# PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

**IMPORTANTE:**

- As pontuações das questões somam $11,0$ pontos.
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões, ou seja, não é possível ter nota acima de $10,0$ pontos.
- Boa Prova!

**Exercício 1 (2,0).** Seja $OABC$ um tetraedro, e $M$ o ponto médio de $BC$.

(a) (**1,0**) $\mathcal{E} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base? Por quê?

(b) (**1,0**) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

**Exercício 2 (2,0).** Considere um triângulo $ABC$. Sejam $M$ o ponto médio de $AB$ e $N$ um ponto sobre $AC$. Prove que, se $MN$ é paralelo a $BC$, então $N$ é o ponto médio de $AC$.

**Exercício 3 (2,0).** Seja $\mathcal{E} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ uma base de $V^3$. Seja $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ tal que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{w} &= -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}.\end{aligned}$$

(a) (**0,5**) Mostre que $\mathcal{F}$ é uma base de $V^3$ e dê a matriz de mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.

(b) (**0,5**) Escreva $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ na base $\mathcal{E}$.

(c) (**1,0**) Escreva $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ na base $\mathcal{F}$.

**Exercício 4 (3,0).** Considere $\mathcal{E} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ uma base ortonormal de $V^3$. Sejam:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= (5, 0, 12)_{\mathcal{E}}\\ \overrightarrow{v} &= (169, 0, 0)_{\mathcal{E}}\\ \overrightarrow{w} &= (1, 1, 0)_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

[*Obs.: Se precisar (o que, de fato, não é necessário) use que* $144^2 = 20736$ *e* $156^2 = 24336$.]

(a) (**0,6**) Mostre que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é uma base de $V^3$.

(b) (**0,6**) Encontre as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{e_1}$ na base $\mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{e_1}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{u}$ e $||\overrightarrow{e_1}|| = 1$.

(c) (**0,6**) Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{v} - \text{proj}_{\overrightarrow{e_1}} \overrightarrow{v}$ na base $\mathcal{E}$, e de um vetor $\overrightarrow{e_2}$ tal que $\overrightarrow{e_2}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{a}$ e $||\overrightarrow{e_2}|| = 1$.

(d) (**0,6**) Encontre as coordenadas de $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{w} - \text{proj}_{\overrightarrow{e_1}} \overrightarrow{w} - \text{proj}_{\overrightarrow{e_2}} \overrightarrow{w}$ na base $\mathcal{E}$, e de um vetor $\overrightarrow{e_3}$ tal que $\overrightarrow{e_3}$ tenha mesma direção e sentido de $\overrightarrow{b}$ e $||\overrightarrow{e_3}|| = 1$.

(e) (**0,6**) Mostre que $\mathcal{G} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ é uma base ortonormal.

**Exercício 5 (2,0).** Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm a mesma medida se e somente se o paralelogramo é um retângulo.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
*E-mail address*: sinue@ufabc.edu.br
*URL*: http://sinue.ufabc.edu.br/