GRUPOS - LISTA 2

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Subgrupos

Exercício 1. Mostre que o conjunto das matrizes A tais que $(A^T)A = I_n$ é subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (matrizes $n \times n$ invertíveis). [Essas matrizes são ditas **ortogonais**. Lembre-se que A^T denota a matriz transposta de A, e que, para transposição, vale $(AB)^T = (B^T)(A^T)$.]

Exercício 2. Mostre que o subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) formado pelas funções f tais que $f(1) = 0$ é subgrupo para adição. As funções f tais que $f(1) = 1$ formam subgrupo para adição?

Considere $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$, o grupo das funções definidas em $\mathbb{R}$, com imagem em $\mathbb{R}^*$, munido da multiplicação. As funções f tais que $f(1) = 1$ formam subgrupo de $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$?

Exercício 3. Descreva os subgrupos cíclicos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ gerados por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 4. Descreva o subgrupo de U_8 (raízes oitavas de 1) gerado por $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$.

Exercício 5. Descreva os subgrupos cíclicos de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ gerados por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 6. Mostre que, se H e K são subgrupos de um grupo abeliano G, então

$$\{hk \mid \widehat{\in} H \text{ e } k \in K\}$$

é subgrupo de G.

Exercício 7 (*). Mostre que um subconjunto não-vazio H de um grupo G é subgrupo de G se e somente se $ab^{-1} \in H$ para todos $a, b \in H$.

Exercício 8. Prove que um grupo cíclico com um único gerador tem, no máximo, 2 elementos.

Exercício 9. Mostre que, se $a \in G$, onde G é um grupo finito com identidade e, então existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a^n = e$.

Exercício 10. Seja G um grupo e a um elemento fixado de G. Mostre que

$$H_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

é um subgrupo de G.

Exercício 11 (*). Seja S um subconjunto qualquer de G.

(a) Mostre que $H_S = \{x \in G \mid xs = sx \text{ para todo } s \in S\}$ é um subgrupo de G.

(b) Usando a notação de (a), temos que o subgrupo H_G é o **centro de** G. Mostre que H_G é um grupo abeliano.

Exercício 12. Prove que todo grupo cíclico é abeliano.

Exercício 13. Mostre que um grupo sem subgrupos próprios não-triviais é cíclico.

2. Grupos e Geradores

Exercício 14. Seja $\mathbb{C}^*$ o grupo dos complexos não-nulos com a multiplicação. Encontre os subgrupos cíclicos de $\mathbb{C}^*$ gerados por:

(a) i;
(b) $(1+i)/\sqrt{2}$;
(c) $1+i$.

Exercício 15. Encontre todos os subgrupos dos grupos dados e desenhe os "*lattice diagrams*´´ para os subgrupos.

(a) $\mathbb{Z}_{12}$
(b) $\mathbb{Z}_{36}$
(c) $\mathbb{Z}_8$

Exercício 16. Encontre os subgrupos cíclicos gerados por:

(a) $\{8, 10\} \subset \mathbb{Z}_{18}$;
(b) $\{4, 6\} \subset \mathbb{Z}_{12}$.

Exercício 17. Sejam a e b elementos de um grupo G. Mostre que se ab tem ordem finita n, então ba tem ordem n.

Exercício 18. Mostre que um grupo que tem apenas um número finito de subgrupos é necessariamente finito.

Exercício 19. Seja p um número primo. Encontre o número de geradores do grupo cíclico $\mathbb{Z}_{p^r}$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 1$.

Exercício 20. Mostre que num grupo cíclico finito G de ordem n, a equação $x^m = e$ tem exatamente m soluções x em G para cada inteiro positivo m que divide n.

O que ocorre se $1 < m < n$ e m não divide n?

Exercício 21. Mostre que $\mathbb{Z}_p$ não tem subgrupos próprios de p é um número primo.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/