Projeto de PDPD

# Geometria Hiperbólica: Uma Introdução à Geometria Diferencial

11 de março de 2015

**Resumo**

Esse projeto objetiva a descrição da geometria hiperbólica dos pontos de vista axiomático e da geometria diferencial. Propomos o estudo dos modelos clássicos da geometria hiperbólica e a aplicação dos conceitos de derivada covariante e de geodésica num desses modelos.

## 1 Introdução

Por volta do ano 300 a.C., na Grécia antiga foi publicada um tratado matemático e geométrico que resumia grande parte dos conhecimentos matemáticos da antiguidade: "Os Elementos" de Euclides (ver [3]). Tal obra é uma obra prima da lógica e da matemática, que, a seguir da Bíblia, é provavelmente o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental. "Os Elementos" influenciou não apenas a o mundo da matemática, mas tmabém grande parte da ciência moderna, apresentando uma estrutura lógico-dedutiva que inspirou enormemente o modo moderno de pensar.

"Os Elementos" fundamentavam suas argumentações em 5 postulados, a saber:

1. Desenhar uma linha reta de um ponto à outro ponto.
2. Produzir uma linha reta finita continuamente em outra linha reta.
3. Escrever um círculo dado qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta caindo em duas linhas retas faz a soma dos ângulos interiores do mesmo lado ser inferior à dois ângulos retos as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, se encontram naquele lado onde os ângulos são inferiores à dois ângulos retos.

O último desses postulados, equivalente a afirmação "Por um ponto fora de uma reta existe uma única paralela a esta", talvez por não possuir a clareza e simplicidade dos demais postulados, suscitou acaloradas discussões ao longo de mais de dois mil anos. Tais discussões conjecturavam que o quinto postulado era consequência lógica dos demais.

A resposta para tais discussões surgiu de maneira independente e mais ou menos concomitante com os trabalhos de Lobachevski (1792-1856) e Janos Bolyai (1802-1860) com o surgimento da geometria hiperbólica que demonstrou de uma vez por todas a independência do quinto postulado apresentando uma "geometria imaginária" onde valiam os quatro primeiros postulados de Euclides, mas não o quinto.

Essa inciação científica visa estudar a geometria hiperbólica inicialmente de uma modo axiomático, como apresentado em [8], e posteriormente sob a óptica da geometria diferencial, como a descrita em [2].

Estudaremos os modelos de Klein, Poincaré e do hiperbolóide da geometria hiperbólica do ponto de vista axiomático e, munidos dos conceitos de devivada covariante e de geodésicas, escolheremos um desses modelos para uma análise mais detalhada.

Tal trabalho, além de ser uma boa introdução à geometria moderna, propicia ao aluno um exemplo concreto de geometria não trivial que proverá ao aluno um sólido alicerce para seus futuros estudos em geometria e em algumas áreas da física, como a Teoria da Relatividade. Além disso, o plano hiperbólico aparece em diversos trabalhos de pesquisa atuais, como por exemplo em [4].

# 2 Objetivos e Metas

O presente projeto de iniciação científica tem como principal objetivo estudar a geometria hiperbólica e oferecer ao aluno uma breve introdução à geometria diferencial.

Os principais tópicos a serem estudados no decorrer do projeto são:

- Descrição axiomática da geometria neutra, euclideana e hiperbólica usando o formalismo proposto por Hilbert em [6] ou equivalente. Destacamos aqui as congruências de triângulos, os quadriláteros de Lambert e Saccheri e os axiomas de completude. As principais referências para alcançar essa meta são [8] e [5].

- Modelos da geometria hiperbólica, em especial os modelos de Klein, semi-plano e disco de Poincaré e hiperbolóide. Sugerimos aqui os livros [8], [5], [2] e [7].

- Curvas e superfícies regulares. Derivadas covariantes. Descrição de geodésicas. Estudo introdutório de um dos modelos de geometria hiperbólica usando a linguagem da geometria diferencial. Como referências temos [2], [1] e [7].

# 3 Metodologia

Estudo das referências acima descritas em casa com discussão de seus conteúdos em encontros semanais com o orientador, e apresentações mensais de seminários por parte do aluno.

# 4 Cronograma

- **1º Quadrimestre:** Axiomática das Geometrias Euclideana e Hiperbólica. Estudo dos principais teoremas da geometria neutra e hiperbólica. Estudo da completude dos números reais e sua ligação com os axiomas de completude da geometria clássica.

- **2º Quadrimestre:** Estudo dos modelos clássicos da Goemetria Hiperbólica: modelo de Klein, semi-plano e disco de Poincaré e hiperbolóide. Início do estudo de curvas e superfícies regulares.

- **3º Quadrimestre:** Estudo de derivadas covariantes e geodésicas, introdução de métrica riemanniana. Aplicação desses conceitos num dos modelos de geometria hiperbólica.

# Referências


[1] M. do Carmo. *Riemannian Geometry.* Mathematics (Birkhäuser) theory. Birkhäuser Boston, 1992.

[2] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Pearson Education Taiwan Limited, 2009.

[3] Euclides and I. Bicudo. *Os elementos.* UNESP, 2009.

[4] I. Fernández and P. Mira. Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Amer. J. Math.*, 129(4):1145–1181, 2007.

[5] M. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* W. H. Freeman, 2008.

[6] D. Hilbert. *Fundamentos da geometria.* Gradiva, 2003.

[7] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1983.

[8] A. Ramsay and R. Richtmyer. *Introduction to Hyperbolic Geometry.* Ecological Studies. Springer, 1995.