GRUPOS - LISTA 4

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Produtos Diretos e Grupos Abelianos Finitamente Gerados

Exercício 1. Encontre a ordem dos seguintes elementos no produto direto::
(a) $(2,6)$ em $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$;
(b) $(8,10)$ em $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$;
(c) $(3,10,9)$ em $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$.

Exercício 2. Qual a maior ordem dentre as ordens dos subgrupos cíclicos de $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$?

Exercício 3. Sem se preocupar com a ordem dos fatores, escreva todos os produtos diretos de grupos da forma $\mathbb{Z}_n$ que resultam em grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_60$.

Exercício 4. Quantos grupos abelianos (a menos de isomorfismo) de ordem 24 existem? E de ordem 25? E de ordem (24)(25)

Exercício 5. Seja G um grupo abeliano. Seja H o subconjunto de G formado pela identidade e juntamente com os elementos de G de ordem 2. Mostre que H é subgrupo de G. Encontre um contra-exemplo para afirmação acima no caso da omissão da hipótese de G abeliano.

Exercício 6. Sejam H e K grupos e $G = H \times K$. Observe que H e K aparecem como subgrupos de G de modo natural. Mostre que:
(i) Todo elemento de G é da forma hk para algum $h \in H$ e algum $k \in K$.
(ii) $hk = kh$ para todos $h \in H$ e $k \in K$.
(iii) $H \cap K = \{e\}$.

Exercício 7. Mostre que um grupo abeliano finito não é cíclico se e somente se ele contém um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ para algum p primo.

Exercício 8. Prove que se um grupo abeliano finito tem ordem potência de um primo p, então a ordem de todo elemento no grupo é uma potência de p. A hipótese de comutatividade pode ser omitida? Por quê?

2. Homomorfismos

Exercício 9. Decida se ϕ é homomorfismo. *(Note que se observarmos que $\phi^{-1}[e']$ não é subgrupo normal de G então ϕ não é homomorfismo)*
(a) Seja $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\phi(x) =$ *resto da divisão de x por* 2.
(b) Seja $\phi : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\phi(x) =$ *resto da divisão de x por* 2.
(c) Seja G um grupo qualquer e $\phi : G \to G$ dada por $\phi(g) = g^{-1}$.
(d) Seja M_n o grupo aditivo das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Seja $\phi : M_n \to R$ dada por $\phi(A) = \det(A)$.
(e) Seja M_n o grupo aditivo das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Seja $\phi : M_n \to R$ dada por $\phi(A) = \mathrm{tr}(A)$ (onde $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço da matriz A).

Exercício 10. Seja G um grupo. Se $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ é homomorfismo com $\phi(1,0) = h$ e $\phi(0,1) = k$, calcule $\phi(m,n)$.

Exercício 11. Seja $\phi : G \to G'$ um homomorfismo de grupos. Mostre que:
(a) Se $|G|$ é finito, então $|\phi[G]|$ é finito e é um divisor de $|G|$.
(b) Se $|G'|$ é finito, então $|\phi[G]|$ é finito e é um divisor de $|G'|$.

Exercício 12. Mostre que todo homomorfismo de grupos $\phi : G \to G'$ com $|G|$ primo ou é o homomorfismo trivial ou é uma aplicação bijetora.

Exercício 13. Seja G um grupo e a um elemento qualquer de G. Seja $\phi : \mathbb{Z} \to G$ definida por $\phi(n) = a^n$. Mostre que ϕ é um homomorfismo. Descreva a imagem e os possíveis núcleos de ϕ.

3. Isomorfismos e Teorema de Cayley

Exercício 14. Calcule as representações regulares à esquerda de $\mathbb{Z}_4$ e de S_3.

Exercício 15. Dê dois argumentos que mostrem que $\mathbb{Z}_4$ e o 4-grupo de Klein V não são isomorfos.

Exercício 16. Prove que ser abeliano é uma propriedade estrutura de um grupo G, i.e. isomorfismos preservam a comutatividade de um grupo G abeliano.

Exercício 17. Prove que ser cíclico é uma propriedade estrutura de um grupo G, i.e. isomorfismos preservam a ciclicidade de um grupo G cíclico.

Exercício 18. Seja $< G, \cdot >$ um grupo. Considere em G a operação binária $*$ dada por:

$$a * b = b \cdot a$$

para $a, b \in G$. Mostre que $< G, * >$ é isomorfo a $< G, \cdot >$.

Exercício 19. Prove que todo grupo cíclico finito de ordem n é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Exercício 20. Seja G um grupo. Prove que as permutações $\rho_a : G \to G$ dadas por $\rho_a(x) = xa$ para $a \in G$ e $x \in G$ formam um grupo G'' isomorfo a G.

4. Grupos Quocientes

Exercício 21. Mostre que A_n é um subgrupo normal de S_n e calcule S_n/A_n, i.e, encontre um grupo conhecido isomorfo a S_n/A_n.

Exercício 22. Seja H subgrupo normal de G, e seja $m = (G : H)$. Mostre que $a^m \in H$ para todo $a \in G$.

Exercício 23. Mostre que a intersecção de subgrupos normais de um grupo G é um subgrupo normal de G. Mostre que faz sentido falar num menor subgrupo normal de G contendo um dado subconjunto S de G.

Exercício 24. Mostre que se um grupo finito G tem exatamente um subgrupo H de uma dada ordem, então H é subgrupo normal de G.

Exercício 25. Seja G um grupo com pelo menos um subgrupo de ordem finita s. Mostre que a intersecção dos subgrupos de G de ordem s é um subgrupo normal de G. *(Use o fato de que se H tem ordem s, então $x^{-1}Hx$ também tem, $\forall x \in G$.)*

Exercício 26. Sejam G e G' grupos e H e H' subgrupos normais de G e G', respectivamente. Seja ϕ um isomorfismo de G em G'. Mostre que ϕ induz um homomorfismo natural $\phi_* : (G/H) \to (G'/H')$ se $\phi[H] \subset H'$.

Grupos Quocientes e Grupos Simples

Exercício 27. Classifique os seguintes grupos usando o teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados:
(a) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/ < (1, 2) >$;
(b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4)/ < (3, 0, 0) >$

Exercício 28. Mostre que se G é um grupo finito com subgrupo próprio de ordem 2, então G não é simples.

Exercício 29. Sejam $\phi : G \to G'$ um homomorfismo de grupos, N um subgrupo normal de G e N' um subgrupo normal de G'. Mostre que $\phi[N]$ é subgrupo normal de $\phi[G]$ e que $\phi^{-1}[N']$ é subgrupo normal de G.

Exercício 30. Mostre que se G é não-abeliano, então $G/Z(G)$ é não cíclico. *(Mostre a contrapositiva dessa afirmação)*

Exercício 31. Mostre que se H e K são subgrupos normais de um grupo G tais que $H \cap K = \{e\}$, então $hk = kh$ para todos $h \in H$ e $k \in K$. *(Considere o comutador $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$)*

Exercício 32. Siga as dicas presentes num exercício proposto pelo Fraleigh para mostrar que A_n é simples para $n \geq 5$.

5. Ações de Grupos em Conjuntos

Sejam X e Y dois G-conjuntos com o mesmos grupo G. Um **isomorfismo** entre os G-conjuntos X e Y é uma aplicação $\phi : X \to Y$ bijetora, satisfazendo $g\phi(x) = \phi(gx)$ para todos $g \in G$ e $x \in X$. (Nesse caso X e Y são ditos **isomorfos**.)

Exercício 33. Seja X um G-conjunto transitivo, e seja $x_0 \in X$. Mostre que X é isomorfo ao G-conjunto L de todas as classes laterais de $G_{x_0} = \{g \in G | gx_0 = x_0\}$. *(Para $x \in X$, suponha $x = gx_0$, e defina $\phi : X \to L$ por $\phi(x) = gG_{x_0}$. Lembre-se de mostrar que ϕ está bem definida.)*

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/