GRUPOS - LISTA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Operações Binárias

Exercício 1. Diga se a definição de $*$ nos dá uma operação binária no conjunto. Em caso negativo diga quais das condições necessárias a uma operação binária são violadas. Em caso afirmativo diga se a operação binária é comutativa e/ou associativa.

(a) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = a - b$;
(b) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = a^b$;
(c) Em $\mathbb{R}$, defina $*$ por $a * b = a - b$;
(d) Em $\mathbb{Q}$, defina $*$ por $a * b = ab + 1$;
(e) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = 2^{ab}$;
(f) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = c$, onde c é o menor inteiro maior que a e b;
(g) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = c$, onde c é pelo menos 5 a mais que $a + b$;
(h) Em $\mathbb{Z}_+$, defina $*$ por $a * b = c$, onde c é o maior inteiro menor que o produto de a e b.

Exercício 2. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação:
Se $*$ e $*'$ são operações binárias num conjunto S, então:

$$a * (b *' c) = (a * b) *' (a * c) \qquad \forall a, b, c \in S.$$

2. Grupos

Exercício 3. Diga se o conjunto dado munido da operação binária $*$ é grupo. Em caso negativo diga quais das condições necessárias a um grupo são violadas.

(a) $\mathbb{Z}$ com $*$ dado por $a * b = ab$;
(b) $2\mathbb{Z} = \{2n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ com $*$ dado por $a * b = a + b$;
(c) $\mathbb{R}_+$ com $*$ dado por $a * b = \sqrt{ab}$;
(d) $\mathbb{Q}$ com $*$ dado por $a * b = ab$;
(e) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ com $*$ dado por $a * b = a/b$;
(f) $\mathbb{C}$ com $*$ dado por $a * b = |ab|$;

Exercício 4. Mostre que o conjunto dos complexos de norma 1 munido da operação de multiplicação é um grupo. (Lembre-se que um número complexo de tal tipo pode ser expresso na forma $\cos\theta + i\sin\theta$).

Exercício 5. Diga se os seguintes subconjuntos do conjunto das matrizes $n \times n$ munidos da operações binárias descritas são grupos.

(a) Matrizes diagonais com a multiplicação de matrizes.
(b) Matrizes diagonais, sem zero na diagonal, com a multiplicação;
(c) Matrizes diagonais, com elementos da diagonal 1 ou -1, com a multiplicação;
(d) Matrizes com determinantes 1 ou -1 com a multiplicação;

Exercício 6. Descreva uma tabela de operações no conjunto $\{e, a, b\}$ que satisfaça os axiomas de existência de identidade ($\mathcal{G}_2$) e de inversa ($\mathcal{G}_3$), mas não associatividade ($\mathcal{G}_1$).

Exercício 7. Mostre que, se G é um grupo finito de ordem par e identidade e, então existe $a \neq e$ em G tal que $a * a = e$.

Exercício 8. Dada uma operação binária $*$ em um conjunto S, dizemos que $x \in S$ é **idempotente para** $*$ se $x * x = x$. Prove que um grupo tem um e só um elemento idempotente.

Exercício 9. Mostre que o conjunto U_n das raízes n-ésimas da identidade em $\mathbb{C}$ formam um grupo para a multiplicação de $\mathbb{C}$.

Exercício 10. Seja G um grupo abeliano e seja $c^n = c * c * \cdots * c$ para n fatores c, onde $c \in G$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. Prove, usando indução, que $(a * b)^n = (a^n) * (b^n)$ para todos $a, b \in G$.

Exercício 11. Seja G um grupo e suponha $a * b * c = e$ para $a, b, c \in G$. Mostre que também vale $b * a * c = e$.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/