GEOMETRIA DIFERENCIAL: LISTA 1

Definição 0.1. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$. Seja $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, isto é $\beta(s(r)) = \alpha(r)$. Se $t(s)$, $n(s)$ (e $b(s)$) formam o referencial de Frenet de β, $k(s)$ (e $\tau(s)$) é a curvatura (e a torção) de β, então diremos que $t(r) = t(s(r))$, $n(r) = n(s(r))$ (e $b(r) = b(s(r))$) são o referencial de Frenet de α, e $k(r) = k(s(r))$ (e $\tau(r) = \tau(s(r))$) é a curvatura (e a torção) de α.

Exercício 1. Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, $r \in I$, uma curva regular plana (não necessariamente PCA). Mostre que:

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}; \qquad n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}};$$
$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Exercício 2. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular no espaço (não necessariamente PCA). Mostre que:

$$k(r) = \frac{|\alpha'(r) \times \alpha''(r)|}{|\alpha'(r)|^3},$$
$$\tau(r) = \frac{\langle \alpha'(r) \times \alpha'''(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r) \times \alpha''(r)|^2}.$$

Definição 0.2. Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma **hélice** se existe vetor unitário ν que forma um ângulo constante com $\alpha'(t), \forall t \in I$.

Exercício 3. Seja α curva regular de curvatura e torção não nulas. Mostre que α é hélice se e somente se $\frac{k}{\tau}$ é constante.

As seguintes sugestões de exercícios referem-se ao livro *"Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies"* do prof. Manfredo Perdigão do Carmo, 3^a Edição, Textos Universitários, SBM (2005).

- Seção 1.2: Exercício 4;
- Seção 1.3: Exercícios 2, 4, 7 e 10;
- Seção 1.5: Exercícios 6, 7, 8, 11 e 13;