\begin{cases} x=2z-3 \\ y=z-1 \end{cases}$$

e passa pelos pontos $(6,-1,3)$ e $(0,7,5)$

Ex. 2.13 — Calcule a distância do ponto $(2,3,4)$ à esfera $x^2+4x+y^2-2y+z^2+4$.

Ex. 2.14 — Determine a equação da esfera cujo centro é $(3,2,-2)$ é que é tangente ao plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}s$$

Ex. 2.15 — Determine a equação da esfera cujo centro se encontra sobre o eixo X e que passa pelos pontos $(3,-4,2)$ e $(6,2,-1)$.

Ex. 2.16 — A equação de uma esfera é $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$. Determinar a equação da esfera concêntrica que é tangente ao plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}s+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}t$$

Ex. 2.17 — Ache os planos tangentes a esfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ que são paralelos ao plano $4x-y+3z = 2$

Ex. 2.18 — Encontre a equação dos planos que contem a reta r e são tangentes a esfera S:

$$r : \frac{x+6}{2} = y+3 = z+1$$

e $S : x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+4 = 0$.

4.3 CIRCUNFERÊNCIA EM COORDENADAS POLARES

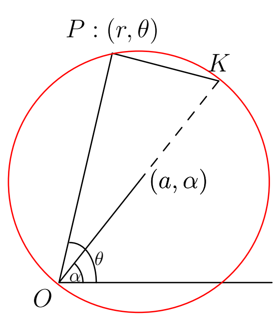
CENTRADA NA ORIGEM O caso mais simples ocorre quando a circunferência está centrada na origem nesse caso a circunferência é o conjunto de pontos que distam uma constante a da origem ou seja a equação em coordenadas polares é

$$r = a.$$

É fácil de ver que essa equação coincide com a em equação em coordenadas cartesianas. Observe que, em coordenadas cartesianas, $P = (x, y)$ pertence a tal círculo se e somente se: $x = a\cos\theta$ e $y = a \operatorname{sen}\theta$. Daí segue que:

$$x^2+y^2 = a^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta) = a^2.$$

PASSANDO PELA ORIGEM Dada uma circunferência de raio a e passando pela origem. As coordenadas polares do centro dessa circunferência são (a, α).



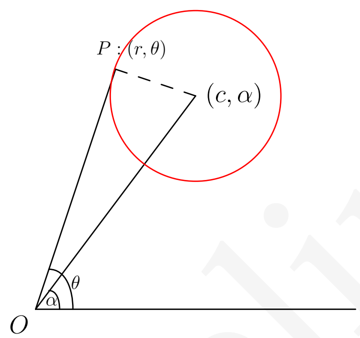
Considere o triângulo ΔOKP. Como $\overline{OK}$ é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo vemos que ΔOKP é retângulo em P. Da definição de cosseno segue então:

$$r = 2a\cos\left(\theta - \alpha\right).$$

FORMA GERAL Dado uma circunferência de centro (c, α) e raio a, usando a lei dos cossenos temos que:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\left(\theta - \alpha\right)$$

que é a equação da circunferência na forma geral.



Exercícios.

Ex. 3.1 — Mostre que o centro do círculo de equação $r = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta$ é

$$\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}, \operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right)$$

Ex. 3.2 — Mostre que a reta $r\operatorname{sen}\theta = 4$ é tangente ao círculo $r = 8\cos\theta$

Ex. 3.3 — Mostre que a equação da tangente ao círculo

$$r = 2a\cos\theta$$

no ponto (r_1, θ_1) é:

$$r\cos(\theta - 2\theta_1) = 2a\cos^2\theta_1$$

Ex. 3.4 — Mostre que para todos os valores de a a reta

$$r\cos(\theta-\alpha)=a+r_1\cos\alpha$$

é tangente ao círculo

$$r^2-2rr_1\cos\theta+r_1^2-a^2=0$$

5 MUDANÇA DE COORDENADAS

Como sabemos, um sistema de coordenadas Σ é um conjunto três vetores linearmente independentes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ (ou seja uma base E para $\mathbb{V}^3$) e um ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas.

Fixado no espaço um ponto P, sabemos que P pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas. Uma escolha adequada para o sistema de coordenadas pode simplificar diversos problemas de geometria analítica. Para isso torna-se fundamental, então, a descrição de alguns tipos de mudança de coordenadas, isto é, de algumas transformações que nos permitem identificar os objetos geométricos nos diferentes sistemas.

5.1 TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

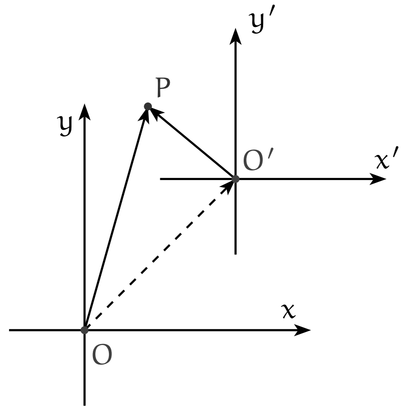
Neste capítulo concentraremos nossos esforços num tipo especial de mudanças de coordenadas, as transformações ortogonais. Estas apresentam-se como transformações de fundamental importância para nós uma vez que levam sistemas de coordenadas cartesianos em sistemas cartesianos.

Dentro das transformações ortogonais, atentaremos em especial a *translação* e *rotação*.

5.1.1 Translação

Uma translação é uma mudança de coordenadas entre dois sistemas $\Sigma = (O, B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}))$ e $\Sigma' = (O', B' = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}))$ na qual as bases B e B' são iguais, isto é, apenas O e O' diferem.

Fixado um ponto P do espaço, qual a relação entre as coordenadas (x, y, z) de P no sistema Σ e as coordenadas (x', y', z') de P no sistema Σ'?



Sejam (h, k, l) as coordenadas do ponto O' no sistema Σ. Temos então que, na base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$, $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{O'P} = (x', y', z')$ e $\overrightarrow{OO'} = (h, k, l)$. Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, temos que $(x, y, z) = (x', y', z') + (h, k, l)$. Dessa forma a mudança de coordenadas de Σ' para Σ assume a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

onde (h, k, l) as coordenadas do ponto O' no sistema de coordenadas sistema Σ_1.

Ex. 3.5 — Observações 5.1 *No plano, uma translação é uma mudança de coordenadas entre dois sistemas* $\Sigma = (O, B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}))$ *e* $\Sigma' = (O', B' = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}))$ *na qual as bases* B *e* B' *são iguais. Nesse, é fácil ver que:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Vamos agora usar a translação para simplificar a equação $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, eliminando seus os termos lineares.

As equações das translações são

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Substituindo na equação de segundo grau temos:

$$A\left(x' + h\right)^2 + B\left(y' + k\right)^2 + C\left(x' + h\right)\left(y' + k\right) + D\left(x' + h\right) + E\left(y' + k\right) + F = 0$$

expandindo temos:

$$\begin{aligned} &Ah^2 + Chk + 2Ahx' + Chy' + Dh + Bk^2 + Ckx' + 2Bky' + Ek + \\ &+ A(x')^2 + Cx'y' + Dx' + B(y')^2 + Ey' + F = 0 \end{aligned}$$

Agrupando os termos

$$A(x')^2 + B(y')^2 + Cx'y' + (2Ah + Ck + D)\,x' + (Ch + 2Bk + E)\,y' + \\ + Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0 \quad (5.1)$$

Queremos que os termos lineares se anulem, logo

$$2Ah + Ck + D = 0$$
$$Ch + 2Bk + E = 0$$

Se o sistema tiver solução, então teremos resolvido o problema. Isso ocorre por exemplo se

$$\begin{vmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{vmatrix} = 4AB - C^2 \neq 0$$

Caso o determinante se anule, podemos não ter nenhuma solução (sistema impossível) ou um número infinito de soluções (sistema indeterminado).

Notemos também que os coeficientes dos termos de grau dois não se alteram e que o termo constante F' vale $f(h,k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$

Exemplo 5.2 *Achar uma translação de eixos tal que a equação*

$$x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$$

Solução: Se substituirmos $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Teremos

$$\left(x'+h\right)^2 - 5\left(x'+h\right)\left(y'+k\right) - 11\left(y'+k\right)^2 - \left(x'+h\right) + 37\left(y'+k\right) + 52 = 0 \quad (5.2)$$

Donde temos:

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + (2h - 5k - 1)x' - (5h + 22k - 37)y' + \\ + (h^2 - 5hk - 11k^2 - h + 37k + 52) = 0$$

Como queremos que os termos em x' e em y' se anulem, devemos ter para isso

$$2h - 5k - 1 = 0$$
$$5h + 22k - 37 = 0$$

O sistema linear acima possui uma única solução $[h = 3, k = 1]$. E logo a equação 5.2 se simplifica a

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 69 = 0$$

□

Exemplo 5.3 *Simplifique a equação* $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$.

Solução: Usemos agora o deduzido imediatamente antes do Exemplo 5.2.

Sejam

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}.$$

Para termos os termos lineares nulos, devemos ter

$$\begin{cases} 8h - 4k + 12 = 0 \\ -4 + 14k + 6 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema linear chegamos a $h = -2$ e $k = -1$

Temos, assim, que $F' = g(-2, -1) = 4(-2)^2 - 4(-2)(-1) + 7(-1)^2 + 12(-2) + 6(-1) - 9 = -24$. Logo a equação no sistema Σ' fica

$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0$$

□

Exercícios.

Ex. 1.1 — Em cada um dos seguintes ítens, transformar a equação dada por uma translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ $(-1, 3)$
2. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$ $(-2, 1)$
3. $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4y + 3y - 3 = 0$ $(-2, -1)$
4. $xy - 3x + 4y - 13 = 0$ $(-4, 3)$

Ex. 1.2 — Nos ítens abaixo, por uma translação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida de termos do primeiro grau.

1.$2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$

2.$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$

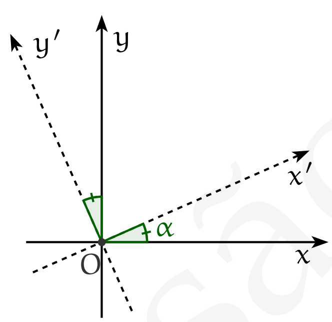
3.$xy - x + 2y - 10 = 0$

Ex. 1.3 — Dada uma equação geral de segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, prove que uma translação irá eliminar os termos lineares se e somente se $B^2 - 4AC \neq 0$

Ex. 1.4 — Prove que na equação de segundo grau $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, quando a origem é transladada para o ponto (h, k) o termo constante é transformado em $f(h, k)$.

5.1.2 Rotação

Considere no plano um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$. A rotação de Σ por um ângulo α corresponde a um sistema de coordenadas $\Sigma' = (O, \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2})$ onde os vetores $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}$ são iguais aos vetores $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ girados de α no sentido anti-horário.



Em coordenadas polares temos o seguinte. Consider um ponto P de coordenadas (r, θ). Substituindo θ por $\theta - \alpha$ rotacionamos o ponto P pelo angulo α (Por quê?). Ou seja, definindo um novo sistema de coordenadas polares por $r' = r$ e $\theta' = \theta - \alpha$, obtemos um sistema de coordenadas polares rotacionado de α.

A partir da identificação do sistema polar com o sistema cartesianas associado temos que as coordenadas (x, y) de P obedecem:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Por outro lado, denotando por (x', y') as coordenadas de P no sistema cartesiano rotacionado temos então:

$$x' = r\cos(\theta - \alpha)$$
$$y' = r\,\text{sen}\,(\theta - \alpha)$$

e assim

$$x' = r\cos\theta\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y' = r\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\,\alpha.$$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ segue que

$$x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y' = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha,$$

o que relaciona as coordenadas (x, y) de P no sistema Σ com as coordenadas (x', y') de P no sistema cartesiano Σ' rotacionado de um ângulo α.

Em notação matricial temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculando a transformação inversa (matriz inversa) segue então que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Donde:

$$x = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha,$$

Eliminemos agora o termo misto de $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ através de rotação.

Queremos achar uma rotação por um ângulo α tal que a equação acima se reduza a

$$A'x^2 + B'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Substituindo $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$ e $y = y' \cos\alpha + x' \operatorname{sen}\alpha$ em $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ teremos:

$$\begin{aligned}
&A\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + B\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + \\
&+C\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right) + D\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right) + \\
&+E\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right) + F = 0
\end{aligned}$$

Expandindo:

$$\begin{aligned}
&\;\; A(x')^2\cos^2\alpha - Ax'y'2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + A(y')^2\operatorname{sen}^2 + \\
&+B(y')^2\cos^2\alpha + Bx'y'2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(x')^2\operatorname{sen}^2 + \\
&+Cx'y'\cos^2\alpha + C(x')^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - C(y')^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - Cx'y'\operatorname{sen}^2\alpha + \\
&+Dx'\cos\alpha - Dy'\operatorname{sen}\alpha + Ey'\cos\alpha + Ex'\operatorname{sen}\alpha + F = 0
\end{aligned}$$

Donde chegamos a:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'x'y' + D'x + E'y + F' = 0,$$

onde:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
B' &= B\cos^2\alpha + A\operatorname{sen}^2\alpha - C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
C' &= C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha - 2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
D' &= D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha \\
E' &= E\cos\alpha - D\operatorname{sen}\alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Para eliminar o termo misto devemos ter

$$C' = C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha - 2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

seja zero, ou seja queremos que

$$C' = C\cos 2\alpha - (\operatorname{sen} 2\alpha)(A - B) = 0$$

E assim:

$$\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C}$$

Um modo mais facil de lembrar dessas equações é notar que $A' + B' = A + B$ e que

$$\begin{aligned} A' - B' &= A\cos^2\alpha + B\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + C\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \left(B\cos^2\alpha + A\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - C\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\right) \\ &= A\cos^2\alpha - B\cos^2\alpha - A\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + B\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + 2C\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha. \end{aligned}$$

Usando as formulas de ângulo duplo $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta = \cos(2\theta)$ e $2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \mathrm{sen}\,(2\theta)$ temos

$$\begin{aligned} A' - B' &= A'\cos 2\alpha - B'\cos 2\alpha + C'\,\mathrm{sen}\,2\alpha \\ &= \left(A' - B'\right)\cos 2\alpha + C'\,\mathrm{sen}\,2\alpha. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} A' - B' &= C\,\mathrm{sen}\,2\alpha\left(\frac{A-B}{C}\frac{\cos 2\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha} + 1\right) \\ &= C\,\mathrm{sen}\,2\alpha\left(\cot^2(2\alpha) + 1\right). \end{aligned}$$

Assim

$$A' - B' = C\csc(2\alpha).$$

Desse modo, para acharmos A' e B' temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} A' + B' & = A + B \\ A' - B' & = C\csc(2\alpha) = C\sqrt{\left(\frac{A-B}{C}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

Exemplo 5.4 *Simplifique a equação* $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

Solução: Como vimos na seção anterior a translação

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

elimina os termos lineares e transforma a equação para

$$4\left(x'\right)^2 - 4x'y' + 7\left(y'\right)^2 - 24 = 0$$

$h = -2$ e $k = -1$

Então uma rotação por $\cot(2\alpha) = \frac{A-B}{C} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ irá eliminar o termo misto. Note que se $\cot(2\alpha) = \frac{3}{4}$, então o ângulo α está no primeiro quadrante e $\csc 2\alpha = \frac{5}{4}$. (Só para sua curiosidade $\alpha \simeq 26.565$)

Logo

$$\begin{cases} A'' + B'' = A' + B' = 11 \\ A'' - B'' = C \csc(2\alpha) - 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear temos que $A'' = 3$ e $B'' = 8$ e logo a equação fica

$$3\left(x''\right)^2 + 8\left(y''\right)^2 = 24$$
$$\frac{(x'')^2}{8} + \frac{(y'')^2}{3} = 1$$

(Como veremos depois, uma elipse horizontal) $\square$

Exercícios.

Ex. 1.5 — Determinar as novas coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 30^o.

Ex. 1.6 — Para cada equação abaixo transformar a equação dada por uma rotação dos eixos coordenados do ângulo indicado:

1. $2x + 5y - 3 = 0$, $\operatorname{arctg} 2,5$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$, 45^o
3. $\sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0$, 60^o

Ex. 1.6 — Por uma rotação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida do termo xy.

1. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$
2. $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$
4. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

Ex. 1.6 — Prove que os números $A + C$ e $B^2 - 4AC$ são invariantes por rotações.

Apêndice

Apêndice

A MATRIZES E SISTEMAS LINEARES.

A.1 MATRIZES

Uma **matriz** real $m \times n$ é um conjunto ordenado de números reais dispostos em m linhas e n colunas. Os **elementos de uma matriz** serão indicados por dois índices dos quais o primeiro indica a posição na linha e o segundo na coluna. Desta forma o elemento a_{ij} refere-se ao elemento que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz é dita **quadrada** se o número de entradas é igual ao número de colunas. Uma matriz $1 \times n$ é dito **matriz linha** e uma matriz $m \times 1$ é dita **matriz coluna** . A **matriz nula** $n \times m$ é a matriz cujas todas as coordenadas são 0. A **matriz identidade** $n \times n$ é a matriz cujos termos da diagonal, isto é os termos a_{ij} com $i = j$, são iguais a 1 e os termos fora da diagonal são zeros.

A.1.1 Operações com Matrizes

Podemos definir a soma é a multiplicação de matrizes por escalares coordenada a coordenada.

Definição A.1 Dadas duas matrizes $n \times m$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ e c um escalar, definimos as matrizes $A + B$ e cA como:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad cA := (ca_{ij})$$

Exemplo A.2 *Se*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

então:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad 2A == \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Definição A.3 Dado A uma matriz $m \times p$ e B uma matriz $p \times n$. O produto de A por B denotado AB é definido como a matriz $C = (cij)$ cuja entrada ij é definida como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

É fundamental observar que o produto AB só está definido se o número de colunas de A 'igual ao número de linhas de B.

Exemplo A.4 *Se*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

A.2 DETERMINANTES

Recordaremos, sem apresentar as demonstrações, algumas propriedades dos determinantes.

Dada uma matriz A o **menor** dessa matriz com respeito do elemento a_{ij} é a matriz que se obtém ao remover da matriz A a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Denotaremos tal menor por A_{ij}.

Exemplo A.5 *O menor de uma matriz 3×3 em relação ao elemento a_{23} é:*

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square \\ \square & \square & \square \\ a_{31} & a_{32} & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

O **determinante** de uma matriz quadrada é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real, determinado pelo seguinte procedimento indutivo:

1. O determinante de uma matriz 1×1 é igual ao valor da entrada dessa matriz, i.e,

$$|a| = a$$

2. O determinante de uma matriz $n \times n$ pode ser calculado somando ao longo de uma linha ou coluna o produto de um elemento a_{ij} por $(-1)^{i+j}$ vezes o determinante do menor em relação ao elemento a_{ij}, i.e.,

   Assim, escolhendo uma linha, ou seja fixando um i temos:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} -(1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

   De modo análogo, escolhendo uma coluna, ou seja fixando um j temos:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} -(1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

O determinante não depende da escolha da linha ou coluna na expansão anterior.

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz 2×2 e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,|d| - b\,|c| = ad - bc$$

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz 3×3 e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

O sinal $(-1)^{i+j}$ da definição anterior pode ser facilmente calculado, notando que esse fator troca de sinal para cada termo adjacente da matriz, conforme o padrão abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Notação: Dado uma matriz quadrada de ordem n e de entradas a_{ij}, $A = (a_{ij}$, denotaremos suas colunas por $A_1, \ldots, A_n$. Logo:

$$A_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$$

e assim podemos reescrever a matriz A como $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$

Usaremos também a seguinte notação para representar o determinante de uma matriz quadrada:

$$|a \quad b \quad c \quad \ldots| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{vmatrix}$$

Assim por exemplo:

$$|a \quad b| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad |a \quad b \quad c| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Teorema A.6 *Se todos os elementos de uma coluna (ou linha) forem multiplicados por λ, então o determinante fica multiplicado por λ:*

$$|A_1 \quad A_2 \cdots \lambda A_i \cdots A_n| = \lambda\, |A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_n|$$

Teorema A.7 *O valor do determinante é inalterado se transpormos a matriz.*

$$\textit{Por exemplo:} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Teorema A.8 *O valor do determinante troca de sinal se duas colunas (ou linha) são intercambiadas.*

$$\left|A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n\right| = \left|A_1 \quad A_2 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n\right|$$

Teorema A.9 *Se duas linhas ou colunas de uma matriz são idênticas então o determinante dessa matriz é nulo.*

Teorema A.10 *O valor do determinante permanece inalterado se adicionarmos um múltiplo de uma coluna (linha) a outra coluna (linha).*

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_i \cdots A_j + \lambda A_i \cdots A_n \end{vmatrix}$$

A.2.1 Matriz Inversa

Dada uma matriz A o cofator do elemento a_{ij} é $c_i j = (-1)^{i+j} \left|A_{ij}\right|$. A matriz formada pelos cofatores é denominada matriz dos cofatores de A, e denotada por cof A

$$\mathrm{cof}(A) = (c_{ij}) = ((-1)^{i+j} \left|A_{ij}\right|)$$

A transposta da matriz dos cofatores é denominada matriz adjunta de A e é denotada por adj(A).

Uma matriz quadrada A é dita **invertível** se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Teorema A.11 *Dada uma matriz* A*, essa matriz é invertível se e somente se* $|A| \neq 0$ *e nesse caso a inversa de* A*, denotada* A^{-1} *é dada por:*

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}$$

Exemplo A.12 *Dado*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule a matriz inversa

Solução: Vamos começar calculando a matriz de cofatores:

O cofator em relação ao coeficiente a_{11} é:

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

O cofator em relação ao coeficiente a_{12} é:

$$-1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Calculando os cofatores como acima, temos que a matriz de cofatores é dada por:

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

E a matriz adjunta é:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

E assim como $\det A = 3$, temos que a matriz inversa é:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

A.3 TEOREMA DE CRAMER

Dado um sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = k_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = k_n \end{cases}$$

podemos escrever esse sistema como $AX = k$ onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

A matriz A é denominada matriz de coeficientes e k a matriz de constantes.

Teorema A.13 *Dado um sistema linear de n equações e n incógnitas*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \cdots = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \cdots = k_2 \\ \qquad \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \cdots = k_n \end{cases}$$

com $|A| \neq 0$. *Então as soluções desse sistema são:*

$$x_1 = \frac{|k \quad A_2 \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}, \quad x_2 = \frac{|A_1 \quad k \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_1 \quad A_2 \quad A_3 \cdots k|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

Demonstração: Escrevendo o sistema linear como $AX = k$. Como $\det A \neq 0$, a matriz A é invertível, e assim multiplicando ambos os lados do sistema por A^{-1} temos:

$$X = A^{-1}k.$$

Usando a caracterização da matriz inversa como a transposta da matriz de cofatores dividido pelo determinante, temos que esse sistema pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Dessa forma temos que

$$x_1 = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

Se expandirmos o determinante $|k \quad a_2 \quad a_3 \cdots \quad a_n|$ em relação a primeira coluna temos:

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

e assim temos que:

$$x_1 = \frac{|k \quad A_2 \quad A_3 \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

De modo análogo temos que:

$$x_i = \frac{|A_1 \quad A_2 \cdot k \cdots A_n|}{|A_1 \quad A_2 \cdots A_n|}$$

□

Exemplo A.14 *Resolva o sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 2 \\ -3x + y - 7z = -1 \end{cases}$$

Pelo teorema de Cramer, como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

temos que as soluções são

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-19}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-13}{2}$$

A.4 MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

O método de eliminação de Gauss para sistemas lineares baseia-se na aplicação de três operações básicas nas equações de um sistema linear:

- Trocar duas equações;
- Multiplicar todos os termos de uma equação por um escalar não nulo;
- Adicionar a uma equação o múltiplo da outra.

Ao aplicarmos as operações acima a um sistema linear obtemos um novo sistema tendo as mesma soluções que o anterior. Dois sistemas que possuem as mesmas soluções serão ditos equivalentes. Ao utilizar as aplicações anteriores de modo sistemático podemos chegar a um sistema equivalente mais simples e cuja solução é evidente.

Ilustraremos a utilização dessa técnica em alguns exemplos

Exemplo A.15 *Um sistema com solução única. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 30 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + y + z = 12 \end{cases}$$

Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.

Solução:

Começaremos representando esse sistema através de sua matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 30 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

Essa matriz é obtida adicionando a matriz de coeficientes uma coluna com a matriz de constantes.

No método de Gauss, o primeiro objetivo é colocar um 1 na entrada superior a esquerda da matriz. Para isso começamos dividido a primeira linha por 2. Fazendo isso obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

O próximo passo é fazer com que os outros coeficientes da primeira coluna sejam 0. Para isso multiplicamos a primeira linha por -2 e adicionamos a segunda, e multiplicamos a primeira linha por -4 e adicionamos na terceira. Feito isso obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & -9 & -6 & -27 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array}\right)$$

Agora repetiremos o procedimento na segunda coluna, ignorando a primeira linha. Para isso multiplicaremos a segunda linha por $-1/9$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array}\right)$$

Multiplicando a segunda linha por 15 e adicionando a terceira, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

E desta forma o sistema de equações correspondente é:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 15 \\ y + \frac{2}{3}z = 3 \\ -z = -3 \end{cases}$$

E logo $z = 3$. Substituindo na segunda equação temos $y = 1$ e substituindo esses valores na primeira equação temos $x + 4 + 9 = 15$ e assim $x = 2$.

□

Exemplo A.16 *Um sistema com múltiplas soluções Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 6y + 2z + 4w = 34 \\ 3x - 2y = -2 \\ 2x + 2y + z + 2w = 15 \end{cases}$$

Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.

Solução:

Neste caso a matriz aumentada é:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 2 & 4 & 34 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Dividindo a primeira linha por 2 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Multiplicando a primeira linha por -3 e somando na segunda e multiplicando a primeira linha por -2 e somando na terceira temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -19 \end{array}\right)$$

Trocando a segunda linha com a terceira e dividindo posteriormente a segunda por -4 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \end{array}\right)$$

Multiplicando a segunda linha por 11 e adicionando a terceira temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Finalmente multiplicando a terceira linha por -4 temos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

A última linha nos permite expressar z em função de w: $z = 3 - 2w$. Substituindo o valor de z na segunda linha temos que $y = 4$ e finalmente substituindo esses valores na primeira linha temos que $x = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

□

Exemplo A.17 *Resolva o sistema linear por escalonamento:*

$$\begin{cases} 1x + 4y = 12 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

Solução:

Neste caso a matriz aumentada do sistema é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

que pode ser reduzida à:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Esse sistema não possui soluções, pois a última linha é impossível de ser satisfeita $0 = -\frac{1}{3}$ □

Exercícios.

Ex. 4.1 — Prove que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t & = & a \\ 2x - 5y - 3z + 12t & = & b \\ 7x + y + 8z + 5t & = & c \end{cases}$$

admite solução se, e somente se, $37a + 13b = 9c$. Ache a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

Ex. 4.2 — Resolva os seguintes sistemas por escalonamento:

a) $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = -10 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z & = & 4 \\ 2x+5y-2z & = & 3 \\ x+7y-7z & = & 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x+2y-4z & = & 1 \\ x-y+z & = & 3 \\ x-y-3z & = & -3 \\ 3x+3y-5z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-2y+3z & = & 0 \\ 2x+5y+6z & = & 0 \end{cases}$

Ex. 4.3 — Determine m de modo que o sistema linear seja indeterminado:

$$\begin{cases} mx+3y=12 \\ 2x+1/2y=5 \end{cases}$$

Ex. 4.4 — Para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m^2x-y=0 \\ 1x+ky=0 \end{cases}$$

Determine o valor de m de modo que o sistema:

a) tenha solução única (trivial)

b) seja impossível

Ex. 4.5 — Determinar a e b para que o sistema seja possível e determinado

$$\left\{\begin{array}{c} 3x-7y=a \\ x+y=b \\ 5x+3y=5a+2b \\ x+2y=a+b-1 \end{array}\right|$$

Ex. 4.6 — Determinar o valor de k para que o sistema

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \end{array}\right|$$

tenha:

a) solução única

b) nenhuma solução

c) mais de uma solução

Ex. 4.7 — Resolva o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{array} \right|$$

Ex. 4.8 — Discuta os seguintes sistemas:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)\, z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{array} \right.$

Ex. 4.9 — Determine k para que o sistema admita solução.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -4x + 3y & = & 2 \\ 5x - 4y & = & 0 \\ 2x - y & = & k \end{array} \right.$$

Respostas de Alguns Exercícios

Respostas de Alguns Exercícios

Capítulo 1

1.1 a.) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$
b.) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

1.2 a.) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DE}$ **c.)** $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$

1.5 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1.6 Note que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\lambda}\lambda + 1\overrightarrow{AB}$ e como:

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

temos que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = -\left(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC}\right)$$

1.7 a.)

$$\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$$\overrightarrow{BD} = 5\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

b.) Os lados AD e BC são paralelos.

1.9 a.) $x = \frac{4u}{7} + \frac{3v}{14}, y = \frac{u}{7} - \frac{v}{14}$ **b.)** $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{4}$

2.7

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n+m)m'}{(n'+m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n'+m')m}{(n+m)n'}$$

2.11 Seja $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \text{e} \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$$

Como F, D e B são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD} + (1-\alpha)\overrightarrow{AD}$$

e assim

$$\overrightarrow{AF} = (1 - \frac{3}{4}\alpha)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha\overrightarrow{AC}$$

E consequentemente $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$ e $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$ e assim $\lambda = 2$.

Logo F divide o segmento $\overline{AC}$ na razão $1:2$.

Capítulo 2

3.6 Dado que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, calculando o produto de ambos os lados da equação sucessivamente com $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ temos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -9$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -25$$

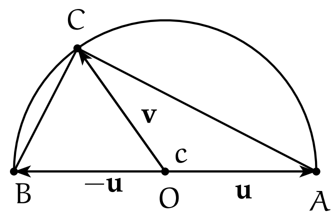
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = -49$$

Resolvendo o sistema anterior temos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{15}{2}$ e assim $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

3.10 Denotando $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}, -\mathbf{u} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{u} = \overrightarrow{OC}$ temos $\|\mathbf{u}\| = \|-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = r$.

E assim:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{v} + \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$



4.3

$$\mathbf{a} = -\frac{9}{14}\mathbf{u} + \frac{12}{7}\mathbf{v} - \frac{11}{14}\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

4.4 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$

4.5 $\mathbf{v} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

4.14 **[Dica:** *Escreva o determinante em termos dos menores da primeira linha e compare com* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$*. Isto também prova que* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$*. Porque?*]

4.15 A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$$

e assim temos que

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$$

Mas $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\alpha$, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|\operatorname{sen}\beta$ e $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\operatorname{sen}\gamma$
E logo:

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\beta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|}$$

Capítulo 3
Capítulo 4
Capítulo 5

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] APOSTOL,T.; *Calculus Vol. I*, Wiley 1967.

[2] BOULOS, P.; CAMARGO, I.; *Geometria Analitica - Um tratamento Vetorial*, Prentice Hall, 2006.

[3] CAROLI,A.; CALLIOLI, C.; FEITOSA, M.; *Matrizes vetores geometria analítica*, Nobel 1984.

[4] CHATTERJEE, D.; *Analytic Solid Geometry*, PHI Learning, 2004

[5] CROWE, M.; *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Dover 1994.

[6] LEITE, O.; *Geometria analítica espacial*, Edicoes Loyola, 1996

[7] SANTOS, R.; *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica* , Imprensa Universitária da UFMG, 2004.

[8] WEXLER C.; *Analytic Geometry: A vector approach*, Addison-Wesley Publ., 1961.

ÍNDICE REMISSIVO