

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

PROVA SUBSTITUTIVA: TIPO 2A

IMPORTANTE:

- Escolham 4 exercícios entre os exercícios de 1 a 5, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de 1 a 4.
- Celulares, tablets e calculadoras com memória interna e fórmulas (HP) são proibidos.
- Respostas sem justificativa e apresentação de contas intermediárias serão consideradas erradas (não colocar apenas a resposta decimal).

Função Distribuição Cumulativa Normal

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

EXERCÍCIOS

Exercício 1. Dois membros de uma gangue são presos. Cada preso conversará em particular com a polícia (sem possibilidade alguma de trocar informações entre si). Cada preso pode delatar o companheiro ou permanecer calado. Então as penas serão dadas segundo o seguinte critério:

- Se ambos os prisioneiros A e B delatam um ao outro, ambos servem 2 anos de prisão;
- Se A delata B e B permanece calado, A é liberado e B serve 3 anos;
- Se B delata A e A permanece calado, B é liberado e A serve 3 anos;
- Se A e B permanecem calados, ambos servem apenas 1 ano de prisão.

Assim sendo, responda:

- (a) Se a probabilidade de B delatar A é $1/2$, qual a esperança de tempo na prisão para A se:
- (i) A delata B;
 - (ii) A permanece calado.
- (b) Se a probabilidade de B delatar A é $1/2$ e a probabilidade de A delatar B é também $1/2$, qual a esperança de tempo de prisão para A?

Exercício 2. Suponha que 18 bolas idênticas são distribuídas em 9 caixas aleatoriamente (podendo as caixas terem de 0 a 18 bolas).

- (a) De quantas maneiras as bolas podem ser distribuídas?
- (b) Considerando que todas as distribuições são igualmente prováveis, qual a probabilidade de existirem exatamente 9 bolas nas três primeiras caixas?

Exercício 3. Um importante resultado da teoria de probabilidade, diz que, quando n é grande, uma variável aleatória binomial com parâmetros n e p tem aproximadamente a mesma distribuição que uma variável aleatória normal com média e variância iguais àquelas da distribuição binomial.

Seja X o número de vezes nas quais uma moeda honesta que é jogada 40 vezes dá cara.

- (a) Determine a probabilidade exata de que $X = 20$.
- (b) Use a aproximação normal para estimar $P\{19,5 \leq X \leq 20,5\}$.

Exercício 4. Um baralho usual possui 52 cartas divididas em 4 naipes de 13 cartas numeradas. Uma mão de poker é constituída de 5 cartas aleatoriamente sorteadas do baralho.

- (a) Calcule a probabilidade de obter um “3 of a Kind”, ou seja uma mão formada por três cartas com o mesmo valor numérico e duas com dois valores distintos (Ex.: $8\clubsuit 8\spadesuit 8\heartsuit 4\diamond 3\heartsuit$).
- (b) Se você quiser que a probabilidade de tirar um “3 of a Kind” dentro de n retiradas independentes seja pelo menos 0,80, então quantas retiradas devem ser feitas?

Exercício 5. Encontre a função densidade de e^{-2X} se X é uma variável aleatória exponencial de parâmetro 1, isto é X tem função densidade de probabilidade f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$