GEOMETRIA DIFERENCIAL: LISTA 3

Exercício 1 (Superfície de revolução)**.** Considere, a curva $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $t \in (a, b)$, com $f(t) > 0$, para todo t, contida no plano xz. A superfície de revolução de α em torno do eixo Oz é dada pela imagem da aplicação:

$$\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\mathrm{sen}(u), g(v)),$$

onde u denota o ângulo de rotação (medido a partir do eixo Ox). Mostre que, se α é uma curva regular, então a superfície de revolução acima descrita é, de fato, uma superfície regular. A esfera é uma superfície de revolução como descrita acima? Justifique.

Nota. A curva α é chamada *curva geratriz* da superfície de revolução S; o eixo Oz, *eixo de rotação*; os círculos descritos pela rotação de pontos de α são ditos *paralelos* da superfície S, e as curvas cuja imagem é dada por φ com o ângulo u fixado são os *meridianos* de S.

Exercício 2 (Superfície tangente a uma curva)**.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que a curvatura $k(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Seja $U = \{(t, v) \in I \times \mathbb{R}; v \neq 0\}$. Defina $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ por:

$$\varphi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t).$$

Mostre que φ define uma superfície regular com duas componentes conexas que têm como fronteira o conjunto $\alpha(I)$.

Exercício 3. Considere a região do helicóide S descrita por

$$\varphi(u, v) = (u\cos v, u\mathrm{sen} v, v), \qquad u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi).$$

Seja $\tilde{S}$ o catenóide menos um meridiano dado por

$$\psi(a, b) = (a, \cosh a \cos b, \cosh a \mathrm{sen} b), \qquad a \in \mathbb{R}, b \in (0, 2\pi).$$

(a) Considere a mudança de coordenadas

$$u = \mathrm{senh} a, \quad v = b.$$

Mostre que a reparametrização de ψ é dada por

$$\tilde{\varphi}(u, v) = (\mathrm{arcsenh} u, \sqrt{1 + u^2}\cos v, \sqrt{1 + u^2}\mathrm{sen} v),$$

onde $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, 2\pi)$.

(b) Mostre que φ e $\tilde{\varphi}$ têm os coeficientes da primeira forma fundamental iguais e, portanto, são isométricas.

As seguintes sugestões de exercícios referem-se ao livro *"Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies"* do prof. Manfredo Perdigão do Carmo, 3ª Edição, Textos Universitários, SBM (2005).

- Seção 2.2: Exercício 3, 4, 7, 14, 17;
- Seção 2.3: Exercícios 3, 5, 10, 13, 15;
- Seção 2.4: Exercícios 1, 3, 7, 13, 21, 24, 28;
- Seção 2.5: Exercícios 7, 8, 11, 14;