MA11 - NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercícios

Exercício 1. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se e somente se para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante.

Resolução:

- Mostremos primeiramente que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática então para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante.

  Suponha $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $h \in \mathbb{R}$ fixado. Temos que:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x+h) - f(x) &= a(x^2 + 2xh + h^2) + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c \\ &= (2h)x + (ah^2 + bh).\end{aligned}$$

  Logo para h fixado $\varphi(x)$ é afim.

- Para demonstrar a recíproca, ou seja, que se para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática usaremos a seguinte caracterização de funções quadráticas:

  Definição 0.1. Uma progressão aritimética de segunda ordem não degenerada é uma sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ na qual as diferenãs entre cada termo e o anterior ($d_n = x_{n+1} - x_n$) formam uma progressão aritmética (de primeira ordem) com razão diferente de zero.

  Teorema 0.2. *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se e somente se toda progressão aritmética não constante $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$.*

  Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [2] (Teorema 1.3.7) e em [1] (p. 149). □

  Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ uma PA de razão $h \neq 0$, ou seja, $x_n = x_0 + nh$. Supondo $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ afim temos que $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n), \dots)$ é também uma PA.

  Como

$$\varphi(x_n) = f(x_n + h) - f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n),$$

  segue que $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada.

  Assim sendo, pelo teorema acima segue que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática.

Referências

[1] E. L. Lima, *A MAtemática do Ensino Médio*, V.1, 8ª edição, Rio de Janeiro, SBM, 2005.
[2] T. S. B. Pacheco, *Caracterização e dinâmica das Funções Quadráticas*, PDF, 2012 (visitado em 25/06/2015).