

## GRUPOS - PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

- Escolham 5 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 5.** Nesse caso, o exercício 6, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- A nota final desta prova será o mínimo entre 10,0 e a pontuação obtida nas questões, ou seja, não é possível ter nota acima de 10,0 pontos.
- Boa Prova!

**Exercício 1** (2,0). Mostre que, se  $H$  e  $K$  são subgrupos de um grupo abeliano  $G$ , então

$$\{hk \mid h \in H \text{ e } k \in K\}$$

é subgrupo de  $G$ .

**Exercício 2** (2,0). Encontre todos os subgrupos dos grupos dados e desenhe os “*lattice diagrams*” para os subgrupos.

- (a) (1,0)  $\mathbb{Z}_{18}$
- (b) (1,0)  $\mathbb{Z}_8$

**Exercício 3** (2,0). Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Para  $a, b \in G$ , mostre que:

- (a) (1,0)  $Ha = Hb$  se e somente se  $Hab^{-1} = H$ ;
- (b) (1,0) Se  $aH = Hb$ , então  $b \in Ha$ .

**Exercício 4** (2,5). Seja  $G$  um grupo com no mínimo dois elementos e que não possui um subgrupo próprio não-trivial. Mostre que:

- (a) (0,8)  $G$  é cíclico;
- (b) (0,7)  $G$  ter ordem  $n$  finita;
- (c) (1,0)  $n$  deve ser um número primo.

**Exercício 5** (2,5). (a) (1,0) Mostre que um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  cíclico é cíclico; (b) (1,5) Mostre que um grupo cíclico finito de ordem  $n$  tem exatamente um subgrupo de cada ordem  $d$  dividindo  $n$ , e que esses são todos os subgrupos possíveis.

**Exercício 6** (2,0). (a) (1,0) Encontre as órbitas da seguinte permutação, e a escreva como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

- (b) (1,0) Escreva a permutação  $\mu = (1, 4, 2)(2, 5, 7)(1, 3)$  em  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  com a notação usual para permutações (de modo semelhante ao usado para representar  $\rho$  em (a)).

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
E-mail address: [sinue@ufabc.edu.br](mailto:sinue@ufabc.edu.br)  
URL: <http://sinue.ufabc.edu.br/>