GRUPOS - LISTA 3

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Grupos de Permutações

Exercício 1. Considere as seguintes permutações em S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) $\tau\sigma$;
(b) $\tau^2\sigma$;
(c) $\mu\sigma^2$;
(d) $\sigma^{-2}\tau$;
(e) $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

Exercício 2. Encontre o número de elementos do conjunto $\{\sigma \in S_5 | \ \sigma(2) = 5\}$.

Exercício 3. Considere o grupo S_3, visto em sala.

(a) Encontre os subgrupos cíclicos $< \rho_1 >, < \rho_2 >$ e $< \mu_1 >$ de S_3;
(b) Encontre todos os subgrupos, próprios e impróprios, de S_3 e desenhe o "lattice diagram´´ para eles.

Exercício 4. Escreva a tabela de multiplicação do subgrupo cíclico de S_5 gerado por:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

Existirão 6 elementos: $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5$ e $\rho^0 = \rho^6$. É este grupo isomorfo a S_3?

Exercício 5. As seguintes funções são permutações de $\mathbb{R}$?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x + 1$;
(b) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x^2$;
(c) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = -x^3$;
(d) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = e^x$;
(e) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = x^3 - x^2 - 2x$;

Exercício 6. Considere um n-ágono regular para $n \geq 3$. A cada maneira de posicionar dois n-ágonos, um cobrindo o outro, corresponde uma permutação de seus vértices (uma permutação em S_n). O conjunto dessas permutações forma um grupo, o **n-ésimo grupo dihedral** D_n, para multiplicação. Encontre a ordem desse grupo D_n. Argumente *geometricamente* que tal grupo possui um subgrupo com metade dos elementos de todo o grupo.

Exercício 7. Mostre que:

(a) S_n é não abeliano para $n \geq 3$;
(b) Para $n \geq 3$, o único elemento σ de S_n satisfazendo $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ para todo $\gamma \in S_n$ é $\sigma = \imath$, a permutação identidade.

Exercício 8. Seja A um conjunto. Um subgrupo H de S_A é **transitivo em** A se para cada par $a, b \in A$ existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(a) = b$. Mostre que, se A é não-vazio e finito, então existe um subgrupo cíclico H de S_A com $|H| = |A|$ que é transitivo em A.

2. Órbitas, Ciclos e Grupos Alternantes

Exercício 9. Encontre as órbitas das seguintes permutações e as escreva como um produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

Exercício 10. Escreva os seguintes produtos de ciclos em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ com a notação usual de permutações:

(a) $(1, 4, 5)(7, 8)(2, 5, 7)$;
(b) $(1, 3, 2, 7)(4, 8, 6)$.

Exercício 11. Mostre que se H é um subgrupo de S_n para $n \geq 2$, então todas as permutações de H são pares ou exatamente a metade delas são pares.

Exercício 12. Considere S_n para um $n \geq 2$ fixado e seja σ uma permutação ímpar. Mostre que toda permutação ímpar de S_n é o produto de σ com alguma permutação de A_n.

Exercício 13. Prove que se σ é um ciclo de comprimento ímpar, então σ^2 é um cíclo.

3. Classes Laterais e o Teorema de Lagrange

Exercício 14. Encontre todas as classes laterais de:

(a) $4\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$;
(b) $< 2 >$ em $\mathbb{Z}_{12}$;
(c) $< 4 >$ em $\mathbb{Z}_{12}$;
(d) $\{\rho_0, \mu_2\}$ no quarto grupo dihedral D_4.
(e) $\{\rho_0, \rho_2\}$ no quarto grupo dihedral D_4.

Exercício 15. Encontre o índice de $< \mu_3 >$ em D_4.

Exercício 16. Seja H um subgrupo de um grupo G.

(a) Suponha que H é tal que $g^{-1}hg \in H$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Mostre que toda classe lateral à esquerda gH é igual à classe lateral à direita Hg.
(b) Prove que se a partição de G em classes laterais à esquerda é igual à partição em classes laterais à direita, então $g^{-1}hg \in H$ para todos $g \in G$ e $h \in H$.

Exercício 17. Mostre ou dê um contra-exemplo:

(a) $aH = bH$ se e somente se $a \in bH$;
(b) Se $aH = bH$, então $Ha = Hb$.
(c) Se $aH = Hb$, então $b \in Ha$.

Exercício 18. Mostre que se um grupo com no mínimo dois elementos não possui um subgrupo próprio não-trivial, então ele é finito e tem ordem prima.

Exercício 19. Mostre que se G é um grupo com identidade e e ordem finita n, então $a^n = e$ para todo $a \in G$.

Exercício 20. Mostre que um grupo cíclico finito de ordem n tem exatamente um subgrupo de cada ordem d dividindo n, e que esses são todos os subgrupos possíveis.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: `sinue@ufabc.edu.br`
URL: `http://sinue.ufabc.edu.br/`