PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- As pontuações das questões somam $11,0$ pontos.
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões, ou seja, não é possível ter nota acima de $10,0$ pontos.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,0). As diagonais de um paralelogramos têm o mesmo ponto médio. Prove isso dando detalhes os algébricos da demonstração, mas também explicando por que eles demostram a afirmação.

Exercício 2 (2,0). Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dois vetores linearmente independentes de V^3. Considere um quadrilátero $ABCD$ tal que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$.

(a) (**0,5**) Que tipo de quadrilátero é $ABCD$? Explique.
(b) (**0,5**) Sendo M o ponto médio do segmento BC, escreva $\overrightarrow{AM}$ em função de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.
(c) (**1,0**) Seja E o ponto de intersecção de AM com a diagonal BD. Calcule $\overrightarrow{BE}$ em função de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

Exercício 3 (2,0). Seja $\mathcal{E} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ uma base de V^3. Seja $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ tal que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{w} &= -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}.\end{aligned}$$

(a) (**0,5**) Mostre que $\mathcal{F}$ é uma base de V^3 e dê a matriz de mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.
(b) (**0,5**) Escreva $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ na base $\mathcal{E}$.
(c) (**1,0**) Escreva $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ na base $\mathcal{F}$.

Exercício 4 (3,0). Considere $\mathcal{E} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ uma base ortonormal de V^3. Sejam:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= (3,4,0)_{\mathcal{E}}\\ \overrightarrow{v} &= (0,25,0)_{\mathcal{E}}\\ \overrightarrow{w} &= (0,1,1)_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

(a) (**0,6**) Mostre que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é uma base de V^3.
(b) (**0,6**) Encontre as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{e_1}$ na base $\mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{e_1}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{u}$ e $||\overrightarrow{e_1}|| = 1$.
(c) (**0,6**) Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{v} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{e_1}}\overrightarrow{v}$ na base $\mathcal{E}$, e de um vetor $\overrightarrow{e_2}$ tal que $\overrightarrow{e_2}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{a}$ e $||\overrightarrow{e_2}|| = 1$.
(d) (**0,6**) Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{w} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{e_1}}\overrightarrow{w} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{e_2}}\overrightarrow{w}$ na base $\mathcal{E}$, e de um vetor $\overrightarrow{e_3}$ tal que $\overrightarrow{e_3}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{b}$ e $||\overrightarrow{e_3}|| = 1$.
(e) (**0,6**) Mostre que $\mathcal{G} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ é uma base ortonormal.

Exercício 5 (2,0). Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, mostre que:

(a) (**1,2**) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$;
(b) (**0,8**) $\big|\, ||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{v}||\, \big| \leq ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||$.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/