MA11 - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercícios

Exercício 1 (6.33)**.** Dados a, b, c positivos, determinar x e y tais que $xy = c$ e que $ax + by$ seja o menor possível.

Resolução:
Temos duas resoluções para este exercício:

- **Usando cálculo diferencial**
  Seja $S = ax + by$. Como $xy = c$ e $c > 0$ temos que $x > 0$ e $y = c/x$. Daí vale:
  $$S = ax + \frac{bc}{x}.$$
  Para que S seja mínimo devemos ter a primira derivada $S'(x)$ de S em relação a x igual a zero e a segunda derivada $S''(x)$ positiva.
  Como temos:
  $$S'(x) = a - \frac{bc}{x^2}.$$
  Fazendo $S'(x) = 0$, devemos ter então $x = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$.
  Observe agora que:
  $$S''(x) = \frac{2bc}{x^3}.$$
  Donde temos que $S''(x)$ é positivo para $x > 0$ e negativo para $x < 0$.
  Logo o mínimo de S ocorre em $x = +\sqrt{\frac{bc}{a}}$.
  Daí temos: $S = a\sqrt{\frac{bc}{a}} + bc\sqrt{\frac{a}{bc}} = 2\sqrt{abc}$.
- **Sem usar cálculo diferencial**
  Como na primeira resolução temos:
  $$S = ax + \frac{bc}{x}.$$
  Essa igualdade nos dá a soma $ax + by$ em função de x.
  Imagine que queiramos obter x em função da soma S. Multiplicando essa equação por x e reorganizando seus termos obtemos:
  $$ax^2 - Sx + bc = 0.$$
  Cujas soluções são:
  $$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4abc}}{2a}.$$
  Para que as soluções sejam reais devemos ter $S^2 - 4abc \geq 0$, donde obtemos $S \geq 2\sqrt{abc}$ ou $S \leq -2\sqrt{abc}$.
  Assumindo que S é positivo temos que o mínimo ocorre quando $S = 2\sqrt{abc}$.

Exercício 2 (6.13b)**.** Suponha $e(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$. Mostre que $e(x)$ é mínimo quando x é a mediana de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Resolução:
Primeiramente observe que a função $e(x)$ restrita a um dos intervalos $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, $[x_n, +\infty)$ é uma função afim, ou seja, da forma $ax + b$.

De fato, para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ temos:

$$\begin{aligned} e(x) &= |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_k| + |x - x_{k+1}| + \cdots + |x - x_n| \\ &= (x - x_1) + (x - x_2) + \cdots + (x - x_k) - (x - x_{k+1}) - \cdots - (x - x_n) = \\ &= [k - (n-k)]x + (-x_1 - x_2 - \cdots - x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n). \end{aligned}$$

Para $k < n/2$ temos que o coeficiente $[k - (n-k)] = (2k - n)$ é negativo, logo $e(x)$ é decrescente. Para $k > n/2$ temos $[k - (n-k)] > 0$, logo $e(x)$ é crescente.

Assim, se n é par, $e(x)$ é constante no intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ para $k = n/2$, decrescente em $(-\infty, x_k]$ e crescente em $[x_{k+1}, +\infty)$. Desse modo, $e(x)$ é mínimo na mediana $(x_k + x_{k+1})/2 = x_k$.

Assim, se n é ímpar, para $k = \lfloor n/2 \rfloor$, $e(x)$ é decrescente em $(-\infty, x_{k+1}]$ e crescente em $[x_{k+1}, +\infty)$. Desse modo, $e(x)$ é mínimo x_{k+1} (que é a mediana de $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Obs.: $\lfloor x \rfloor =$"maior inteiro menor ou igual a x".

Exercício 3. Mostre (sem usar cálculo) que:

$$\lim_{h \to 0} e^h = 0.$$

Resolução:

O limite segue diretamente do lema abaixo (pelo "Teorema do Confronto").

Lema 0.1. *Temos que:*

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x},$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Demonstração. Conforme justificado no Capítulo 17 das notas de MA11 de 2012 pela figura 17.3 temos que, para $x > 0$:

$$\frac{x}{e^x - 1} < 1.$$

Daí:

$$x < e^x - 1,$$

e, portanto:

$$e^x > 1 + x$$

A mesma figura nos mostra também que:

$$\frac{1}{e^x} < \frac{x}{e^x - 1}.$$

Daí, para $x > 0$, temos:

$$e^x - 1 < xe^x.$$

Então:

$$(1 - x)e^x < 1,$$

e assim,

$$e^x < \frac{1}{1-x}.$$

[*Deixaremos a verificação das desigualdades para $x \leq 0$ a cargo do leitor.*]

□