MA11 - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS
LISTA DE EXERCÍCIOS

Referências - Medida: [8], [4], [3], [7], [2]; Análise Real: [5], [1], [6]

Exercício 1. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é uma função μ que associa um número positivo $\mu(A)$ (medida de A) a cada subconjunto A (mensurável) de $\mathbb{R}$. Tal função tem as seguintes propriedades:

(i) Se I é um intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos a e b então $\mu(I) = |b - a|$.
(ii) Se A e B são subconjuntos (mensuráveis) de $\mathbb{R}$ e $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(iii) Se A é subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$ e r é um número real fixado então $(A+r) = \{x \in \mathbb{R}; (x-r) \in A\}$ é mensurável e $\mu(A + r) = \mu(A)$.
(iv) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ são subconjuntos (mensuráveis) disjuntos então:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

O *conjunto de Vitali* V é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ tal que, para cada número real r, existe exatamente um número $v \in V$ tal que $(v - r)$ é um número racional.

Mais precisamente, para r um real fixado, considere subconjuntos de $\mathbb{R}$ do tipo $(\mathbb{Q}+r) = \{x \in \mathbb{R}; (x-r) \in \mathbb{Q}\}$. Para cada subconjunto de $\mathbb{R}$ desse tipo escolha um $v \in [0, 1]\cap(\mathbb{Q} + r)$ (ERRATA!). O conjunto de vitali V é o conjunto formado por tais escolhas.

(a) Seja $q_1, q_2, q_3, \ldots$ uma enumeração dos racionais em $[-1, 1]$. Seja $V_k = V + q_k$. Mostre que:

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k} V_k \subset [-1, 2].$$

(b) Mostre que V é não-enumerável.
(c) Mostre que V é não-mensurável supondo $\mu(V) = k$ e chegando a um absurdo para todo $k \geq 0$.

Exercício 2. O *conjunto de Cantor* K é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ obtido da seguinte forma: retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [9/8, 1]$. Em seguida retira-se o terço médio de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

(a) Mostre que K é não-enumerável.
(b) Mostre que K tem interior vazio, ou seja, não contém intervalos.
(c) Supondo uma medida como a descrita no Exercício 1, mostre que se K é mensurável então $\mu(K) = 0$.

Referências

[1] R. Bartle. *The Elements of Real Analysis*. A Wiley Arabook. John Wiley & Sons, Incorporated, 1982.
[2] R. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Wiley, 2014.
[3] A. de Castro and A. de Castro. *Curso de teoria da medida*. Projeto Euclides. IMPA, 2004.
[4] P. Fernández. *Medida e integraçao*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996.
[5] E. Lima and I. de Matematica Pura e Aplicada (Brasil). *Análise real*. Number v. 1 in Análise real. IMPA, 2007.
[6] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.
[7] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill international editions : Mathematics series. McGraw-Hill, 1988.
[8] D. V. Tausk. Notas Para o Curso de Análise Matemática I. `http://www.ime.usp.br/~tausk/texts/NotasAnaliseI.pdf`. [Online; accessed 13-May-2015].