Imersões que preservam G-estruturas e aplicações

Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paolo Piccione

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP (Bolsa n^o. 04/13586-4)

São Paulo, 16 de Fevereiro de 2009

Imersões que Preservam G-estrutura e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Sinuê Dayan Barbero Lodovici
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paolo Piccione (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Daniel Victor Tausk - IME-USP.
- Prof. Dr. Francesco Mercuri - UNICAMP.
- Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis - ICMC-USP
- Prof. Dr. Jorge Herbert de Lira - UFC

Agradecimentos

Durante os quatro anos que resultaram nesta tese muitos foram aqueles que me ajudaram, estendendo suas mãos em momentos de dificuldade. A estes agradeço profundamente:

Aos meus pais, Tanjoga (Miguel) e Haia Shumma (Sônia), pelo amor e compreensão. Agradeço por respeitarem minhas escolhas e me apoiarem em todas as situações, oferecendo amparo e irrestrita amizade nos momentos onde a angústia e a ansiedade falavam alto. Agradeço por tudo que fizeram em minha vida. Por tudo que me permitiu chegar aqui hoje.

À minha namorada, Erika, que recentemente entrou em minha vida e muito me ajudou. Agradeço o apoio, os sorrisos, abraços, a paciência quando estava mal-humorado e quando a deixava sozinha para estudar. Obrigado por tudo.

À minha avó e meus tios que me apoiaram sempre e, que, em parte destes anos, ofereceram-me abrigo físico e emocional em São Paulo.

À psicologa, Lúcia Girondi, que me acompanha desde os tempos da graduação me ajudando nos momentos em que meus caminhos parecem escuros e desertos.

Aos amigos e colegas da Ciências Moleculares e do IME que compartilharam comigo divertidos momentos de trabalho (ou não). Sou muito grato, em especial, ao meu companheiro de doutorado Fernando Manfio. Agradeço-o pelo apoio e pelas discussões que ajudaram a trazer esta tese à existência.

Aos professores com quem tive contato na USP e que me ajudaram a manter vivo o espírito inquisidor de um cientista. Agradeço à professora e amiga Helena Maria Ávila de Castro que me orientou nos meus primeiros passos no imenso universo da matemática. Sou profundamente grato ao, também, professor e amigo Daniel Tausk que muito me ajudou, seja no desenvolvimento desta tese, seja com dúvidas a respeito dos cursos que no

IME cursei. Obrigado.

E, como disse o Fernando em sua tese, “por último quanto à ordem, mas não quanto à importância”, agradeço profundamente a meu orientador Paolo Piccione. Agradeço por, além de me ensinar a ser um pesquisador em matemática, me mostrar que é possível sim, cultivar amizades e conquistar uma vida pessoal e profissional feliz e plena. Obrigado, também, pela ajuda na publicação de meus artigos. Agradeço por todo apoio sempre e por estar sempre presente, seja para conversarmos em sua sala ou via e-mail.

Resumo

Apresentamos neste trabalho diversos de teoremas de imersão isométrica obtidos a partir do teorema de imersões afins que preservam G-estrutura proposto por P. Piccione e D. Tausk em [18]. Descrevemos, assim, os clássicos teoremas de imersão em formas espaciais, bem como resultados recentes sobre imersões, como os expostos em [5] e [6]. Apresentamos, então, um teorema de imersão em grupos de Lie munidos de uma 1-estrutura, o qual tem como corolário um resultado de imersão isométrica no grupo Sol, uma das oito estruturas geométricas tridimensionais descritas por Thurston (ver [21]). Descrevemos, também, um teorema de imersão isométrica no grupo Heisenberg-Lorentz, um dos quatro modelos da recente classificação de geometrias lorentzianas tridimensionais proposta por Dumitrescu e Zeghib em [7]. Este resultado, obtido em conjunto com F. Manfio (ver [15]) e que aqui apresentamos, compreende também um resultado de rigidez neste espaço. A seguir, provamos teoremas de imersão isométrica em variedades sub-riemannianas de contato. Finalmente, como aplicação do teorema de imersão afim proposto em [18], apresentamos um teorema sobre a existência de famílias associadas a uma superfície mínima imersa em uma variedade afim com G-estrutura e inner torsion nula.

Palavras-chave: Imersões isométricas, G-estruturas, variedades tridimensionais, Sol, Heisenberg, espaços sub-simétricos, famílias associadas, imersão mínima.

Abstract

Throughout this work, we present a collection of isometric immersion theorems which were proved using the affine immersion G-structure preserving theorem proposed by P. Piccione and D. Tausk in [18]. We describe here classical theorems about isometric immersions in (real and complex) space forms, and some recent results, such as the presented in [5] and [6]. Then, we prove a isometric immersion theorem in Lie groups endowed with 1-structures, which has, as corollary, an isometric immersion result in Sol^3, one of the eight 3-dimensional geometric structures described by Thurston (see [21]). Next, we also present an isometric immersion theorem in the Heisenberg-Lorentz group, one of the four geometrical models described in a recent paper by Dumitrescu and Zeghib, which classifies 3-dimensional lorentzian geometries ([7]). Such result, obtained as a joint work with F. Manfio (see [15]) and here presented, also holds a rigidity theorem in this ambient space. Following, we prove some isometric immersion theorems in sub-riemannian contact manifolds. Finally, as an application of the affine immersion theorem proposed in [18], we present a theorem concerning the existence of associate families to a minimal surface immersed in an affine manifold with G-structure and null inner torsion.

Keywords: Isometric immersions, G-structures, 3-manifolds, Sol, Heisenberg, sub-symmetric spaces, associate families, minimal immersions.

Sumário

Introdução

A conjectura de geometrização de Thurston afirma que variedades de dimensão 3 compactas podem ser decompostas em subvariedades que têm estruturas geométricas. A conjectura de geometrização é um análogo para variedades 3-dimensionais do teorema de uniformização para superfícies, o qual afirma que toda superfície admite uma métrica riemanniana de curvatura gaussiana constante. Essa conjectura foi proposta por William Thurston em 1982, e implica em diversas outras conjecturas, por exemplo na conjectura de eliptização de Thurston (a qual sugere que 3-variedades fechadas com grupo fundamental finito são esféricas) e na conhecida conjectura de Poincaré.

O teorema de geometrização de Thurston mostra que variedades Haken satisfazem a conclusão da conjectura de geometrização. Lembramos que uma variedade é de Haken ela é uma 3-variedade compacta, $\mathbb{R}P^2$-irredutível que contém superfícies incompressíveis de dois lados. Thurston apresentou uma prova para o teorema na década de 1980 e desde então diversas novas provas apareceram. Grigori Perelman esboçou a demonstração de toda a conjectura de geometrização em 2003 usando fluxo de Ricci e cirurgia, a qual (até 2008) parece estar correta.

Foi provado por Hellmuth Kneser que toda 3-variedade compacta, orientável é formada pela soma conexa de uma coleção de "3-variedades primas". A formulação exata dessa decomposição a que chamamos de *decomposição prima* e a prova de sua unicidade veio 30 anos mais tarde com John Milnor. A existência de tal decomposição reduz o estudo de 3-variedades à compreensão das 3-variedades primas, i.e., aquelas que não podem ser escritas como uma soma conexa não-trivial.

Isso posto, enunciamos de maneira mais precisa a conjectura de Thurston:

Conjectura 1. *Toda* 3*-variedade prima fechada (i.e. compacta e sem bordo) pode ser recortada ao longo de um toro de modo que o interior das variedades* *resultantes tenham uma estrutura geométrica de volume finito.*

Dizemos ser uma *geometria modelo* um par formado por uma variedade simplesmente conexa X e uma ação transitiva de um grupo de Lie G sobre X com estabilizador compacto. Define-se, então, *estrutura geométrica* numa variedade M como sendo um difeomorfismo de M em X/H para alguma geometria modelo X, onde H é um subgrupo discreto de G que age livremente em X. Em 3 dimensões existem apenas 8 estruturas geométricas. São elas:

- Geometria Esférica $\mathbb{S}^3$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ e grupo G o grupo de Lie de 6 dimensões $\mathrm{O}(\mathbb{R}^4)$, de 2 componentes;

- Geometria Euclideana $\mathbb{E}^3$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ e grupo G o grupo de Lie de 6 dimensões $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$, de 2 componentes;

- Geometria Hiperbólica $\mathbb{H}^3$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ e grupo G o grupo de Lie de 6 dimensões $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{1,3})^+$ (onde denotamos por $\mathbb{R}^{k,p}$ a variedade semi-riemanniana $\mathbb{R}^{(k+p)}$ munida da métrica canônica de índice k), de 2 componentes;

- Geometria de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e grupo G o grupo de Lie de 4 dimensões $\mathrm{O}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de 4 componentes;

- Geometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e grupo G o grupo de Lie de 4 dimensões $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{1,2})^+ \times \mathbb{R}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de 4 componentes;

- Geometria do recobrimento universal de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^2)$ (aqui denotado por $\widetilde{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$) como fibração sobre $\mathbb{H}^2$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ e grupo G o grupo de Lie de 4 dimensões e 2 componentes com estrutura na componente da identidade $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}$;

- Geometria do Grupo de Heisenberg Nil como fibração sobre $\mathbb{E}^2$, com estabilizador de ponto $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ e grupo G o grupo de Lie de 4 dimensões e 2 componentes formado pelo produto semidireto do grupo de Heisenberg de 3 dimensões com o grupo de isometrias do círculo $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$;

- Geometria do Grupo Solúvel Sol^3 que é um fibração sobre um plano de fibras e tem como G o próprio grupo Sol^3 de 3 dimensões e como estabilizador de ponto o grupo diedral de ordem 8.

Uma questão de natural interesse geométrico é, assim, estudar como uma dada superfície riemanniana é isometricamente mergulhada nessas geometrias. A existência de imersões isométricas nesses ambientes, dados um fibrado normal e uma segunda forma fundamental prescritos, têm sido constantemente estudada e diversos resultados nessa direção se encontram publicados em artigos.

Inicialmente temos o clássico problema de imersão isométrica em uma variedade riemanniana Q_c^{n+p} de dimensão $n+p$ e curvatura seccional constante c que deu origem ao conhecido *Teorema Fundamental das Imersões*:

Teorema 1.

(i) Sejam M^n uma variedade riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial riemanniano de posto p com uma conexão compatível ∇^E, e α uma seção do fibrado de homomorfismos $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$*. Defina, para cada $\xi \in \mathbf{\Gamma}(E)$, uma função $A_\xi : TM \to TM$ tal que*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se α e ∇^E satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para um ambiente de curvatura seccional constante c, então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$, e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{f} : E \to TM^\perp$ ao longo de f, tal que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todos $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ temos:

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \\
&\tilde{f}\alpha(X,Y) = \tilde{\alpha}(X,Y) \\
&\tilde{f}\nabla^E_X \xi = \nabla^\perp_X \tilde{f}(\xi)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

(ii) Suponha que f e g sejam imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em Q_c^{n+p}. Sejam $TM_f^\perp$, α_f e $\nabla_f^\perp$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente; e sejam $TM_g^\perp$, α_g e $\nabla_g^\perp$ os objetos correspondentes para g. Se existe $\phi : TM_f^\perp \to TM_g^\perp$, isomorfismo de fibrados vetoriais, tal que, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todos $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ temos:

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(\xi), \phi(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \\
&\phi\alpha_f(X,Y) = \alpha_g(X,Y) \\
&\phi\nabla^\perp_{fX}\xi = \nabla^\perp_{gX}\phi(\xi)
\end{aligned}$$

então existe uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ *tal que*

$$g = \tau \circ f \qquad e \qquad \mathrm{d}\tau|_{TM_f^\perp} = \phi.$$

Tal teorema, cuja demonstração, inspirada no apresentado em [2], pode ser encontrada na Seção 1.4 do Capítulo 1 desta tese, resolve o problema de imersão em $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{H}^3$.

Resultados de imersão isométrica em variedades riemannianas com grupo de isometria de dimensão 4 ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ e Nil) foram obtidos recentemente por B. Daniel em [5, 6]. Completando os teoremas já existentes provamos nesta tese um teorema análogo para imersões isométricas no grupo solúvel Sol^3 munido de uma métrica invariante à esquerda e de um grupo de isometria minimal. Como fruto desse resultado temos o artigo [14] já publicado.

Todos os teoremas de imersão isométrica acima mencionados podem ser formulados de maneira unificada em termos de G-estruturas e imersões afins que preservam G-estrutura. O resultado que propõe tal unificação é de autoria de P. Piccione e D. Tausk e foi proposto em [18]. Nesse artigo, consideram-se imersões afins em variedades munidas de conexão e G-estrutura ditas *infinitesimalmente homogêneas*. Em tais ambientes o estudo de três tensores resulta no teorema de imersão. São eles: curvatura, torção e *inner torsion*. Esse último, um tipo de derivada covariante da G-estrutura.

Notamos aqui que aquilo a que chamamos de homogeneidade infinitesimal se verifica, justamente, pela constância dos tensores de curvatura, torção e inner torsion em *referenciais* que pertencem a G-estrutura. Assim, por exemplo, se consideramos uma variedade riemanniana (M^n, g) munida da conexão de Levi-Civita ∇ e de uma $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$-estrutura P dada pelos conjunto dos referenciais ortonormais de M segue que, como ∇ é compatível com g, a torção e a inner torsion associados a (M, ∇, P) se anulam. Verifica-se que nesse caso a condição de homogeneidade infinitesimal equivale então à condição de que M tenha curvatura seccional constante. Desse modo o teorema proposto em [18] reproduz o Teorema Fundamental das Imersões acima explicitado.

De modo semelhante ao descrito no parágrafo acima pode-se reobter os teoremas apresentados por B. Daniel em [5, 6] considerando nas variedades riemannianas de 3 dimensões, simplesmente conexas, com grupo de isometria de dimensão 4, uma G-estrutura com $G = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ formada pelos referenciais ortonormais de M que mapeiam o último vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$ num campo vetorial ξ de M devidamente escolhido.

De modo semelhante ao caso riemanniano onde, em variedades tridimensionais, descreve-se a existência de apenas oito geometrias, recentemente foi provado por S. Dumitrescu e A. Zeghib em [7] a existência de apenas quatro geometrias lorentzianas maximais. Mais precisamente, toda geometria lorentziana maximal, compacta, conexa, tridimensional, é equivalente a uma das seguintes geometrias:

- Geometria de Minkowski modelada em $\mathbb{R}^3$;
- Geometria anti-de Sitter modelada em $\widetilde{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$;
- Geometria Heisenberg-Lorentz modelada em Nil;
- Geometria Sol-Lorentz modelada em Sol.

Dentre essas geometrias é clássico o resultado de imersão isométrica nas duas primeiras uma vez que estas possuem curvatura seccional constante. Assim, como parte desta tese enunciamos um teorema de imersão isométrica na geometria Heisenberg-Lorentz. Tal resultado, obtido em conjunto com F. Manfio, e aceito para publicação na revista *Mathematical Proceedings* (ver [15]), conta também com um resultado de rigidez de imersões isométricas que reproduz o Teorema de Allendoerfer (ver [1]) no ambiente em questão.

Inspirados em [10] e [11], por último, decidimos estudar imersões isométricas em variedades de contato, especialmente em espaços sub-simétricos com $(\mathrm{U}(n) \times 1)$-estruturas. Desse modo, apresentamos inicialmente resultados recentemente obtidos por E. Falbel, P. Piccione e D. Tausk em variedades de contato com sub-torção nula e, então, partimos ao estudo das imersões isométricas nos espaços sub-simétricos.

Além dos teoremas de imersão acima mencionados é de grande interesse em geometria o estudo de imersões mínimas. Nesse sentido, é clássico o resultado de que à uma superfície mínima N de $\mathbb{R}^3$ se associa uma família a 1 parâmetro de superfícies mínimas (ver [24], IV, p. 401). Tal família denomina-se *família associada* à superfície mínima N. A título motivacional enunciamos aqui o Teorema de Rigidez de Lawson para superfícies com curvatura média constante (CMC) em $\mathbb{R}^3$ (ver [16]), que dá grande significação à família associada em $\mathbb{R}^3$:

Teorema 2. *Se $f : N \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica CMC com curvatura média H e N é simplesmente conexa, então existe uma família 2π-periódica* *diferenciável de imersões isométricas*

$$f_\theta : N \to \mathbb{R}^3$$

de curvatura média constante H chamada de família associada *a f. Além disso, a menos de congruências, as funções f_θ, para $\theta \in [0, 2\pi)$, representam todas as imersões de N em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante H ou $-H$ e, se $f(N)$ não está contida numa esfera, então essas imersões são não-congruentes entre si.*

O resultado a respeito das imersões mínimas foi ampliado por M. Dacjzer e D. Gromoll em [3] onde se mostra a existência de uma família a 1 parâmetro de imersões mínimas associada a uma subvariedade real Käehler mínima de $\mathbb{R}^n$. Na Seção 1.6 do Capítulo 1 desta tese reproduzimos a demonstração de tal resultado que, precisamente, assim se enuncia:

Teorema 3. *Seja M^{2n} uma variedade Käehler simplesmente conexa, e seja $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ uma imersão isométrica mínima. Existe, então, uma família a 1 parâmetro $f_\theta : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$, $\theta \in [0, \pi)$ de imersões isométricas mínimas tal que $f_0 = f$.*

Nota 1. *Para uma imersão isométrica mínima $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$, vale que, se f é holomorfa então, para cada $\theta \in [0, \pi)$, f_θ é igual a f a menos de isometrias de $\mathbb{R}^{2n+p}$. Reciprocamente, se existem $\theta_1 \neq \theta_2 \in [0, \pi)$ tais que f_{θ_1} e f_{θ_2} diferem por uma isometria de $\mathbb{R}^{2n+p}$, então f é holomorfa (ver [2]).*

Estudando as já mencionadas geometrias riemannianas tridimensionais, B. Daniel recentemente obteve a existência de famílias associadas a uma superfície mínima de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em [5].

Inspirados por esses resultados provamos a existência de famílias associadas à superfícies mínimas imersas em variedades afins com G-estrutura infinitesimalmente homogêneas e com inner torsion nula. A exemplo, obtivemos então a família associada ao gráfico de uma aplicação harmônica $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, ou seja, obtivemos a família associada à uma superfície mínima imersa em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Apresentamos agora uma rápida descrição do conteúdo de cada capítulo da tese.

O Capítulo 1 posiciona-se dentro da tese de modo a introduzir os resultados clássicos de imersão isométrica em formas espaciais e o resultado acerca da família associada a uma subvariedade real Käehler mínima de $\mathbb{R}^n$. Esse

Capítulo posiciona-se também de maneira a fixar notações usadas ao longo de toda esta tese.

A Seção 1.1 define, então, os conceitos de *variedade diferenciável*, *campo tensorial*, *conexão linear* (em fibrados vetoriais), *curvatura* e *torção*. A seção seguinte (Seção 1.2) apresenta informações básicas a respeito de grupos e álgebras de Lie. Definimos aí importantes conceitos como *representação adjunta*, *álgebra derivada*, *álgebra nilpotente* e *solúvel*. A Seção 1.3 introduz, então, a definição de *imersão isométrica* e elementos a ela associados, como *segunda forma fundamental* e *fibrado normal*. Aí demonstramos as equações de *Gauss*, *Codazzi* e *Ricci*, assumida a existência de uma imersão isométrica. Na Seção 1.4 provamos então o Teorema Fundamental da imersões Isométricas em $\mathbb{R}^n$. A seguir, na Seção 1.5, apresentamos conhecimentos básicos a respeito de imersões mínimas para, então, na Seção 1.6 enunciarmos e provarmos o já mencionado teorema sobre famílias associadas de Dacjzer-Gromoll.

Temos no Capítulo 2 o essencial à perfeita compreensão do teorema de imersões afins proposto por P. Piccione e D. Tausk em [18], bem como uma versão adaptada desse teorema ao caso de imersões isométricas. Na Seção 2.1 encontramos as definições de *fibrado principal* e do *pull-back* de um fibrado desse tipo. Dedicamos a Seção 2.2 à apresentação dos conceitos de *fibrado de referenciais* e *G-estruturas*, para, na Seção 2.3 apresentarmos os conceitos de *conexão generalizada*, *derivada direcional* e de *forma de conexão*. Na Seção 2.4 definimos *variedades afins* e o *tensor de Christoffel*. Este, de grande importância na compreensão da *inner torsion*, apresentada na seção seguinte. A Seção 2.6 define e estabelece relações entre os conceitos de homogeneidade infinitesimal, local e global. Antes de enunciarmos o teorema de imersões afins na Seção 2.8, definimos na Seção 2.7 o que é uma *imersão afim* e a *congruência* entre imersões afins que preservam G-estrutura, algo importante para o teorema de rigidez descrito no Capítulo 5 (imersão no grupo Heisenberg-Lorentz). Finalmente, na Seção 2.8 apresentamos o teorema acerca de imersões afins que preservam G-estrutura proposto em [18], adaptando-o, de modo conveniente para diversos resultados seguintes, ao caso de imersões isométricas (Teorema 2.8.4).

O Capítulo 3 foi escrito com o intuito de reobter, a partir do Teorema 2.8.4, teoremas clássicos de imersão isométrica. Provamos aí o teorema a respeito de imersões isométricas em formas espaciais semi-riemannianas (uma pequena generalização do Teorema 1.4.1), o conhecido resultado de imersões em formas espaciais complexas, bem como os teoremas de imersão apresentados em [5] e [6], os quais descrevem imersões em variedades homogêneas tridimensionais com grupo de isometria de 4 dimensões. Assim sendo, o capítulo se encontra dividido em três seções que apresentam os resultados na ordem acima mencionada. Em cada uma destas seções, introduzimos a G-estrutura ao problema associada e calculamos sua inner torsion, para, finalmente, enunciarmos e provarmos os referidos teoremas de imersão isométrica.

No Capítulo 4 apresentamos os resultados acerca de imersões em grupos de Lie munidos de uma 1-estrutura, em especial no grupo Sol^3, obtidos pelo autor durante o doutorado e publicados em [14]. Na Seção 4.1 desenvolvemos o teorema de imersão isométrica em grupos de Lie munidos de uma 1-estrutura. Tal teorema tem como corolário na Seção 4.2 o resultado de imersão isométrica em Sol^3, i.e., no grupo de Lie com variedade base $\mathbb{R}^3$, munido da operação de grupo:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^{z}y', z + z');$$

da métrica invariante à esquerda $\mathrm{d}s^2 = e^{2z}\mathrm{d}x^2 + e^{-2z}\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, e da $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\}$-estrutura em Sol dada pela escolha de um referencial ortonormal invariante à esquerda.

O Capítulo 5 apresenta o resultado obtido em conjunto com F. Manfio em [15] a respeito de imersões no grupo Heisenberg-Lorentz Nil. Por Nil entendemos o grupo de Lie 3-dimensional formado pelas matrizes reais 3×3 triangulares superiores da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

munido da usual operação de multiplicação. Quando nos referimos ao grupo de Heisenberg-Lorentz, consideraremos em Nil a seguinte métrica lorentziana:

$$g = -\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (\mathrm{d}z - x\mathrm{d}y)^2,$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ não zero fixado.

Na Seção consideramos em Nil uma G-estrutura P com

$$G = \left\{ X \in \mathrm{SO}(2,1); X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},\ \text{com } T \in SO(1,1) \right\},$$

e provamos então a homogeneidade da tripla $(\mathrm{Nil}, \nabla, P)$, onde denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de Nil. Para isso provamos uma interessante proposição (Proposição 5.1.3) que mostra, na Subseção 5.1.2, a constância da curvatura em referenciais pertencentes a G-estrutura P. Na Seção 5.2 provamos então o teorema de imersão isométrica em Nil, e, na Seção 5.3, definimos a G-congruência de imersões isométricas que preservam G-estrutura e provamos um teorema de rigidez em Nil (Teorema 5.3.4).

Apresentamos, então, no Capítulo 6, Seção 6.1, construções básicas em variedades sub-Riemannianas de contato. Definimos aí *variedades sub-riemannianas de contato*, *campo característico*, *estrutura complexa característica*, *conexão adaptada*, *sub-torção* e algo a que chamamos de *G-estrutura característica.* Temos na Seção 6.2 a definição de uma imersão isométrica de uma variedade sub-riemanniana de contato em outra do mesmo tipo. Nessa seção demonstramos um lema (Lema 6.2.2) que relaciona objetos entre a variedade imersa e o ambiente de imersão (formas características, conexões adaptadas, sub-torções) e que estabelece condições para a simetria da restrição da segunda forma fundamental a distribuição de contato. Na Seção 6.3 apresentamos o cálculo da inner torsion de uma ($\mathrm{U}(n) \times 1$)-estrutura (G-estrutura característica). Em seguida, na Seção 6.4, descrevemos os modelos de variedades sub-riemannianas de contato com curvatura holomorfa constante, i.e., o grupo de Heisenberg sub-riemanniano, a esfera sub-riemanniana, e o espaço anti-de Sitter sub-riemanniano. Assim, na Seção 6.5, provamos um teorema de imersão isométrica de variedades de contato nesses modelos.

No Capítulo 7 obtemos um resultado de existência de famílias associadas a uma superfície mínima imersa isometricamente numa variedade com G-estrutura (Corolário 7.1.5). De modo a termos uma aplicação não canônica deste resultado enunciamos na Seção 7.2 um teorema de imersão isométrica em produto de formas espaciais e na Seção 7.3 estudamos o gráfico de aplicações harmônicas entre variedades. Assim, na Seção 7.4 mostramos a existência de uma família associada a uma imersão mínima de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. De modo mais preciso, obtemos aí o seguinte teorema:

Teorema 4. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma família $F_{n,\theta} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\theta \in [0, 2\pi[$, de imersões mínimas de $(\mathbb{S}^2, g_n)$ em $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_R \times g_R)$ associada a imersão $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ dada por*

$$F_n(z) = (z, z^n),$$

onde denotamos por g_R a métrica redonda e por g_n a métrica conforme dada por $\Phi_n \cdot g_R$, com Φ_n sendo o fator conforme dado por

$$\Phi_n(z) = 1 + n^2|z|^{2n-2} \left(\frac{1 + |z|^2}{1 + |z|^{2n}} \right)^2.$$

Finalmente, por conter resultados usados repetidas vezes ao longo da tese, apresentamos, baseados no livro escrito por P. Piccione e D. Tausk para a XIV Escola de Geometria ([19]), um apêndice (Apêndice A) onde estudamos a relação entre conexões lineares e conexões generalizadas. Nesse capítulo provamos proposições as quais se resumem da seguinte maneira:

Proposição 1. *O conjunto das conexões lineares num fibrado vetorial E tem uma correspondência um-a-um com um subconjunto do conjunto de todas as conexões generalizadas de E. Tal subconjunto do conjunto das conexões generalizadas de E é precisamente o conjunto das conexões generalizadas induzida por conexões principais em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Além disso, existe uma bijeção entre o conjunto das conexões principais em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ e o conjunto das conexões generalizadas em E cujo operador derivada covariante é uma conexão linear, em especial, há uma bijeção entre o conjunto das conexões principais de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ e o conjunto das conexões lineares de E.*

Capítulo 1

Imersões Isométricas

1.1 Variedades, Fibrados Vetoriais e Conexões

Entendemos por *variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k* um par $(M^n, \mathscr{A})$ formado por um espaço localmente euclideano M de dimensão n (i.e., um espaço topológico Hausdorff M onde, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $V_x \subset M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$) que obedece ao segundo axioma da enumerabilidade, e por uma estrutura diferenciável $\mathscr{A}$ de ordem C^k. Sempre que possível, denotaremos a variedade $(M, \mathscr{A})$ por M, e, sem mais, a chamaremos de "variedade diferenciável M". Pelo fato de nosso interesse residir em variedades de classe C^∞ assumiremos tal diferenciabilidade a menos de explícita menção contrária.

Denotamos por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções lisas (i.e. C^∞) a valores reais em M munido das operações usuais que o tornam um anel comutativo, e por $\mathfrak{X}(M)$ o módulo sobre $C^\infty(M)$ formado pelos campos vetoriais lisos de M.

Dados X e Y, campos vetoriais lisos sobre uma variedade M, define-se um campo vetorial $[X, Y]$, a que chamamos de *colchete de Lie* de X e Y, fazendo

$$[X, Y]_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} X_x(Yf) - Y_x(Xf),$$

onde $x \in M$ e $f \in C^\infty(M)$.

Seja V um módulo sobre um anel K. Denotaremos o *módulo dual* de V o módulo V^* sobre K formado pelo conjunto das funções K-lineares de V em K.

Para inteiros $r \geq 0$, $s \geq 0$ não ambos nulos, uma função K-multilinear A :

$(V^*)^r \times V^s \to K$ é chamada *tensor de tipo (r,s) sobre* V e, nesse caso diremos que A possui r componentes *contrariantes* e s *covariantes*. O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ formado por todos os tensores de tipo (r,s) sobre V é, novamente, um módulo sobre K. Por *tensor de tipo* $(0,0)$ *sobre* V entendemos um elemento de K.

Um *campo tensorial* A numa variedade M é um tensor sobre o $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Desta maneira se A é de tipo (r,s), ele é uma função $C^\infty(M)$-linear

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M).$$

Seja $\phi : M \to N$ uma função lisa. Se $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$, i.e., A é um campo tensorial do tipo $(0,s)$ sobre N, com $s \geq 1$, então definimos o *pull-back* de A como o campo tensorial $(\phi^* A) \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ tal que:

$$(\phi^* A)(v_1, \ldots, v_s) = A(\mathrm{d}\phi v_1, \ldots, \mathrm{d}\phi v_s),$$

para todos $v_i \in T_x M$, $x \in M$.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial sobre M. Denotemos por $\mathbf{\Gamma}(E)$ o conjunto de todas as seções lisas de E. Note que $\mathbf{\Gamma}(E)$, além de espaço vetorial real é, também, módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Definição 1.1.1. *Uma* conexão linear *em* E*, ou simplesmente uma* conexão *em* E*, é, assim, uma função* $\mathbb{R}$*-bilinear*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathbf{\Gamma}(E) \ni (X, \epsilon) \longmapsto \nabla_X \epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$$

que é $C^\infty(M)$*-linear em* X *e que satisfaz a* regra de Leibnitz*:*

$$\nabla_X (f\epsilon) = X(f)\epsilon + f \nabla_X \epsilon$$

para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$*,* $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ *e toda* $f \in C^\infty(M)$*.*

Uma conexão num fibrado vetorial E induz uma conexão em cada restrição de E a subconjuntos abertos do espaço base. Sobre isso trata o seguinte lema:

Lema 1.1.2. *Sejam* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial e* ∇ *uma conexão em* E*. Dado um subconjunto aberto* U *de* M *então existe uma única conexão* ∇^U *no fibrado vetorial restrito* $E|_U$ *tal que:*

$$\nabla_v^U (\epsilon|_U) = \nabla_v \epsilon, \tag{1.1}$$

para todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ *e todo* $v \in TM|_U$*.*

Demonstração. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial e ∇ uma conexão em E. Seja $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ uma seção lisa de E que se anula num aberto U de M, então $\nabla_v \epsilon$ também se anula, para todo $v \in TM|_U$. De fato, fixados $x_0 \in U$ e $v \in T_{x_0}M$, tome f uma função real com suporte em U que vale 1 numa vizinhança de x_0. Então:

$$\nabla_v \epsilon = \nabla_v f\epsilon = v(f)_{x_0}\epsilon + f(x_0)\nabla_v \epsilon = 0.$$

Desse modo temos que, se $\epsilon, \epsilon' \in \mathbf{\Gamma}(E)$ são iguais num aberto U de M, então $\nabla_v \epsilon$ e $\nabla_v \epsilon'$ são também iguais, para todo $v \in TM|_U$.

Seja, então, $\epsilon' \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$, $x \in U$, e escolha $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ tal que ϵ e ϵ' sejam iguais numa vizinhança aberta de x em U (por exemplo, multiplique ϵ' por uma função semelhante a f acima descrita). Se ∇^U é uma conexão em $E|_U$ satisfazendo (1.1) então temos que:

$$\nabla^U_v \epsilon' = \nabla_v \epsilon, \quad v \in T_xM; \tag{1.2}$$

o que prova a unicidade de ∇^U.

Observe que o lado direito da igualdade (1.2) não depende da escolha da seção $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ que é igual a ϵ' numa vizinhança aberta de x em U. Assim, podemos usar (1.2) como definição para $\nabla^U_v \epsilon'$. Facilmente se observa, então, que ∇^U é, de fato, uma conexão em $E|_U$. $\square$

De agora em diante, denotaremos a conexão ∇^U definida no Lema 1.1.2 pelo mesmo símbolo ∇ usado para denotar a conexão de E, a menos que uma explícita menção ao aberto U seja necessária.

Definição 1.1.3. *Definimos o* tensor curvatura *associado a uma conexão* ∇ *como a função* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathbf{\Gamma}(E) \to \mathbf{\Gamma}(E)$ *dada por:*

$$R(X,Y)\epsilon = \nabla_X \nabla_Y \epsilon - \nabla_Y \nabla_X \epsilon - \nabla_{[X,Y]}\epsilon$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$*, onde denotamos por* $[X,Y]$ *o* colchete de Lie *de* X *e* Y*.*

Para uma conexão ∇ *definida no fibrado tangente* TM*, definimos o* tensor torção *de* ∇ *como a função* $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *definida por:*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Nota 1.1.4. *Observamos que, mais amplamente, se temos uma conexão* ∇ *em um fibrado* E *e um morfismo de fibrados vetoriais* $\iota : TM \to E$ *podemos definir o* tensor ι-torção *como a função* $T^\iota : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbf{\Gamma}(E)$ *dada por:*

$$T^\iota : \nabla_X(\iota(Y)) - \nabla_Y(\iota(X)) - \iota([X,Y])$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, definimos uma *métrica semi-riemanniana* em E como um campo liso no espaço das funções bilineares simétricas de E em $\mathbb{R}$ ($g \in \mathrm{Lin}_2^s(E, \mathbb{R})$) tal que para todo $x \in M$, $g_x : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ seja não-degenerado. Entendemos por *índice* da métrica g no ponto x, $\mathrm{ind}(g_x)$, o maior inteiro que é a dimensão de subespaço $V \subset E_x$ com $g_x|_V$ negativo definido. Se o índice de g independe do ponto $x \in M$ dizemos que $\mathrm{ind}(g_x)$ é, também, o índice da estrutura semi-riemanniana g. Nesse caso escrevemos simplesmente $\mathrm{ind}(g)$. Caso o índice de g seja nulo diremos que g é uma *métrica riemanniana* em E e, caso $\mathrm{ind}(g) = 1$ diremos que a métrica é *lorentziana*. Notamos que ao longo deste texto, sempre que nos for conveniente, ao nos referirmos à um fibrado vetorial semi-riemanniano E (riemanniano ou lorentziano) denotaremos sua métrica por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ou simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dizemos que uma conexão ∇ em E é *compatível* com a métrica de E se:

$$X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle$$

para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$.

Definição 1.1.5. *Para um fibrado vetorial semi-riemanniano* $\pi : E \to M$ *definimos a* curvatura seccional *num plano não-degenerado* $\Pi \subset E_x$ *como:*

$$K(\Pi) = \frac{\langle R(v,w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

onde $v, w \in \Pi$ *é uma base qualquer de* Π.

Chamamos o par (M, g) formado por uma variedade diferenciável M e por uma métrica semi-riemanniana g em TM de *variedade semi-riemanniana*. Caso g tenha índice 0 ou 1 diremos, respectivamente, que (M, g) é uma *variedade riemanniana* ou *lorentziana*. Sem mais, nos referiremos a M como variedade semi-riemanniana (riemanniana, ou lorentziana) sempre que a métrica associada a M estiver clara ou não for de relevância ao discutido num determinado contexto.

Nota 1.1.6. *Lembramos que numa variedade semi-riemanniana M existe uma única conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que ∇ seja* simétrica*, i.e.*

$$T(X, Y) = 0$$

e que seja compatível com a métrica*. Tal conexão é conhecida como* conexão de Levi-Civita *de M, e é caracterizada pela conhecida* fórmula de Koszul*:*

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle.$$

Se (M, g) é uma variedade n-dimensional semi-riemanniana com métrica g de índice r com $K(\Pi) = c$ para todo plano não-degenerado $\Pi \subset TM$ dizemos que M tem *curvatura seccional constante* $c \in \mathbb{R}$. Nesse caso é fácil ver que:

$$R_x(v, w)u = c\big(g_x(w, u)v - g_x(v, u)w\big), \tag{1.3}$$

para todo $x \in M$ e todos $v, w, u \in T_x M$.

Denotemos por $L_X A$ a *derivada de Lie* do campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ ao longo de $X \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., seja $L_X A$ o campo tensorial dado por

$$(L_X A)_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\psi_t^*(A) - A_x\big),$$

para $x \in M$, onde ψ_t é o fluxo (local) de X com $\psi_0 = x$. Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um *campo de Killing* numa variedade semi-riemanniana (M, g) se X é tal que a derivada de Lie da métrica g na direção X se anula, i.e., se $L_X g = 0$.

1.2 Grupos de Lie

Dizemos que uma variedade diferenciável G é um *grupo de Lie* se esta é munida de uma estrutura de grupo tal que a função $G \times G \to G$ definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ é C^∞. Ao longo da tese, a menos de explícita menção contrária denotaremos por e o elemento identidade de um grupo de Lie.

Uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$ pareado a um operador bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (chamado *comutador*) tal que, para $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

- $[x, y] = -[y, x]$ (anti-comutatividade),

- $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (*identidade de Jacobi*).

A importância do conceito de álgebras de Lie, como se sabe, reside no fato de que para cada grupo de Lie existe uma álgebra de Lie de dimensão finita associada, tendo esses propriedades relacionadas. Por exemplo, temos que todo grupo de Lie conexo e simplesmente-conexo é completamente determinado (a menos de isomorfismo) por sua álgebra de Lie.

Seja $g \in G$. Chamamos os difeomorfismos de G, L_g e R_g, definidos, para todo $h \in G$, por

$$L_g(h) = gh$$
$$R_g(H) = hg$$

de *translação à esquerda* e *translação à direita*, respectivamente. Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ é dito *invariante à esquerda* se, para cada $g \in G$, X é L_g-relacionado com si mesmo, i.e.,

$$\mathrm{d}L_g \circ X = X \circ L_g.$$

A menos quando explicitamente afirmado diferente, denotaremos o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G pelo correspondente caractere germânico minúsculo $\mathfrak{g}$.

Apresentamos a seguir uma proposição cuja demonstração pode ser encontrada em [25, Proposition 3.7].

Proposição 1.2.1. *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ o conjunto de seus campos invariantes à esquerda. Então:*

- *$\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial real, e a função $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ definida por $\alpha(X) = X(e)$ é um isomorfismo de $\mathfrak{g}$ no espaço tangente a G na identidade e. Disso segue, obviamente, que $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_eG) = \dim(G)$;*

- *O colchete de Lie de dois campos invariantes à esquerda é ainda invariante à esquerda;*

- *$\mathfrak{g}$ forma uma álgebra de Lie com a operação de colchete de Lie em campos vetoriais.*

Assim sendo, definimos a *álgebra de Lie de um grupo de Lie G* a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à esquerda de G.

Uma função $\varphi : G \to H$ é um *homomorfismo* (de grupos de Lie) se φ é C^∞ e um homomorfismo de grupos. Chamamos φ de *isomorfismo* se, além de ser um homomorfismo, φ é um difeomorfismo. Um isomorfismo entre um grupo G e ele mesmo é chamado *automorfismo*.

Dizemos que (H, φ) é um *subgrupo de Lie* do grupo de Lie G se

- H é um grupo de Lie;
- (H, φ) é uma subvariedade de G;
- $\varphi : H \to G$ é um homomorfismo.

(H, φ) é dito ser um *subgrupo fechado* de G se $\varphi(H)$ é um subconjunto fechado de G.

Se $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ são álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$, então uma aplicação $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é dita *homomorfismo de álgebra de Lie* se σ preserva a operação de colchete, ou seja, se

$$[\sigma(X), \sigma(Y)] = \sigma([X, Y]), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Aqui, novamente usamos as expressões "isomorfismo" e "automorfismo" quando σ é, além de homomorfismo, um isomorfismo de espaços vetoriais e quando σ é um isomorfismo de uma álgebra em si mesma, respectivamente.

Um subespaço $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamado *subálgebra* (de Lie) se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ sempre que $X, Y \in \mathfrak{h}$. Obviamente, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ forma uma álgebra de Lie com o colchete induzido de $\mathfrak{g}$. Um subespaço $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, por sua vez, é dito ser um *ideal* em $\mathfrak{g}$.

O seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [25, Theorem 3.28], como comentamos anteriormente é de suma importância no estudo de grupos de Lie.

Teorema 1.2.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre a classe formada pelas álgebras de Lie isomorfas e a classe dos grupos de Lie simplesmente-conexos isomorfos.*

Seja $g \in G$ e $I_g : G \to G$ o *automorfismo interno* de G definido por:

$$I_g = L_g \circ R_g^{-1} = R_g^{-1} \circ L_g.$$

Definimos a *representação adjunta* de G em $\mathfrak{g}$ por:

$$\mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}I_g(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Um endomorfismo $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é chamado de *derivação* de $\mathfrak{g}$ se

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)],$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Se V é um espaço vetorial (não necessariamente de dimensão finita) sobre $\mathbb{R}$ e $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lin}(V)$ uma aplicação linear tal que

$$\sigma([X,Y]) = \sigma(X)\sigma(Y) - \sigma(Y)\sigma(X), \tag{1.4}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, então dizemos que σ é uma *representação* de $\mathfrak{g}$ em V. Notamos que, se V tem dimensão finita, então a equação 1.4 se equivale a dizer que σ é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{gl}(V)$.

Fixado $X \in \mathfrak{g}$ é de grande importância a função a que chamamos de *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$. Definimos tal função como o endomorfismo de $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

tal que

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y],$$

para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Não é difícil ver que ad_X é simultaneamente uma derivação e uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$.

Nota 1.2.3. *Se* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *é a representação adjunta de* G *em* $\mathfrak{g}$*, então temos que:*

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}.$$

(Para detalhes ver [25]).

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada de *nilpotente* se, para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um endomorfismo nilpotente.

Seja, ainda, $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. Chamamos de *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$ a subálgebra $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ assim definida:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{[X,Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Definimos indutivamente, então, para inteiros $k \geq 0$, o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^0\mathfrak{g} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{D}^k\mathfrak{g} &= \mathfrak{D}(\mathfrak{D}^{k-1}\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Dessa definição segue a sequência de subálgebras

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{D}^1\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{D}^2\mathfrak{g} \supseteq \ldots$$

onde o k-ésimo elemento, $\mathfrak{D}^k\mathfrak{g}$, é chamado de *$k$-ésima álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.

Uma álgebra $\mathfrak{g}$ é dita *solúvel* se $\mathfrak{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$, para algum inteiro $k \geq 0$. Um grupo de Lie G é chamado *solúvel* se sua álgebra $\mathfrak{g}$ é solúvel. O menor inteiro k tal que $\mathfrak{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ é chamado *índice de solubilidade* de G.

1.3 Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente. Dizemos que uma função diferenciável $f : M^n \to \overline{M}^m$ é uma *imersão* se a diferencial $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}\overline{M}$ for injetora para todo $x \in M$ $(m \geq n)$, e que é uma *submersão* se $\mathrm{d}f(x)$ for sobrejetora para todo $x \in M$ $(m \leq n)$. Se f é uma imersão injetora dizemos que M é uma *subvariedade* de $\overline{M}$. Caso, além de imersão isométrica, tenhamos que f é uma função aberta em $f(M)$ quando adotamos aí a topologia relativa, chamamos f de *mergulho*. O número $p = m - n$ é dito ser a *codimensão* de f.

Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^m$ entre duas variedades semi-riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, é dita *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle \mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y) \rangle_{\overline{M}}$$

para todo $x \in M$ e todos $X, Y \in T_xM$.

Nota 1.3.1. *Observamos que, se $f : M^n \to \overline{M}^m$ é uma simples imersão numa variedade semi-riemanniana de métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$, com $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$ não degenerada quando restrita a $\mathrm{d}f(T_xM)$, para todo $x \in M$, podemos definir a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M pela igualdade acima. Tal métrica tornaria, então, f, uma imersão isométrica.*

Seja $f : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão isométrica entre as variedades semi-riemannianas (M, g) e $(\overline{M}, \bar{g})$. Para cada $x \in M$ escolha $U \subset M$ uma vizinhança de x tal que $f(U) \subset \overline{M}$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$. No que se segue, para simplificar notação, identificamos U com $f(U)$ e cada $v \in T_pM$, $p \in U$, com $\mathrm{d}f_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$. Assim, identificaremos também um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com uma seção do fibrado $T\overline{M} \to M$, i.e., com uma seção em $\mathbf{\Gamma}(T\overline{M})$. Uma vez que f é imersão semi-riemanniana, temos que a restrição de $\bar{g}$ a $\mathrm{d}f(T_pM)$ é não-degenerada, para todo e qualquer $p \in M$, e assim segue que espaço tangente de $\overline{M}$ em p se decompõe na seguinte soma direta:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

onde chamamos de $T_pM^\perp$ o subespaço de $T_p\overline{M}$ ortogonal a T_pM em relação a métrica $\bar{g}$. Chamamos de *co-índice* de M em $\overline{M}$ o índice de $\bar{g}$ restrita a $T_pM^\perp$. É, então, fácil ver que $\mathrm{ind}\overline{M} = \mathrm{ind}M + \mathrm{coind}M$.

Dizemos que vetores em $T_pM^\perp$ são *normais* a M e que vetores em T_pM são *tangentes* a M. Assim, para campos normais a M, escrevemos $X \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e, para campos vetoriais tangentes a M, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotaremos as projeções ortogonais associadas a soma direta acima da seguinte maneira:

$$(\cdot)^T : T_p\overline{M} \to T_pM \qquad \text{e} \qquad (\cdot)^\perp : T_p\overline{M} \to T_pM^\perp.$$

Lembramos, agora, que para ∇, uma conexão num fibrado $\pi : E \to M$, $x \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, o valor de $(\nabla_X \epsilon)_x$ depende apenas do valor do campo X no ponto x e do valor de ϵ numa curva em M tangente a $X(x)$.

Considere uma imersão f da variedade M numa variedade $\overline{M}$ munida de uma conexão $\overline{\nabla}$ e $\overline{\pi} : T\overline{M} \to M$ o fibrado vetorial a essa imersão associado. Por $\overline{\nabla}_X Y$ ($X, Y \in \mathbf{\Gamma}(T\overline{M})$) entendemos o campo vetorial em $\mathbf{\Gamma}(T\overline{M})$ igual a restrição a M do campo $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $\overline{X}$ e $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ são respectivas extensões de X e Y a $\overline{M}$. Desta maneira, de acordo com a observação feita no parágrafo anterior, temos que $\overline{\nabla}_X Y$ não depende das extensões escolhidas.

Voltando agora a $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$, imersão isométrica entre duas variedades semi-riemannianas, se denotamos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, verifica-se facilmente que podemos, de maneira natural, a partir de $\overline{\nabla}$, induzir uma conexão em M. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais em M. Defina a conexão ∇ da seguinte forma:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T.$$

Notamos que ∇, assim definida, é de fato uma conexão em M e coincide com a conexão de Levi-Civita de M.

Definição 1.3.2. *Por* segunda forma fundamental *associada a imersão isométrica f entendemos o tensor $C^\infty(M)$-bilinear simétrico*

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$$

assim definido:

$$\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp,$$

onde X, Y são campos vetoriais em M.

Se $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ definimos o *operador forma* (ou *forma de Weingarten*) na direção ξ como sendo o operador $C^\infty(M)$-linear $A_\xi : TM \to TM$ definido, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de modo a termos:

$$g(A_\xi X, Y) = \bar{g}(\alpha(X,Y), \xi).$$

Neste caso, verifica-se facilmente que $A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T$.

Definição 1.3.3. *Definimos a* conexão normal *de f como sendo a conexão em $TM^\perp$ tal que:*

$$\nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp,$$

onde $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Das definições acima seguem a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \tag{1.5}$$

e a *Fórmula de Weingarten*

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \tag{1.6}$$

Agora, a partir das fórmulas de Gauss e de Weingarten podemos deduzir as equações fundamentais de uma imersão isométrica, isto é, as conhecidas equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X + \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde a primeira igualdade segue da fórmula de Gauss e a segunda igualdade de ambas, Gauss e Weingarten.

Analogamente:

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z). \tag{1.8}$$

Novamente da fórmula de Gauss segue:

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y], Z). \tag{1.9}$$

Subtraindo 1.8 e 1.9 de 1.7 obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)} X + A_{\alpha(X,Z)} Y + \\ + \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\ - (\nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z)) - \alpha([X,Y], Z), \end{aligned}$$

onde denotamos por R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente.

Uma vez que a torção de M é nula (∇ conexão de Levi-Civita) temos:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y +& \\ + (\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z))& \\ - (\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z)).& \quad (1.10)\end{aligned}$$

Tomando as componentes tangenciais e normais obtemos de 1.10 duas equações:

- **Equação de Gauss**:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle& \\ + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle& \quad (1.11)\end{aligned}$$

  onde $W \in \mathfrak{X}(M)$, e,

- **Equação de Codazzi**:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) \quad (1.12)$$

  onde, por definição, temos:

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z).$$

Notamos que $\nabla^{\perp}\alpha$ é $C^{\infty}(M)$-multilinear. Nesse contexto, temos $\nabla^{\perp}$ uma conexão no fibrado vetorial $\mathrm{Hom}(TM \times TM, TM^{\perp})$.

Denotemos por $R^{\perp}$ o tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$. Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, segue, de maneira semelhante ao que fizemos para as equações de Gauss e Codazzi, que:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi + A_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y + \nabla_Y(A_\xi X) + \alpha(A_\xi X, Y)& \\ - A_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X - \nabla_X(A_\xi Y) - \alpha(X, A_\xi Y) + A_\xi[X,Y].& \quad (1.13)\end{aligned}$$

Então, tomando a componente normal de 1.13, segue:

- **Equação de Ricci** :

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y) \quad (1.14)$$

  ou, tomando $\eta \in \mathbf{\Gamma}(TM^{\perp})$, e observando que $\langle \alpha(X,Y),\xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle$:

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle \quad (1.15)$$

  onde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

Observamos que, se tomarmos a componente tangencial de 1.13, segue da simetria das curvaturas e da ausência de torção a equação de Codazzi, novamente.

1.4 Teorema Fundamental das Imersões Isométricas em Formas Espaciais Riemannianas

Denotemos por Q_c^n a variedade riemanniana n-dimensional completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante c, i.e., o *espaço euclideano* $\mathbb{R}^n$ $(c = 0)$, a *esfera euclideana* $\mathbb{S}^n$ $(c > 0)$ ou o *espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$ $(c < 0)$.

De acordo com o provado na Seção 1.3, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas por toda imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$. No caso em que $\overline{M}^{n+p} = Q_c^{n+p}$, temos uma recíproca local para tal fato. Além do mais, se M é simplesmente conexa a recíproca é global.

Teorema 1.4.1.

(i) *Sejam M^n uma variedade riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial riemanniano de posto p com uma conexão compatível ∇^E, e α uma seção do fibrado de homomorfismos* $\mathrm{Hom}(TM \times TM, E)$. *Defina, para cada $\xi \in \mathbf{\Gamma}(E)$, uma função $A_\xi : TM \to TM$ tal que*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se α e ∇^E satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para um ambiente de curvatura seccional constante c, então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$, e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{f} : E \to TM^\perp$ ao longo de f, tal que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todos $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ temos:

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)\rangle = \langle \xi, \eta\rangle, \\ &\tilde{f}\alpha(X,Y) = \tilde{\alpha}(X,Y), \\ &\tilde{f}\nabla^E_X \xi = \nabla^\perp_X \tilde{f}(\xi), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

(ii) *Suponha que f e g sejam imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em Q_c^{n+p}. Sejam $TM_f^\perp$, α_f e $\nabla_f^\perp$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente;*

e sejam $TM_g^\perp$, α_g e $\nabla_g^\perp$ os objetos correspondentes para g. Se existe $\phi : TM_f^\perp \to TM_g^\perp$, isomorfismo de fibrados vetoriais, tal que, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todos $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ temos:

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(\xi), \phi(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \\
&\phi\alpha_f(X, Y) = \alpha_g(X, Y) \\
&\phi\nabla^\perp_{fX}\xi = \nabla^\perp_{gX}\phi(\xi),
\end{aligned}$$

então existe uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que

$$g = \tau \circ f \qquad e \qquad \mathrm{d}\tau|_{TM_f^\perp} = \phi.$$

Demonstração. Nos restringiremos aqui a demonstração do teorema ao caso de subvariedades do espaço euclideano, reapresentando a prova encontrada em [2].

Inicialmente provaremos (i). Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de M. Considere a soma de Whitney $\widehat{E} = TM \oplus E$ munida da métrica dada pela soma ortogonal das métricas em TM e em E. Defina, então, a conexão $\widehat{\nabla}$ por:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \\
&\widehat{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^E_X \xi
\end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathbf{\Gamma}(E)$.

Não é difícil ver que tal conexão é compatível com a métrica de $\hat{E}$. Usando que α e ∇^E satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante zero, é imediato mostrar que o tensor de curvatura de $\hat{E}$ é identicamente nulo. Fixe um ponto $x \in M$, e vetores ortonormais $\xi_1, \ldots, \xi_{n+p} \in \hat{E}_x = \pi^{-1}(x)$. Como M é simplesmente-conexa e o tensor de curvatura de $\hat{E}$ nulo, existem únicas extensões globais de $\xi_1, \ldots, \xi_{n+p}$ paralelas em relação a $\widehat{\nabla}$. Seções essas a que ainda denotaremos por $\xi_1, \ldots, \xi_{n+p}$. Tais seções são ponto a ponto ortonormais uma vez que $\widehat{\nabla}$ é compatível com a métrica. Escolha coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ numa vizinhança U de x. Desse modo, existem funções $a_{i\nu}$ definidas em U, tais que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu}\xi_\nu, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Assim, os coeficientes da métrica de M são dados por

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} a_{j\nu}.$$

Visto que as seções ξ_ν são paralelas, temos

$$\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{\nu=1}^{n+p} \frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} \xi_\nu.$$

Usando que α é simétrica, que ∇ é a conexão de Levi-Civita de M, e que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, temos

$$\frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} = \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j}.$$

Como 1-formas fechadas são exatas em U, existem funções f_ν que satisfazem $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} = a_{i\nu}$. Defina, então, numa vizinhança U de x, a função $f : U \to \mathbb{R}^{n+p}$ de modo que $f = (f_1, \ldots, f_{n+p})$. Assim, temos

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (a_{i1}, \ldots, a_{i(n+p)}),$$

e, para $i, j = 1, \ldots, n$, temos

$$\left\langle \mathrm{d}f \frac{\partial}{\partial x_i}, \mathrm{d}f \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} a_{j\nu} = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Ou seja, f é uma imersão isométrica. Definimos um isomorfismo ϕ entre os fibrados $TU \oplus E$ e $T\mathbb{R}^{n+p}|_{f(U)} = Tf(U) \oplus Tf(U)^\perp$ por $\phi(\xi_\nu) = e_\nu$, onde e_ν ($\nu = 1, \ldots, (n+p)$) é a restrição do referencial canônico de $T\mathbb{R}^{n+p}$ a $f(U)$. Para os vetores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} \xi_\nu$, temos

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} \phi(\xi_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} e_\nu = \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Assim, ϕ leva $TM|_U$ isomorficamente sobre $Tf(U)$. Como uma isometria de fibras, ϕ mapeia E isomorficamente sobre $Tf(U)^\perp$. Além disso, como ϕ leva o referencial paralelo ortonormal $\xi_1, \ldots, \xi_{n+p}$ no referencial paralelo ortonormal $e_1, \ldots, e_{n+p}$, ϕ satisfaz para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in E$,

$$\phi(\widehat{\nabla}_X Y) = \widehat{\nabla}_{\mathrm{d}fX} \phi(Y), \quad \phi(\widehat{\nabla}_X \xi) = \widehat{\nabla}_{\mathrm{d}fX} \phi(\xi)$$

onde $\widehat{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+p}$. Tomando as componentes normais e definindo $\tilde{f} = \phi|_E$, obtemos

$$\tilde{f}\alpha(X,Y) = \tilde{\alpha}(X,Y), \quad \tilde{f}\nabla^E_X Y = \nabla^{\perp}_{\mathrm{d}f(X)}\tilde{f}(\xi).$$

Se houvéssemos escolhido coordenadas locais $y_1, \ldots, y_n$ diferentes, ainda obteríamos as equações $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} = a_{i\nu}$. Uma vez que essas equações determinam f a menos de uma constante, a imersão fica determinada a menos de uma translação. Se nossa escolha houvesse diferido no referencial inicial, as isometrias difeririam apenas por uma rotação. Desse modo f fica determinada a menos de um movimento rígido. O fato de M ser simplesmente conexa nos permite unir as isometrias locais em uma global. Para detalhes ver [24]. Para provarmos (ii), temos que ambos os fibrados $T(\mathbb{R}^{n+p})|_{f(M)}$ e $T(\mathbb{R}^{n+p})|_{g(M)}$ contêm o fibrado tangente TM, e que existe um isomorfismo de fibrados que preserva métrica e conexão, e é identidade em TM. Assim, se f é como em (i) temos que, numa vizinhança, a diferença reside apenas num movimento rígido de $\mathbb{R}^{n+p}$. Isso conclui, então, a demonstração. □

1.5 Imersões Mínimas

Definição 1.5.1. *Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$, definimos o* tensor curvatura média *$H(x)$ de f em $x \in M$ como*

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha(X_j, X_j)$$

onde α é a segunda forma fundamental de f, e $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$ é uma base ortonormal de T_xM.

Nota 1.5.2. *Observe que, se $\xi_1, \ldots, \xi_p \in TxM^{\perp}$ é uma base ortonormal de $TxM^{\perp}$, podemos escrever:*

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{tr}A_{\xi_j})\xi_j$$

onde denotamos por tr *a função que associa a um operador linear o seu traço.*

Nesse caso, fica claro que $H(x)$ não depende da escolha do *referencial* ortonormal $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$.

Dizemos que uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ é *minima* em $x \in M$ quando $H(x) = 0$. Caso f seja mínima em toda M diremos que f é uma *imersão mínima*. Note que se f é *totalmente geodésica* em $x \in M$, i.e. α se anula em x, então f é mínima em x.

Dada uma função lisa $f : (M, g) \to (M', g')$ entre variedades riemannianas, definimos o campo *tensão* τ de f como sendo igual ao divergente de $\mathrm{d}f$, i.e., $\tau(f) = \mathrm{div}(\mathrm{d}f)$, e dizemos que f é uma *função harmônica* se $\tau(f) = 0$.

Num dos conhecidos artigos de J. Eells ([9]), encontramos a seguinte proposição de inestimável interesse no estudo de imersões mínimas.

Proposição 1.5.3. *Se é $f : M \to M'$ uma imersão isométrica entre variedades riemannianas, então o campo tensão $\tau(f)$ coincide com o tensor curvatura média de f. Assim sendo, segue que f é uma função harmônica se e somente se f for uma imersão mínima.*

A escolha do adjetivo "mínimo" associado a tais imersões remonta ao estudo de um funcional E de interesse geométrico e físico análogo a energia. Imersões mínimas são, nesse contexto, caracterizadas como extremos de E. Apresentaremos, no que se segue, uma breve introdução de caráter meramente ilustrativo nessa direção. Para mais detalhes é interessante a leitura de [9] e [8].

Sejam $f : (M, g) \to (M', g')$ uma função C^∞ entre variedades riemannianas, x um ponto de M e $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ o produto interno canonicamente induzido no espaço dos tensores de tipo $(2, 0)$ sobre T_xM a partir da métrica de M. Chamamos $e(f)_x = \frac{1}{2}\langle g_x, (f^*g')_x \rangle_x$ de *densidade de energia* de f em x. Definimos, então, o funcional *energia* E calculado em f como:

$$E(f) = \int_M e(f)_x \mathrm{d}x.$$

Defina em $\Gamma(f)$, i.e. no conjunto de campos vetoriais ao longo de f, o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_f = \int_M g'(u(x), v(x))_{f(x)} dx, \quad u, v \in \Gamma(f).$$

Então, para $v \in \Gamma(f)$, denote por $\nabla_v E(f)$ a derivada direcional de E na direção v. Curiosamente, observa-se que:

$$\nabla_v E(f) = -\langle \tau(f), v \rangle_f, \quad \forall v \in \Gamma(f).$$

(Veja [9], p. 115, para mais detalhes.)

Do resultado acima apresentado segue que f é uma função harmônica (imersão mínima), se e somente se ela é um extremo do funcional energia E.

1.6 Família Associada a uma Imersão Mínima

É clássico na geometria o resultado que associa a uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ uma família a 1 parâmetro de imersões mínimas no mesmo ambiente (ver [24], IV p. 401). Num trabalho realizado por Dajczer e Gromoll em [3] tal resultado foi generalizado provando a existência de uma família a 1 parâmetro de imersões mínimas associada a uma subvariedade real Käehler mínima do espaço euclideano. É a este resultado que dedicamos esta seção.

Seja V é um espaço vetorial sobre um campo K. Dizemos que J é uma *estrutura complexa* em V se J é um tensor do tipo $(1,1)$ em V tal que $J^2 = -I$, onde denotamos por I a aplicação identidade de V. Fixado um fibrado vetorial $\Pi : E \to M$ com fibra típica E_0, por *estrutura complexa* em E entendemos um seção lisa J de $\mathrm{Lin}(E)$ tal que J_x é uma estrutura complexa em E_x, para todo $x \in M$.

Numa variedade diferenciável real M definimos *estrutura quase complexa* em M como uma estrutura complexa definida no fibrado tangente de M. Um par então formado por M e J é denominado *variedade quase complexa.* Por abuso de linguagem, sempre nos referirmos a M como uma variedade quase complexa, e, exceto onde diversamente dito, denotaremos sua estrutura complexa por J. É simples ver que uma variedade quase complexa M tem sempre dimensão par, e que cada espaço tangente T_xM possui uma base da forma $X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n$. Chamamos uma base assim constituída de J-base de T_xM. Uma vez duas quaisquer J-bases diferem por um isomorfismo de determinante positivo, concluímos que uma variedade quase complexa é sempre orientável.

Definimos uma *variedade semi-Käehler* M como uma variedade semi-riemanniana e quase complexa tal que sua estrutura quase complexa J seja paralela com respeito a conexão de Levi-Civita e tal que J_x é anti-simétrico com respeito a g_x, para todo $x \in M$, ou seja, M é uma variedade semi-riemanniana quase complexa com conexão de Levi-Civita ∇ tal que:

$$\langle JX, Y \rangle = -\langle X, JY \rangle$$

e

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. No caso em que a métrica de M tem índice zero, ou seja, se M é uma variedade riemanniana, dizemos que M é uma *variedade Käehler.*

Definição 1.6.1. *Dada uma imersão isométrica $f : M^{2n} \to \overline{M}^{2n+p}$ de uma variedade Käehler, dizemos que a imersão é* circular *se a segunda forma fundamental α de f satisfaz*

$$\alpha(X, JY) = \alpha(JX, Y)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dajczer e Rodrigues em [4] provaram que uma imersão isométrica $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ de uma variedade Käehler no espaço euclideano é uma imersão mínima se e somente se for circular. Deste resultado segue o teorema de Dajczer-Gromoll:

Teorema 1.6.2. *Seja M^{2n} uma variedade Käehler simplesmente conexa, e seja $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ uma imersão isométrica mínima. Existe, então, uma família a 1 parâmetro $f_\theta : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$, $\theta \in [0, \pi)$ de imersões isométricas mínimas tal que $f_0 = f$.*

Demonstração. Considere para cada $\theta \in [0, \pi)$ o tensor $T_\theta : TM \to TM$ definido por

$$T_\theta = \cos\theta I + \sin\theta J$$

onde J é a estrutura complexa de M e I o campo tensorial identidade. Para T_θ as seguintes propriedades são claras:

- T_θ é paralelo com respeito a conexão de Levi-Civita de M;
- T_θ é um campo tensorial ortogonal;
- $T_\theta \circ T_{-\theta} = I$.

Seja $\alpha_\theta : TM \times TM \to TM^\perp$ a forma bilinear dada por

$$\alpha_\theta(X, Y) = \alpha(T_\theta X, Y)$$

onde α é a segunda forma fundamental de f. Para cada $\xi \in \mathbf{\Gamma}(TM^\perp)$, denotamos por A_ξ^θ a transformação linear associada a α_θ, i.e.,

$$\left\langle A_\xi^\theta X, Y \right\rangle = \langle \alpha_\theta(X, Y), \xi \rangle, \qquad \text{para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se A_ξ denota a o operador forma de f na direção ξ, é fácil ver que

$$A_\xi^\theta = T_{-\theta} A_\xi = A_\xi T_\theta.$$

Da circularidade de f, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, segue

$$\begin{aligned}\left\langle A_\xi^\theta X, Y\right\rangle &= \cos\theta\langle\alpha_\theta(X,Y),\xi\rangle + \sin\theta\langle\alpha_\theta(JX,Y),\xi\rangle\\ &= \cos\theta\langle\alpha_\theta(X,Y),\xi\rangle + \sin\theta\langle\alpha_\theta(X,JY),\xi\rangle\\ &= \cos\theta\langle A_\xi X, Y\rangle - \sin\theta\langle JA_\xi X, Y\rangle\\ &= \langle T_{-\theta}A_\xi X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ segue das igualdades acima e das propriedades de T_θ que

$$\begin{aligned}\left\langle A_\xi^\theta X, Y\right\rangle &= \langle A_\xi T_\theta X, Y\rangle = \langle T_\theta X, A_\xi Y\rangle\\ &= \langle X, T_{-\theta}A_\xi Y\rangle = \left\langle X, A_\xi^\theta Y\right\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que A_ξ^θ é um operador auto-adjunto.

A partir das propriedades acima listadas é direta a prova de que α_θ obedece a equação de Gauss para f.

Se definirmos, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathbf{\Gamma}(TM^\perp)$,

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_X^\perp \xi} X,$$

no contexto aqui estudado, a equação de Codazzi assume a seguinte forma:

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = (\nabla_X A)(Y,\xi). \tag{1.16}$$

Uma vez que T_θ é paralelo e $A_\xi^\theta = T_{-\theta}A_\xi$ segue de 1.16 que A^θ também obedece a equação de Codazzi para a imersão f.

Para a equação de Ricci temos

$$\begin{aligned}\langle[A_\xi^\theta, A_\eta^\theta]X, Y\rangle &= \langle A_\xi^\theta A_\eta^\theta X, Y\rangle - \langle A_\eta^\theta A_\xi^\theta X, Y\rangle\\ &= \langle A_\xi T_\theta T_{-\theta} A_\eta X, Y\rangle - \langle A_\eta T_\theta T_{-\theta} A_\xi X, Y\rangle\\ &= \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle\end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathbf{\Gamma}(TM^\perp)$. Donde segue que a equação de Ricci para f continua válida com o operador forma A^θ.

Sob estas condições segue do Teorema Fundamental de Imersões que existe uma imersão isométrica $f_\theta : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$, única a menos de isometrias de $\mathbb{R}^{2n+p}$, cuja segunda forma fundamental é α_θ. Obviamente $f_0 = f$.

Para finalmente provarmos o teorema, observamos que f_θ é mínima uma vez que tal imersão é circular. De fato, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\begin{aligned}\alpha_\theta(JX, Y) &= \alpha(T_\theta JX, Y)\\ &= \cos\theta\alpha(JX, Y) + \sin\theta\alpha(J^2X, Y)\\ &= \cos\theta\alpha(X, JY) + \sin\theta\alpha(X, J^2Y)\\ &= \alpha_\theta(X, JY).\end{aligned}$$

□

A família f_θ acima obtida é denominada *família associada* a imersão isométrica mínima f.

Capítulo 2

G-estruturas e Imersões Afins

2.1 Fibrados Principais

Iniciamos esta seção com a definição de espaços principais. Estes são estruturas algébricas que apresentam, em relação aos grupos, análogo papel ao dos espaços afins em relação aos espaços vetoriais. Um *espaço principal* consiste de um conjunto não vazio P e um grupo G que age à direita livre e transitivamente sobre P. Chamamos G de *grupo estrutural* do espaço principal P. Lembramos que o fato de G agir livre e transitivamente sobre P significa que para quaisquer $p, p' \in P$ existe um único elemento $g \in G$ (a que usualmente denotaremos por $p^{-1}p'$) tal que $p' = p \cdot g$. Nesse caso diremos que *g leva p em p'*.

Sejam dois grupos G e H, P um espaço G-principal e Q um espaço H-principal. Uma aplicação $\phi : P \to Q$ é dita ser um *morfismo de espaços principais* se existe um homomorfismo de grupos $\phi_0 : G \to H$ tal que:

$$\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot \phi_0(g), \tag{2.1}$$

para todo $p \in P$ e todo $g \in G$. Chamamos ϕ_0 de *homomorfismo de grupos subjacente ao morfismo ϕ*.

Sejam P um espaço principal com grupo estrutural G e H um subgrupo de G. Suponha que $Q \subset P$ é uma *H-órbita*, i.e., Q é dado, para algum $a \in P$, pela imagem de H pela função $\beta_a : G \to P$, tal que

$$\beta_a(g) = g \cdot a.$$

Então Q é um espaço principal com grupo estrutural H; chamamos Q de *subespaço principal* de P.

Isso posto, definimos fibrado principal.

Definição 2.1.1. *Um* fibrado principal *consiste numa estrutura formada pelos seguintes elementos:*

- *um conjunto P, chamado de* espaço total*;*
- *uma variedade diferenciável M, chamada de* espaço base*;*
- *uma aplicação $\Pi : P \to M$, denominada* projeção*;*
- *um grupo de Lie G, chamado* grupo estrutural*;*
- *uma ação a direita de G em P*

$$P \times G \ni (p, g) \longmapsto p \cdot g \in P$$

  que, para todo $x \in M$, torna a fibra $P_x = \Pi^{-1}(x)$ um espaço principal com grupo estrutural G;
- *um atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$ de seções locais de Π, cujos elementos chamamos de* seções locais admissíveis.

Nota 2.1.2. *Muitas das vezes em que trabalhamos com fibrados principais nos referimos a projeção $\Pi : P \to M$ ou ao espaço total P como se fossem a coleção de objetos acima listada. Assim, constantemente diremos que P é um fibrado principal* sobre *M ou que P (ou $\Pi : P \to M$) é um* fibrado G-principal.

Seja P um fibrado G-principal sobre M. Para cada seção local admissível $s : U \to P$ a função:

$$\beta_s : U \times G \ni (x, g) \longmapsto s(x) \cdot g \in \Pi^{-1}(U) \subset P \tag{2.2}$$

é uma bijeção. Não é difícil ver que existe uma única estrutura diferenciável no conjunto P tal que para toda seção local admissível $s : U \to P$ o conjunto $\Pi^{-1}(U)$ é aberto em P e a função β_s é um difeomorfismo C^∞. Assim sendo, sempre consideraremos o espaço total P do fibrado principal munido de tal estrutura diferenciável.

Definição 2.1.3. *Se P é um fibrado G-principal sobre M e H é um subgrupo de Lie de G, definimos um* sub-fibrado principal *de P com grupo estrutural H o subgrupo Q de P satisfazendo as seguintes condições:*

- *para todo $x \in M$, $Q_x = P_x \cap Q$ é um subespaço principal de P_x com grupo estrutural H (Q_x é uma H-*órbita*);*

- *para todo $x \in M$, existe uma seção local lisa $s : U \to P$ tal que $x \in U$ e $s(U) \subset Q$.*

Sejam P e Q fibrados principais sobre a mesma variedade diferenciável M, com grupos estruturais G e H respectivamente. Uma função $\phi : P \to Q$ é dita *preservar fibra* se $\phi(P_x) \subset Q_x$, para todo $x \in M$. Um *morfismo de fibrados principais* de P em Q é uma função que preserva fibra lisa $\phi : P \to Q$ para a qual existe um homomorfismo de grupos $\phi_0 : G \to H$ tal que para todo $x \in M$, a aplicação $\phi_x = \phi|_{P_x} : P_x \to Q_x$ é um morfismo de espaços principais com homomorfismo de grupos subjacente ϕ_0. Se ϕ é um morfismo de fibrados principais entre P e Q bijetor então dizemos que ϕ é um *isomorfismo de fibrados principais*. Observe que nesse caso, ϕ_0 é também, obrigatoriamente, uma bijeção (isomorfismo de grupos).

Um fibrado G-principal sobre uma variedade diferenciável M pode ser pensado como um família $(P_x)_{x \in M}$ de espaços principais P_x com grupo estrutural G que "varia diferenciavelmente" quando parametrizada por pontos de M. Se M' é uma outra variedade diferenciável e $f : M' \to M$ uma função lisa então torna-se natural considerarmos uma reparametrização $(P_{f(y)})_{y \in M'}$ da família $(P_x)_{x \in M}$ pela aplicação f. Tal ideia nos motiva a definirmos o pull-back de um fibrado principal.

Seja, então, $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal e seja $f : M' \to M$ uma função lisa definida numa variedade diferenciável M'. O *pull-back* de P por f é o conjunto f^*P definido por:

$$f^*P = \bigcup_{y \in M'} \big(\{y\} \times P_{f(y)}\big).$$

Assim, o conjunto f^*P é um subconjunto do produto cartesiano $M' \times P$. Seja $\Pi_1 : f^*P \to M'$ a restrição a f^*P da projeção na primeira coordenada e $\bar{f} : f^*P \to P$ a restrição a f^*P da projeção na segunda coordenada; temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\Pi_1"'] & P \arrow[d, "\Pi"] \\ M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Chamamos $\bar{f} : f^*P \to P$ de *função canônica* associada ao pull-back f^*P.

2.2 Fibrado de *Referenciais* e G-estruturas

Seja E_0 um espaço vetorial real e E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M. Denotamos por $\mathrm{FR}_{E_0}(E) = \bigcup_{x\in M} \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$ o *fibrado de referenciais* de E, o qual consiste no conjunto de todos os isomorfismos lineares $p : E_0 \to E_x$ ($p \in \mathrm{FR}_{E_0}(E_x)$), com $x \in M$. $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ é um fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal sobre M. Quando $E_0 = \mathbb{R}^k$ escrevemos simplesmente $\mathrm{FR}(E)$ ao invés de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Uma seção local $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ (onde U é um aberto de M) é chamado de um E_0-*referencial local* por E.

Se E é um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M com fibra típica E_0, e $f : M' \to M$ é uma função lisa definida numa variedade diferenciável M', então por *pull-back* de E por f entendemos o conjunto f^*E definido por:

$$f^*E = \bigcup_{y\in M'} \big(\{y\} \times E_{f(y)}\big).$$

Observe que o conjunto $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$ pode ser naturalmente identificado com o pull-back $f^*\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Tal identificação torna $\mathrm{FR}_{E_0}(f^*E)$ num fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal e, assim, f^*E num fibrado vetorial com fibra típica E_0.

Seja g_0 um produto interno em E_0 de índice r, denotamos por $\mathrm{O}(g_0)$ o *grupo ortogonal* de E_0, i.e., o subgrupo de $\mathrm{GL}(E_0)$ formado por todas as isometrias lineares de (E_0, g_0). Se $E_0 = \mathbb{R}^k$ é munido do produto interno de Minkowski de índice r, denotamos tal grupo também por $\mathrm{O}_r(k)$. Assim sendo, definimos $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E) = \bigcup_{x\in M} \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(E_x)$ como o subfibrado $\mathrm{O}(g_0)$-principal de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ formado por todas as isometrias lineares $p : E_0 \to E_x$, com $x \in M$, e chamamos tal conjunto de *fibrado de referenciais ortonormais* de E.

Definição 2.2.1. *Dado um subgrupo de Lie G de* $\mathrm{GL}(E_0)$*, por G-*estrutura *em E entendemos um sub-fibrado G-principal P de* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$*.*

Nota 2.2.2. *Um E_0-referencial local $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ de E com $s(U) \subset P$ é dito* compatível *com a G-estrutura P. Para M, uma variedade diferenciável n-dimensional e G um subgrupo de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$*, dizemos que P é uma* G-estrutura em *M se $P \subset \mathrm{FR}(TM)$ é uma G-estrutura no fibrado tangente TM.*

Sejam M', M variedades diferenciáveis e $f : M' \to M$ uma função C^∞. Denote por $\pi : TM \to M$, $\pi' : TM' \to M'$ as projeções e por $\pi_1 : f^*TM \to M'$ o pull-back de TM por f. Observe que f^*TM é um subconjunto de $M' \times TM$, e defina, então, $\overline{f} : f^*TM \to TM$ como a restrição a f^*TM da projeção na segunda coordenada. Deste modo, existe um único morfismo de fibrados vetoriais $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM' \to f^*TM$ tal que $\overline{f} \circ \overleftarrow{\mathrm{d}f} = \mathrm{d}f$ e $\pi_1 \circ \overleftarrow{\mathrm{d}f} = \pi'$.

Definição 2.2.3. *Sejam G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e M', M variedades diferenciáveis n-dimensionais munidas de G-estruturas P' e P, respectivamente. Então, uma função lisa $f : M' \to M$ é dita* preservar G-estrutura *se o morfismo de fibrados vetoriais $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM' \to f^*TM$ preserva G-estrutura (onde f^*TM é munida da G-estrutura f^*P), i.e.,* $\mathrm{d}f$ *é tal que, para cada $p \in P'$ temos* $\mathrm{d}f(p) \in f^*P$.

2.3 Conexões

Seja $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0 e seja ϵ uma seção lisa de E ($\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$). Se $E = M \times E_0$ é um fibrado vetorial trivial sobre M então ϵ pode ser escrito como $\epsilon(x) = \big(x, \tilde{\epsilon}(x)\big)$, onde $\tilde{\epsilon} : M \to E_0$ é uma função lisa; identifiquemos, assim, uma seção lisa ϵ de $E = M \times E_0$ com a função $\tilde{\epsilon} : M \to E_0$. Dado $x \in M$ e $v \in T_xM$, pode-se considerar a *derivada direcional* $\mathrm{d}\tilde{\epsilon}(x) \cdot v$ de $\tilde{\epsilon}$ em x, na direção de v. Isso posto, nos perguntamos o que significaria uma derivada direcional num fibrado vetorial arbitrário E. Uma vez que todo fibrado pode ser localmente trivializado, uma primeira tentativa seria considerarmos um E_0-referencial local liso $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ com $x \in U$. Assim se $\tilde{\epsilon} : U \to E_0$ denota a representação de $\epsilon|_U$ em relação a s, uma tentativa natural para se definir a derivada direcional de ϵ no ponto x na direção v seria fazer:

$$\text{(derivada direcional de } \epsilon \text{ em } x \text{ na direção } v) = s(x)\big(\mathrm{d}\tilde{\epsilon}(x) \cdot v\big).$$

Obviamente, para tal definição ter sentido precisamos checar o que ocorre quando outro E_0-referencial $s' : V \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ com $x \in V$ é escolhido. No entanto, fazendo isso observa-se que tal definição não é boa.

Uma alternativa que nos resta é a seguinte: se $\epsilon : M \to E$ é uma seção lisa de E então, para cada $x \in M$, podemos considerar $\mathrm{d}\epsilon(x)$, que é uma aplicação linear de T_xM em $T_{\epsilon(x)}E$; para $v \in T_xM$, temos, portanto, $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v \in T_{\epsilon(x)}E$. No caso em que $E = M \times E_0$ é o fibrado trivial sobre M então ϵ é da forma $\epsilon(x) = \big(x, \tilde{\epsilon}(x)\big)$ e:

$$\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v = \big(v, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}(x) \cdot v\big) \in T_{\epsilon(x)}E = T_xM \oplus E_0.$$

Desse modo, nos fibrados triviais, o objeto a que chamamos derivada direcional de ϵ em x na direção v é a segunda coordenada do vetor $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v$. Se

$\Pi : E \to M$ é um fibrado vetorial então $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v$ é apenas um elemento de $T_{\epsilon(x)}E$ e, assim, não faz sentido falar da "segunda coordenada" de $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v$. Embora $\mathrm{d}\Pi_{\epsilon(x)}\big(\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v\big) = v$ mostre que, no caso de fibrados triviais, o vetor $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v$ contém v como uma de suas componentes, não existe maneira canônica de obtermos a "outra componente" de $\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v$.

Frente as dificuldades acima expostas, definimos o que chamamos de *conexão* em E.

Definição 2.3.1. *Sejam $\mathcal{E}$ e M variedades diferenciáveis e seja $\Pi : \mathcal{E} \to M$ uma submersão lisa. Dado $e \in \mathcal{E}$ então o espaço $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}\Pi(e)\big)$ é chamado* subespaço vertical *de $T_e\mathcal{E}$ no ponto e com respeito a submersão Π; assumindo Π fixada pelo contexto, denotamos o subespaço vertical por $\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$. Um subespaço H de $T_e\mathcal{E}$ é dito* horizontal *em relação a Π se ele é um complemento de $\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$ em $T_e\mathcal{E}$, i.e., se:*

$$T_e\mathcal{E} = H \oplus \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E}).$$

Uma distribuição $\mathcal{H}$ na variedade $\mathcal{E}$ é chamada horizontal *com respeito a Π se $\mathcal{H}_e$ é um subespaço horizontal de $T_e\mathcal{E}$ para toda $e \in \mathcal{E}$. Uma distribuição horizontal em $\mathcal{E}$ será também dita uma* conexão generalizada *em $\mathcal{E}$ (em relação a Π).*

Quando uma distribuição horizontal em $\mathcal{E}$ é fixada pelo contexto, normalmente, a denotaremos por $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$. Escreveremos, então, $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}} : T\mathcal{E} \to \mathrm{Ver}(\mathcal{E})$(resp., $\mathfrak{p}_{\mathrm{hor}} : T\mathcal{E} \to \mathrm{Hor}(\mathcal{E})$) para a função cuja restrição a $T_e\mathcal{E}$ é igual à projeção na segunda coordenada (resp., na primeira coordenada) correspondente a soma direta $T_e\mathcal{E} = \mathrm{Hor}_e(\mathcal{E}) \oplus \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$, para todo $e \in \mathcal{E}$.

Sejam, ainda, $\mathcal{E}$ e M variedades diferenciáveis e $\Pi : \mathcal{E} \to M$ uma submersão. Por *seção local* de Π entendemos uma aplicação $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ definida num aberto U de M tal que $\Pi \circ \epsilon$ seja a inclusão de U em M.

Definição 2.3.2. *Seja $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ uma conexão generalizada em $\mathcal{E}$. Se $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ é uma seção local lisa de Π então, dados $x \in U$, $v \in T_xM$, a* derivada covariante *de ϵ em x na direção v com respeito a conexão generalizada $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ é, aqui, denotada por $\nabla_v\epsilon$ e é definida por:*

$$\nabla_v\epsilon = \mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon(x) \cdot v\big) \in \mathrm{Ver}_{\epsilon(x)}(\mathcal{E}); \tag{2.4}$$

chamamos ∇ de operador derivada covariante *associado a conexão generalizada $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$.*

Dado $x \in U$, se $\nabla_v \epsilon = 0$, para todo $v \in T_xM$ então a seção local ϵ é dita *paralela em x* em relação a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$; se ϵ é paralela em todo $x \in U$ dizemos simplesmente que ϵ é *paralela* com respeito a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$. Observamos que ϵ é paralela em x com respeito a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ se e somente se: $\mathrm{d}\epsilon_x(T_xM) = \mathrm{Hor}_{\epsilon(x)}\mathcal{E}$.

Sejam $\Pi : \mathcal{E} \to M$, $\Pi' : \mathcal{E}' \to M$ submersões lisas; uma função $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ é dita *preservar fibras* se $\Pi' \circ \phi = \Pi$.

Definição 2.3.3. *Sejam* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ *e* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ *conexões generalizadas em* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{E}'$ *respectivamente. Uma função lisa* $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *é dita* preservar conexão *se ela preserva fibras e:*

$$\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) = \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}'), \tag{2.5}$$

para todo $e \in \mathcal{E}$.

Notamos aqui que uma submersão lisa $\Pi : \mathcal{E} \to M$ é dita ter a *propriedade de extensão global* se para toda seção local lisa $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ de Π e todo $x \in U$ existe uma seção global lisa $\bar{\epsilon} : M \to \mathcal{E}$ tal que ϵ e $\bar{\epsilon}$ são iguais em alguma vizinhança de x contida em U. Não é difícil ver que a projeção de um fibrado vetorial possui tal propriedade.

Definição 2.3.4. *Seja* $\Pi : P \to M$ *um fibrado G-principal sobre a variedade diferenciável M. Uma* conexão principal *em P é uma conexão generalizada* $\mathrm{Hor}(P)$ *em P que é G*-invariante*, i.e.:*

$$\mathrm{d}\gamma_g\big(\mathrm{Hor}_p(P)\big) = \mathrm{Hor}_{p\cdot g}(P),$$

para todo $p \in P$ e todo $g \in G$, onde $\gamma_g : P \to P$ denota o difeomorfismo dado pela ação de g em P.

Observa-se que a distribuição vertical $\mathrm{Ver}(P)$ acaba, nesse contexto, sendo também G-invariante. De agora em diante, por *conexão* num fibrado principal entenderemos se tratar de uma conexão principal.

Seja, então, $\mathrm{Hor}(P)$ uma distribuição horizontal em P. A existência de um isomorfismo canônico entre o espaço vertical $\mathrm{Ver}_p(P)$ e a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo estrutural nos permite uma associação canônica entre a distribuição $\mathrm{Hor}(P)$ e uma 1-forma ω em P a valores em $\mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{Ker}(\omega_p) = \mathrm{Hor}_p(P)$, para todo $p \in P$. Definimos, assim, ω por:

$$\omega_p(\zeta) = \begin{cases} \big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1}(\zeta) \in \mathfrak{g}, & \text{se } \zeta \in \mathrm{Ver}_p(P), \\ 0 \in \mathfrak{g}, & \text{se } \zeta \in \mathrm{Hor}_p(P), \end{cases} \tag{2.6}$$

para todo $p \in P$, onde $\big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1} : \mathrm{Ver}_p(P) \to \mathfrak{g}$ é a inversa do isomorfismo linear definido pela diferencial de:

$$\beta_p : G \ni g \longmapsto p \cdot g \in P,$$

a qual observamos ter imagem em $\mathrm{Ver}_p(P)$.

Seja $\mathrm{Hor}(P)$ uma distribuição horizontal em P e seja ω a 1-forma em P a valores em $\mathfrak{g}$ definida por (2.6). Então, observa-se que $\mathrm{Hor}(P)$ é lisa se e somente se ω é lisa.

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação C^∞ de G em V. Uma forma λ a valores em V no espaço total P é dita *ρ-pseudo G-invariante* (ou *pseudo G-invariante com respeito a ρ*) se:

$$\gamma_g^* \lambda = \rho(g)^{-1} \circ \lambda,$$

para todo $g \in G$.

Pode-se provar que ω é pseudo G-invariante com respeito à representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ do grupo de Lie G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Sejam $\mathrm{Hor}(P)$ uma distribuição horizontal em P e ω a 1-forma em P a valores em $\mathfrak{g}$ definida por (2.6). Então $\mathrm{Hor}(P)$ é G-invariante se e somente se ω é Ad-pseudo G-invariante.

Definição 2.3.5. *Seja $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal e, para cada $p \in P$, denote por $\big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1} : \mathrm{Ver}_p(P) \to \mathfrak{g}$ a inversa do isomorfismo linear acima definido. Uma 1-forma ω em P a valores em $\mathfrak{g}$* Ad*-pseudo G-invariante satisfazendo:*

$$\omega_p|_{\mathrm{Ver}_p(P)} = \big(\mathrm{d}\beta_p(1)\big)^{-1} \tag{2.7}$$

para todo $p \in P$ é chamada forma de conexão *em P.*

Se ω é uma 1-forma em P a valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo (2.7) para todo $p \in P$ então a distribuição $\mathrm{Hor}(P)$ definida por:

$$\mathrm{Hor}_p(P) = \mathrm{Ker}(\omega_p), \tag{2.8}$$

para todo $p \in P$ é horizontal.

Observa-se que se $\Pi : P \to M$ é um fibrado principal, então a igualdade (2.8) define uma correspondência biunívoca entre as conexões $\mathrm{Hor}(P)$ em P e as formas de conexão ω em P.

Lema 2.3.6. *Sejam* $\Pi : P \to M$ *um fibrado* G*-principal e* $s : U \to P$ *uma seção local lisa de* P*. Se* $\bar{\omega}$ *é uma* 1*-forma a valores em* $\mathfrak{g}$ *definida em* U *então existe uma única* 1*-forma* ω Ad*-pseudo* G*-invariante a valores em* $\mathfrak{g}$ *definida no fibrado principal* $P|_U$ *satisfazendo a condição* (2.7) *para todo* $p \in P|_U$ *com* $s^*\omega = \bar{\omega}$*. Além disso,* ω *é lisa se e somente se* $\bar{\omega}$ *é* C^∞*.*

Demonstração. Não é difícil ver que este lema vale no caso em que $P = M \times G$ é o fibrado principal trivial e a seção local s igual a $s^1 : M \ni x \mapsto (x, 1) \in P$. De modo a provarmos o caso geral, considere o seguinte diagrama comutativo (lembre-se de (2.2)):

$$\begin{tikzcd} U \times G \arrow[rr, "\beta_s", "\cong"'] & & P|_U \\ & U \arrow[ul, "s^1"] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

A função β_s é um isomorfismo do fibrado principal trivial $U \times G$ em $P|_U$ cujo homomorfismo de grupos de Lie subjacente é a aplicação identidade de G. Dada uma 1-forma ω a valores em $\mathfrak{g}$ definida em $P|_U$, pode-se facilmente provar que ω é Ad-pseudo G-invariante e satisfaz (2.7) para todo $p \in P|_U$ se e somente se $\beta_s^*\omega$ é Ad-pseudo G-invariante e satisfaz (2.7) para todo $p \in U \times G$. Além disso, $s^*\omega = \bar{\omega}$ se e somente se $(s^1)^*(\beta_s^*\omega) = \bar{\omega}$. E, desse modo, segue a tese. $\square$

Se ω é uma forma de conexão em P e $s : U \to P$ é uma seção local lisa então a 1-forma lisa $\bar{\omega} = s^*\omega$ a valores em $\mathfrak{g}$ definida em U é chamada de *representação* de ω com respeito a seção local lisa s. Assim, o Lema 2.3.6 mostra que uma forma de conexão ω em $P|_U$ é univocamente determinada por sua representação $\bar{\omega}$ em relação a uma dada seção local lisa $s : U \to P$.

Nota 2.3.7. *Pode-se provar que existe uma correspondência um a um entre o conjunto das conexões principais em* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ *e o conjunto das conexões generalizadas em* E *cujos operadores de derivada covariante são uma conexão linear. Para mais detalhes ver o Apêndice A.*

2.4 Variedades Afins

Uma *variedade afim* é um par (M, ∇), onde M é uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão em M. Se M' e M são variedades afins, dizemos que uma função lisa $f : M' \to M$ é uma *função afim* se $\overleftarrow{\mathrm{d}f} : TM' \to f^*TM$ preserva conexão. Ao longo deste trabalho, nos será útil os conceitos de *tensor de Christoffel* e *inner-torsion* de uma variedade afim munida de G-estrutura (ver [18]). Para definirmos o tensor de Christoffel precisamos observar que, se E é um fibrado vetorial sobre M com fibra típica E_0 e $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ é um E_0-referencial local de E, podemos definir uma conexão $\mathfrak{d}^s$ em $E|_U$ por:

$$\mathfrak{d}^s_v \epsilon = s(x)\big(\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}_x(v)\big), \tag{2.9}$$

para todos $x \in U$, $v \in T_xM$, $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$, onde $\widetilde{\epsilon} : U \to E_0$ é definido por $\widetilde{\epsilon}(x) = s(x)^{-1}(\epsilon(x))$, para todo $x \in U$.

Definição 2.4.1. *Se ∇ é uma conexão em E então o* tensor de Christoffel *de ∇ com respeito ao referencial local liso s é a função $C^\infty(M)$-bilinear*

$$\Gamma : \mathbf{\Gamma}(TM|_U) \times \mathbf{\Gamma}(E|_U) \to \mathbf{\Gamma}(E|_U)$$

definida por $\Gamma = \nabla - \mathfrak{d}^s$.

Lembramos que a diferença entre duas conexões é, de fato, um tensor. Identificamos o tensor de Christoffel Γ com uma seção lisa do fibrado vetorial $\mathrm{Lin}(TM|_U, E|_U; E|_U)$; ou, mais explicitamente, Γ é a seção local lisa tal que:

$$\nabla_v \epsilon = \mathfrak{d}^s_v \epsilon + \Gamma_x(v, \epsilon(x)), \tag{2.10}$$

para todos $x \in U$, $v \in T_xM$ e todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$. Para $x \in U$, $v \in T_xM$, também definimos $\Gamma_x(v) = \Gamma_x(v, \cdot) \in \mathfrak{gl}(E_x)$, de modo que $\Gamma_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_x)$ é uma função linear.

2.5 Inner torsion

Sejam, agora, E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica E_0 munido de uma conexão ∇, G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(E_0)$ e $P \subset \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ uma G-estrutura em E. Para cada $x \in M$, denotamos por $G_x \subset \mathrm{GL}(E_x)$ o subgrupo de Lie formado por todos os isomorfismos que preservam G-estrutura de E_x, i.e., $g \in G_x$ se e somente se $g \circ p \in P_x$ para todo $p \in P_x$; denotamos por $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{gl}(E_x)$ sua álgebra de Lie.

Para $x \in M$ e $p \in P_x$, podemos definir $\sigma : \mathrm{GL}(E_0) \ni g \mapsto p \cdot g \in \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ e, então,

$$I_p : \mathrm{GL}(E_0) \ni g \mapsto \sigma \circ L_g \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{GL}(E_x).$$

Definimos $\mathrm{Ad}_p : \mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_x)$ como a diferencial do isomorfismo de grupos de Lie I_p, i.e.,

$$\mathrm{Ad}_p = (\mathrm{d}I_p)_e,$$

onde denotamos por e a identidade de $\mathrm{GL}(E_0)$. Assim, observando que $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_x$, fazemos de $\overline{\mathrm{Ad}}_p : \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ a função induzida por Ad_p no quociente.

Lembramos que a conexão linear ∇ é associada a uma única conexão principal $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ no fibrado $\mathrm{GL}(E_0)$-principal $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ (ver Apêndice A); denotemos por ω a forma de conexão desta conexão principal. Sejam $s : U \to P$ uma seção local lisa de P. Para $x \in U$ façamos $p = s(x)$ e $\overline{\omega} = s^*\omega$.

Definição 2.5.1. *Definimos a* inner torsion *da G-estrutura P no ponto x relativa a conexão ∇ como a aplicação $\mathfrak{I}^P_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ dada pela composição ilustrada no seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "\overline{\omega}_x"] \arrow[rrr, bend right, "\mathfrak{I}^P_x"'] & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "quociente"] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ad}}_p"] & \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Nota 2.5.2. *Se, para $p \in P$, denotamos por $\mathcal{L}_p$ a composição de $\overline{\omega}_x$ com a aplicação quociente, segue das propriedades usuais de formas de conexão que, dados $p, q \in P_x$, as aplicações $\mathcal{L}_p$ e $\mathcal{L}_q$ são relacionadas por $\mathcal{L}_q = \overline{\mathrm{Ad}}_g \circ \mathcal{L}_p$, onde $g \in G$ é tal que $p = q \circ g$, e $\overline{\mathrm{Ad}}_g : \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g}$ é obtido a partir de $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{gl}(E_0) \to \mathfrak{gl}(E_0)$ pela passagem ao quociente. Disso segue que $\mathfrak{I}^P_x$ não depende da escolha da seção local s (para mais detalhes ver [18, Seção 5]).*

O Lema seguinte nos dá uma maneira mais simples de calcularmos $\mathfrak{I}^P_x$.

Lema 2.5.3. *Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0, G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(E_0)$ e $P \subset \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ uma G-estrutura em E; assumamos dada uma conexão ∇ em E. Se $s : U \to P$ é um E_0-referencial local C^∞ de E compatível com P então a inner torsion $\mathfrak{I}^P_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ da G-estrutura P no ponto x é dada pela composição do tensor de Christoffel $\Gamma_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_x)$ da conexão ∇ com respeito a s com a função quociente $\mathfrak{gl}(E_x) \to \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$.*

Demonstração. Denotemos por ω a forma de conexão associada a conexão principal $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ e defina $\bar{\omega} = s^*\omega$. Não é complicado ver que $\Gamma_x = \mathrm{Ad}_p \circ \bar{\omega}_x$, onde $p = s(x)$. Assim, o resultado segue da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "\bar{\omega}_x"'] \arrow[dr, "\Gamma_x"'] \arrow[rrr, bend left, "\mathfrak{I}_x^P"] & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "\text{quociente}"'] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_p"] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ad}}_p"'] & \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \\
& \mathfrak{gl}(E_x) \arrow[urr, "\text{quociente}"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

2.6 Homogeneidade infinitesimal, local e global

Sejam (M, ∇) uma variedade afim n-dimensional, G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e $P \subset \mathrm{FR}(TM)$ uma G-estrutura em M. Denotemos por T e R respectivamente a torção e curvatura de ∇.

Denotemos por $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma$ o isomorfismo linear de $\mathfrak{gl}(T_xM)/\mathfrak{g}_x$ em $\mathfrak{gl}(T_yM)/\mathfrak{g}_y$ definido pela passagem ao quociente de $\mathrm{Ad}_\sigma : \mathfrak{gl}(T_xM) \to \mathfrak{gl}(T_yM)$, função a qual definimos como a diferencial do isomorfismo de grupos de Lie $I_\sigma : GL(T_xM) \ni T \mapsto \sigma \circ T \circ \sigma^{-1} \in GL(T_yM)$ calculada na identidade ($\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma$ está bem definida, uma vez que Ad_σ leva $\mathfrak{g}_x$ em $\mathfrak{g}_y$).

Definição 2.6.1. *Dizemos que a tripla* (M, ∇, P) *é uma* variedade afim com G-estrutura infinitesimalmente homogênea *se para todos* $x, y \in M$, *toda função que preserva* G*-estrutura* $\sigma : T_xM \to T_yM$ *relaciona* T_x *com* T_y, R_x *com* R_y *e* $\mathfrak{I}_x^P$ *com* $\mathfrak{I}_y^P$, *i.e.,* $\mathrm{T}_y(\sigma\cdot, \sigma\cdot) = \sigma \circ \mathrm{T}_x$, $R_y(\sigma\cdot, \sigma\cdot) = \sigma \circ R(\cdot, \cdot) \circ \sigma^{-1}$ *e* $\mathfrak{I}_y^P \circ \sigma = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^P$.

É fácil ver que a condição de homogeneidade infinitesimal significa curvatura, torção e inner torsion constantes com respeito a referenciais que pertencem a considerada G-estrutura, i.e., o seguinte lema é válido:

Lema 2.6.2. *Seja* (M, ∇, P) *uma variedade afim* n*-dimensional com* G*-estrutura, onde* G *é um subgrupo de Lie de* $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. *Então* (M, ∇, P) *é infinitesimalmente homogênea se e somente se existem funções multilineares* $R_0 \in \mathrm{Lin}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $T_0 \in \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e uma função linear* $\mathfrak{I}_0 : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{g}$ *tais que:*

$$\begin{gathered} p^*R_x = R_0, \quad p^*T_x = T_0, \\ \overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_x^P \circ p, \end{gathered} \tag{2.12}$$

para todos $x \in M$ *e* $p \in P_x$.

Demonstração. Assumamos a existência de R_0, T_0, $\mathfrak{I}_0$ tais que (2.12) vale para todo $x \in M$ e todo $p \in P_x$. Sejam $x, y \in M$ e $\sigma : T_xM \to T_yM$ uma função que preserva G-estrutura fixada. Escolha $p \in P_x$ e defina $q = \sigma \circ p$, de modo que $q \in P_y$. Então:

$$p^* R_x = R_0 = q^* R_y = p^* \sigma^* R_x,$$

e, assim, $R_x = \sigma^* R_y$, i.e., R_x é σ-relacionado com R_y. Similarmente, T_x é σ-relacionado com T_y. Além do mais, $\overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}^P_x \circ p$, $\overline{\mathrm{Ad}}_q \circ \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}^P_y \circ q$ e, portanto:

$$\mathfrak{I}^P_y \circ \sigma \circ p = \mathfrak{I}^P_y \circ q = \overline{\mathrm{Ad}}_q \circ \mathfrak{I}_0 = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}_0 = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^P_x \circ p,$$

provando $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^P_x = \mathfrak{I}^P_y \circ \sigma$. Reciprocamente, se (M, ∇, P) é infinitesimalmente homogênea, escolha um $x \in M$ qualquer e um $p \in P_x$ e defina:

$$R_0 = p^* R_x, \quad T_0 = p^* T_x, \quad \mathfrak{I}_0 = (\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}^P_x \circ p.$$

Dados quaisquer $y \in M$, $q \in P_y$ então $\sigma = q \circ p^{-1} : T_xM \to T_yM$ é uma função que preserva G-estrutura e, portanto, $\sigma^* R_y = R_x$, $\sigma^* T_y = T_x$ e $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^P_x = \mathfrak{I}^P_y \circ \sigma$. Então:

$$q^* R_y = p^* \sigma^* R_y = p^* R_x = R_0, \quad q^* T_y = p^* \sigma^* T_y = p^* T_x = T_0;$$

além do mais:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_q \circ \mathfrak{I}_0 = \overline{\mathrm{Ad}}_q \circ (\overline{\mathrm{Ad}}_p)^{-1} \circ \mathfrak{I}^P_x \circ p = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^P_x \circ p = \mathfrak{I}^P_y \circ \sigma \circ p = \mathfrak{I}^P_y \circ q.$$

O que conclui a demonstração. $\square$

Ao longo do trabalho nos referiremos coletivamente aos tensores T_0, R_0 e $\mathfrak{I}_0$ como *tensores característicos* da variedade afim infinitesimalmente homogênea com G-estrutura (M, ∇, P).

Nota 2.6.3. *Obviamente, os tensores característicos T_0, R_0 e $\mathfrak{I}_0$ são invariantes pela ação de G. Isso implica no fato de que podemos induzir "versões" dos tensores T_0, R_0, $\mathfrak{I}_0$ em qualquer espaço vetorial munido de G-estrutura. Melhor dizendo, seja Z um espaço vetorial real n-dimensional com uma G-estrutura P_Z, i.e, uma órbita da ação à direita de G sobre* $\mathrm{FR}(Z)$. *Denote por $G_Z \subset \mathrm{GL}(Z)$ o grupo de Lie formado por todos os automorfismos de Z que preservam G-estrutura e por $\mathfrak{g}_Z \subset \mathfrak{gl}(Z)$ sua álgebra de Lie. Dado um $p \in P_Z$ qualquer, existe uma única tripla de tensores $T_Z : Z \times Z \to Z$, $R_Z : Z \times Z \to \mathfrak{gl}(Z)$, $\mathfrak{I}_Z : Z \to \mathfrak{gl}(Z)/\mathfrak{g}_Z$ que são relacionados com T_0, R_0, $\mathfrak{I}_0$ por p. A G-invariância de T_0, R_0, $\mathfrak{I}_0$ implica que T_Z, R_Z, $\mathfrak{I}_Z$ não dependem da escolha de $p \in P_Z$.*

Dizemos que a tripla (M, ∇, P) é *localmente homogênea* se para todos $x, y \in M$ e toda função que preserva G-estrutura $\sigma : T_xM \to T_yM$ existem uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x, uma vizinhança aberta $V \subset M$ de y e um difeomorfismo C^∞ afim que preserva G-estrutura $f : U \to V$ tal que $f(x) = y$ e $\mathrm{d}f_x = \sigma$. Se para todos $x, y \in M$ e toda função que preserva G-estrutura $\sigma : T_xM \to T_yM$ existe um difeomorfismo C^∞ afim que preserva G-estrutura $f : M \to M$ tal que $f(x) = y$ e $\mathrm{d}f_x = \sigma$ dizemos que a tripla (M, ∇, P) é *(globalmente) homogênea.*

Obviamente, toda variedade afim (localmente) homogênea com G-estrutura é também infinitesimalmente homogênea. Além disso, a seguinte proposição nos mostra que a recíproca também vale:

Proposição 2.6.4. *Seja (M, ∇, P) uma variedade afim infinitesimalmente homogênea com G-estrutura. Então (M, ∇, P) é localmente homogênea. Se, além disso tivermos que (M, ∇) é geodesicamente completa e que M é (conexa e) simplesmente-conexa então (M, ∇, P) é (globalmente) homogênea.*

Demonstração. Ver [18, Proposição 6.4]. □

2.7 Imersões Afins e Congruência

Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional, $\overline{M}$ uma variedade diferenciável $\bar{n}$-dimensional ($\bar{n} = n + k$) e E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^k$. Definamos $\widehat{E} = TM \oplus E$, de modo que $\widehat{E}$ seja um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^{\bar{n}}$. Sejam $\widehat{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$ conexões em $\widehat{E}$ e em $T\overline{M}$ respectivamente. Por *imersão afim* de $(M, E, \widehat{\nabla})$ na variedade afim $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ entendemos um par (f, L), onde $f : M \to \overline{M}$ é uma função C^∞ e $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais que preserva conexão com:

$$L_x|_{T_xM} = \mathrm{d}f_x, \tag{2.13}$$

para todo $x \in M$, onde munimos $f^*T\overline{M}$ da conexão $f^*\overline{\nabla}$. Por uma *imersão afim local* de $(M, E, \widehat{\nabla})$ em $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ entendemos uma imersão afim (f, L) de $(U, E|_U, \widehat{\nabla})$ em $(\overline{M}, \overline{\nabla})$, onde U é um subconjunto aberto de M; chamamos U de *domínio* da imersão afim local (f, L).

Fixemos G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$, $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$ e $\overline{P}$ uma G-estrutura em $\overline{M}$. Uma imersão afim (local) (f, L) de $(M, E, \widehat{\nabla})$ em $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ é dita *preservar G-estrutura* se o isomorfismos de fibrados vetoriais $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ preservar G-estrutura, i.e., se $L_x \circ p \in \overline{P}_{f(x)}$, para todo $x \in M$ e todo $p \in \widehat{P}_x$.

Para imersões afins que preservam G-estrutura existe uma maneira natural de definir congruência. Sejam (f^1, L^1) uma imersão afim que preserva G-estrutura de $(M, E, \widehat{\nabla}^1)$ na variedade afim $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ e (f^2, L^2) uma imersão afim que preserva G-estrutura de $(M, E, \widehat{\nabla}^2)$ na mesma variedade. Dizemos, então, que $(\widehat{\nabla}^1, f^1, L^1)$ é *G-congruente* a $(\widehat{\nabla}^2, f^2, L^2)$ se existe um difeomorfismo afim que preserva G-estrutura $\sigma : \overline{M} \to \overline{M}$ tal que:

$$f^2 = \sigma \circ f^1 \quad \text{e} \quad L^2 = \pm \mathrm{d}\sigma \circ L^1.$$

2.8 Teorema Fundamental das Imersões Afins

Nesta seção apresentamos um teorema, a que chamaremos de *Teorema Fundamental das Imersões Afins*, de autoria de P. Piccione e D. V. Tausk. Esse resultado foi por eles apresentado no artigo [18] (Teorema 7.4). Enunciaremos aqui, também uma versão deste teorema ligeiramente modificada para melhor atender aos propósitos desta tese.

Considere no que se segue fixados os seguintes objetos: duas variedades afins (M^n, ∇) e $(\overline{M}^{n+k}, \overline{\nabla})$, um fibrado vetorial E^0 sobre M, uma conexão ∇^0 em E^0, e seções lisas α^0, A^0 de $TM^* \otimes TM^* \otimes E^0$ e $TM^* \otimes (E^0)^* \otimes TM$ respectivamente. Denotamos por T e R respectivamente os tensores de torção e curvatura de ∇, por $\overline{T}$ e $\overline{R}$ os tensores de torção e curvatura de $\overline{\nabla}$, e por R^0 o tensor de curvatura de E^0.

Entendemos como *solução do problema de imersão afim para ∇^0, α^0 e A^0 dados* um par (f, S) formado por uma imersão afim $f : M \to \overline{M}$ e por um isomorfismo de fibrado vetorial que preserva conexão $S : (E^0, \nabla^0) \to (E, \nabla^\perp)$ tal que $S(\alpha^0(\cdot, \cdot)) = \alpha$ e $A(\cdot, S\cdot) = A^0$, onde E é o fibrado normal para f, e $\nabla^\perp$, α e A são invariantes da imersão afim, i.e., a conexão normal da imersão f em E, segunda forma fundamental da imersão f e forma de Weingarten da imersão f relativa a E. De modo mais geral, se $f : U \to \overline{M}$ é uma imersão afim definida num aberto U de M, e $S : E^0|_U \to E|_U$ é um isomorfismo de fibrado vetorial que preserva conexão tal que $S(\alpha^0(\cdot, \cdot)) = \alpha$ e $A(\cdot, S\cdot) = A^0$, então o par (f, S) é chamado de *solução local do problema de imersão afim, dados ∇^0, α^0, A^0, com domínio U* .

Consideremos o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E^0$ munido da conexão $\widehat{\nabla}$ cujas componentes são ∇, ∇^0, α^0 e A^0. Denotemos por $\pi^{TM} : \widehat{E} \to TM$ e $\pi^{E^0} : \widehat{E} \to E^0$ as projeções associadas a esse fibrado.

Se (f, S) é uma solução do problema de imersão afim, dados ∇^0, α^0, A^0, definimos um isomorfismo de fibrado vetorial $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ fazendo:

$$L|_{TM} = \mathrm{d}f : TM \to f^*T\overline{M}, \quad L|_{E^0} = S : E^0 \to f^*T\overline{M}. \tag{2.14}$$

Assim, temos que o isomorfismo de fibrados L preserva conexão. Reciprocamente, dados, uma função lisa $f : M \to \overline{M}$ e um isomorfismo de fibrado que preserva conexão $L : \widehat{E} \to f^*\overline{M}$ tal que $L|_{TM} = \mathrm{d}f$ então, definindo $S = L|_{E^0}$, obtemos uma solução (f, S) do problema de imersão afim, dados ∇^0, α^0, A^0.

Sejam G um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n + k)$, $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$ e $\overline{P}$ uma G-estrutura em $\overline{M}$. Uma solução (f, S) (possivelmente local) do problema de imersão afim, dados ∇^0, α^0, A^0, é dita *preservar G-estrutura* se o isomorfismo de fibrados vetoriais $L : \widehat{E} \to f^*T\overline{M}$ definido em (2.14) preserva G-estrutura, i.e., se $L_x \circ p \in \overline{P}_{f(x)}$, para todo $x \in M$ e todo $p \in \widehat{P}_x$.

Lembre-se que, como explicado na Nota 2.6.3, se $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ é uma variedade infinitesimalmente homogênea então todo espaço vetorial real $(n + k)$-dimensional Z munido de uma G-estrutura herda "versões" $\overline{T}_Z : Z \times Z \to Z$, $\overline{R}_Z : Z \times Z \to \mathfrak{gl}(Z)$ e $\overline{\mathfrak{I}}_Z : Z \to \mathfrak{gl}(Z)/\mathfrak{g}_Z$ dos tensores característicos $\overline{T}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\overline{R}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$ e $\overline{\mathfrak{I}}_0 : \mathbb{R}^{\bar{n}} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{\bar{n}})/\mathfrak{g}$ de $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$.

Sejam E um fibrado vetorial sobre uma variedade afim (M, ∇) e ∇^E uma conexão em E. No que se segue, denotaremos por $\nabla^{\otimes}$ a conexão induzida por ∇ e ∇^E em $TM^* \otimes TM^* \otimes E^0$, i.e., a conexão tal que, para um seção S de $TM^* \otimes TM^* \otimes E^0$ e vetores $v, w, u \in T_xM$, vale:

$$(\nabla^{\otimes} S)_x(v, w, u) = \nabla^E_v(S(W, U)) - S(\nabla_v W, u) - S(w, \nabla_v U),$$

onde W e U são extensões locais de w e u, respectivamente. Também por $\nabla^{\otimes}$ denotaremos a conexão induzida por ∇ e ∇^E em $TM^* \otimes (E^0)^* \otimes TM$, ou seja, aquela tal que, para um seção K de $TM^* \otimes (E^0)^* \otimes TM$ e vetores $v, w \in T_xM$, $e \in E_x$, vale:

$$(\nabla^{\otimes} K)_x(v, w, e) = \nabla_v(K(W, E)) - K(\nabla_v W, e) - K(w, \nabla^E_v E)$$

onde W e E são extensões locais de w e e, respectivamente.

Isso posto, enunciamos o Teorema 7.4 de [18] de autoria de P. Piccione e D. V. Tausk.

Teorema 2.8.1. *Assuma que* $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ *é infinitesimalmente homogênea com tensores característicos* $\overline{T}_0$*,* $\overline{R}_0$ *e* $\overline{\mathfrak{I}}_0$*, e que as igualdades seguintes são satisfeitas para todos* $x \in M$*,* $v, w, z \in T_xM$ *e todo* $e \in E^0_x$*:*

$$\pi^{TM}(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)u) = R_x(v,w)u + A^0_x(v, \alpha^0_x(w,u)) - A^0_x(w, \alpha^0_x(v,u)); \quad (2.15)$$

$$\pi^{E^0}(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)e) = R^0_x(v,w) + \alpha^0_x(v, A^0_x(w,e)) - \alpha^0_x(w, A^0_x(v,e)); \quad (2.16)$$

$$\pi^{E^0}(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)u) = (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u) - (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u) + \alpha^0_x(T_x(v,w),u); \quad (2.17)$$

$$\pi^{TM}(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(v,w)e) = (\nabla^{\otimes}A^0)_x(v,w,e) - (\nabla^{\otimes}A^0)_x(w,v,e) + A^0_x(T_x(v,w),e); \quad (2.18)$$

$$\pi^{TM}(\overline{T}_{\widehat{E}_x}(v,w)) = T_x(v,w); \quad (2.19)$$

$$\pi^{E^0}(\overline{T}_{\widehat{E}_x}(v,w)) = \alpha^0_x(v,w) - \alpha^0_x(w,v); \quad (2.20)$$

$$\overline{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x}(v) = \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x(v). \quad (2.21)$$

Então, para todo $x_0 \in M$*, todo* $y_0 \in \overline{M}$ *e toda aplicação linear que preserva G-estrutura* $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$ *existe uma solução local* (f, S) *que preserva G-estrutura para o problema de imersão afim, dados* ∇^0*,* α^0 *e* A^0*, cujo domínio é uma vizinhança aberta* U *de* x_0 *em* M*, com* $f(x_0) = y_0$ *e* $\sigma_0 = L_{x_0}$*, onde* L *é como descrito em* (2.14)*. Além disso, se* M *é (conexa e) simplesmente-conexa e* $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ *é geodesicamente completa então existe uma única solução global* (f, S) *para o problema de imersão afim, dados* ∇^0*,* α^0 *e* A^0*, tal que* $f(x_0) = y_0$ *e* $\sigma_0 = L_{x_0}$*.*

Nota 2.8.2. *Dizemos que* $(M, \nabla^0, \alpha^0, A^0, \widehat{P})$ *satisfaz as* equações de compatibilidade *para o problema de imersão afim em* $(\overline{M}^{\bar{n}}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ *se as hipóteses* (2.15) – (2.21) *do teorema acima são satisfeitas.*

Apresentamos a seguir, a versão do teorema acima apresentado adaptada ao caso de imersões isométricas.

Definição 2.8.3. *Suponha dados:*

- *uma variedade semi-riemanniana $\overline{n}$-dimensional $(\overline{M}, \bar{g})$, com métrica semi-riemanniana $\bar{g}$ de índice $\bar{r}$;*
- *uma variedade semi-riemanniana n-dimensional (M, g), com métrica semi-riemanniana g de índice r;*
- *um fibrado vetorial E sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^k$ munido de uma estrutura semi-riemanniana g^E de índice s, onde $\overline{n} = n+k$ e $\overline{r} = r+s$;*
- *uma conexão ∇^E em E compatível com g^E;*
- *uma seção lisa α^0 de $\mathrm{Lin}_2^s(TM, E)$.*

Por solução do problema de imersão isométrica (semi-riemanniano) dados ∇^E, α^0, g^E *entendemos um par (f, S), onde $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão isométrica e $S : (E, \nabla^E, g^E) \to (f^\perp, \nabla^\perp, g^\perp)$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais que preserva conexão e tal que $S(\alpha^0(\cdot,\cdot)) = \alpha$, onde $f^\perp$ denota o complemento ortogonal de $\mathrm{d}f(TM)$ em $f^*T\overline{M}$ em relação a $\bar{g}$ e $g^\perp$ denota a restrição de $\bar{g}$ a $f^\perp$. Como no caso afim, define-se o conceito de* solução local *para o problema de imersão isométrica substituindo-se M por um aberto U de M.*

Observamos que se (f, S) é uma solução (local) do problema de imersão isométrica, (M, g) e $(\overline{M}, \bar{g})$ são munidos das suas respectivas conexões de Levi-Civita ∇, $\overline{\nabla}$ e se uma seção lisa A^0 de $TM^* \otimes (E)^* \otimes TM$ é definida pela igualdade:

$$g_x^E(\alpha_x^0(v, w)e) = -g_x(A_x^0(e) \cdot v, w), \quad x \in M; v, w \in T_xM; e \in E_x \tag{2.22}$$

então (f, S) é também uma solução (local) do problema de imersão afim, dados ∇^E, α^0 e A^0.

Consideremos agora o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ munido da estrutura semi-riemanniana $\widehat{g}$ cuja restrição a TM e a E são respectivamente g e g^E e tal que TM e E sejam ortogonais. Sejam G um subgrupo de Lie de $\mathrm{O}_{\overline{r}}(\overline{n})$, $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$ e $\overline{P}$ uma G-estrutura em $\overline{M}$ tal que $\widehat{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E})$ e $\overline{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\overline{M})$.

Observe que, obviamente, se (f, S) é uma solução que preserva G-estrutura para o problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados ∇^E, α^0, g^E, então o par (f, L), onde L é definida como em (2.14), é uma imersão afim que preserva G-estrutura de $(M, E, \widehat{\nabla})$ em $(\overline{M}, \overline{\nabla})$.

Teorema 2.8.4. *Suponha dados elementos como na Definição 2.8.3; denote por ∇ a conexão de Levi-Civita de (M, g) e por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $(\overline{M}, \overline{g})$. Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ munido da estrutura semi-riemanniana $\widehat{g}$. Seja $\widehat{\nabla}$ uma conexão em $\widehat{E}$ compatível com $\widehat{g}$ cujas componentes são ∇, ∇^E e α^0. Sejam G um subgrupo de Lie de $\mathrm{O}_{\overline{r}}(\overline{n})$, $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$ e $\overline{P}$ uma G-estrutura em $\overline{M}$ tal que $\widehat{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E})$ e $\overline{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\overline{M})$. Assuma que $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ seja infinitesimalmente homogênea e que para todos $x \in M$, $y \in \overline{M}$ e toda função que preserva G-estrutura $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) *σ relaciona a inner torsion de $\widehat{P}$ com a inner torsion de $\overline{P}$, i.e.:*

$$\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ \sigma;$$

(b) *vale a equação de Gauss:*

$$\overline{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(w)\big)\sigma(u), \sigma(z)\big] = g_x\big(R_x(v, w)u, z\big) \\ - g_x^E\big(\alpha_x^0(w, u), \alpha_x^0(v, z)\big) + g_x^E\big(\alpha_x^0(v, u), \alpha_x^0(w, z)\big),$$

para todos $u, v, w, z \in T_xM$;

(c) *vale a equação de Codazzi:*

$$\overline{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(w)\big)\sigma(u), \sigma(e)\big] = g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v, w, u), e\big) \\ - g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w, v, u), e\big),$$

para todos $u, v, w \in T_xM$ e todo $e \in E_x$, onde $\nabla^{\otimes}$ denota a conexão induzida por ∇ e ∇^E em $\mathrm{Lin}_2(TM, E)$;

(d) *vale a equação de Ricci:*

$$\overline{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(w)\big)\sigma(e), \sigma(e')\big] = g_x^E\big(R_x^E(v, w)e, e'\big) \\ + g_x\big(\alpha_x^0(v)^* \cdot e, \alpha_x^0(w)^* \cdot e'\big) - g_x\big(\alpha_x^0(w)^* \cdot e, \alpha_x^0(v)^* \cdot e'\big),$$

para todos $v, w \in T_xM$ e todos $e, e' \in E_x$, onde R^E denota o tensor de curvatura de ∇^E e, para $v \in T_xM$, $\big(\alpha_x^0(v)^*\big)$ é tal que

$$g_x\big(\alpha_x^0(v)^* \cdot e, w\big) = g_x^E\big(\alpha_x^0(v, w), e\big),$$

para todos $w \in T_xM$ e $e \in E_x$.

Então, para todo $x_0 \in M$, todo $y_0 \in \overline{M}$ e para toda função que preserva G-estrutura $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$, existe uma solução local que preserva G-estrutura (f, S) do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados ∇^E, α^0, g^E, cujo domínio é uma vizinhança aberta U de x_0, tal que $f(x_0) = y_0$ e

$$\sigma_0 = \mathrm{d}f_{x_0} \oplus S_{x_0} : \widehat{E}_{x_0} = T_{x_0}M \oplus E_{x_0} \longrightarrow \mathrm{d}f_{x_0}(T_{x_0}M) \oplus f_{x_0}^{\perp} = T_{y_0}\overline{M}. \quad (2.23)$$

Se M, além disso, for conexa e simplesmente-conexa e se $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ for geodesicamente completa então existe uma única solução global que preserva G-estrutura (f, S) do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados ∇^E, α^0, g^E, satisfazendo as condições iniciais acima.

Demonstração. De modo a provar este teorema observamos que nossas conexões são todas compatíveis com as métricas respectivas. Deste modo, os tensores de torção são todos nulos ($\overline{T}_{\widehat{E}_x} = 0$ e $T_x = 0$, para todo $x \in M$). Observe que temos assumido α_0 simétrico e tal que $\alpha^0 = g(A^0\cdot, \cdot)$. É fácil ver que as equações (2.19) e (2.20) são automaticamente satisfeitas e que as equações (2.17) e (2.18) são equivalentes. Observamos também que (a) e a equação (2.21) são equivalentes; de fato, $\mathfrak{I}^0 : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{g}$ é definido para $p \in \overline{P}_y$ pelas seguinte equação:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}^0 = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ p.$$

Por outro lado, $\overline{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x} : \widehat{E}_x \to \mathfrak{gl}(\widehat{E}_x)/\mathfrak{g}_x$ é definida para $\widehat{p} \in \widehat{P}_x$ por:

$$\overline{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x} \circ \widehat{p} = \overline{\mathrm{Ad}}_{\widehat{p}} \circ \mathfrak{I}^0.$$

Assim (2.21) implica em:

$$\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} \circ \widehat{p} = \overline{\mathfrak{I}}_{\widehat{E}_x} \circ \widehat{p} = \overline{\mathrm{Ad}}_{\widehat{p}} \circ \mathfrak{I}^0.$$

Para todos $p \in \overline{P}_y$ e $\widehat{p} \in \widehat{P}_x$ vemos que existe uma $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, que preserva G-estrutura, tal que $\sigma \circ \widehat{p} = p$. Temos, então, que:

$$\mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} \circ \sigma^{-1} \circ p = \overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma^{-1} \circ p} \circ \mathfrak{I}^0 = \overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma^{-1}} \circ \overline{\mathrm{Ad}}_p \circ \mathfrak{I}^0 = \overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma^{-1}} \circ \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ p$$

o que facilmente implica (a). Cálculos semelhantes aos já feitos para a inner torsion mostram que, para $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, uma função que preserva G-estrutura, temos:

$$\overline{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(\cdot), \sigma(\cdot)\big)\sigma(\cdot), \sigma(\cdot)\big] = \widehat{g}(\overline{R}_{\widehat{E}_x}(\cdot, \cdot)\cdot, \cdot).$$

Então, vemos facilmente que a equação (2.15) implica (b), (2.17) implica (c) e (2.16) implica (d). Desse modo, vemos que o Teorema 2.8.4 resulta de mera aplicação do Teorema 2.8.1. □

Nota 2.8.5. *Dizemos que* $(M, g, \alpha^0, \widehat{P})$ *satisfaz as* equações de compatibilidade *para o problema de imersão isométrica em* $(\overline{M}^{\bar{n}}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ *se as hipóteses (a) – (d) do Teorema 2.8.4 são satisfeitas.*

A seguinte proposição, de [18], nos dá informações acerca da unicidade de soluções do problema de imersão isométrica semi-riemanniano.

Proposição 2.8.6. *Assuma que* M *é conexo. Se* (f^1, S^1) *e* (f^2, S^2) *são ambas soluções que preservam* G*-estrutura do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados* ∇^E*,* α^0*,* g^E *e e existe* $x_0 \in M$ *tal que:*

$$f^1(x_0) = f^2(x_0), \quad \mathrm{d}f^1(x_0) = \mathrm{d}f^2(x_0), \quad S^1_{x_0} = S^2_{x_0},$$

então $(f^1, S^1) = (f^2, S^2)$.

Demonstração. Ver [18, Proposição 7.1]. □

Concluímos a seção com um lema sobre congruência que será por nós utilizado, mais a frente, no capítulo referente ao grupo Heisenberg-Lorentz.

Suponha dados elementos como na Definição 2.8.3. Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ munido da estrutura semi-riemanniana $\widehat{g}$. Sejam G um subgrupo de $\mathrm{O}_{\bar{r}}(\overline{n})$, $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$ e $\overline{P}$ uma G-estrutura em $\overline{M}$ tal que $\widehat{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E})$ e $\overline{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\overline{M})$.

Chamaremos, no que se segue, uma solução que preserva G-estrutura (f, S) do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados ∇^E, α^0, g^E, simplesmente, de uma *imersão isométrica que preserva* G*-estrutura* (f, S) *dados* ∇^E*,* α^0*,* g^E*.*

Uma imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^1, S^1) dados ∇^E_1, α^1, g^E será dita G*-congruente* a imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^2, S^2) dados ∇^E_2, α^2, g^E, se existir uma isometria que preserva G-estrutura $\sigma : \overline{M} \to \overline{M}$, tal que:

$$f^2 = \sigma \circ f^1 \quad \text{e} \quad S^2 = \pm \mathrm{d}\sigma \circ S^1.$$

Então, para tais imersões, teremos o seguinte lema:

Lema 2.8.7. *Assuma que M seja conexa e $\overline{M}$ globalmente homogênea. Se (f^1, S^1) e (f^2, S^2) são ambas imersões isométricas que preservam G-estrutura dados ∇^E, α^0, g^E, então (f^1, S^1) e (f^2, S^2) são G-congruentes.*

Demonstração. Dado $x_0 \in M$, considere $y_1 = f^1(x_0)$ e $y_2 = f^2(x_0)$. A função linear $\sigma_0 : T_{y_1}\overline{M} \to T_{y_2}\overline{M}$, dada por $\sigma_0 = L^2_{x_0} \circ (L^1_{x_0})^{-1}$, é um isomorfismo que preserva G-estrutura. Uma vez que $\overline{M}$ é globalmente homogênea, existe uma isometria que preserva G-estrutura $\sigma : \overline{M} \to \overline{M}$ tal que $\sigma(y_1) = y_2$ e $\mathrm{d}\sigma_{y_1} = \sigma_0$. Considere o par $(\tilde{f}, \widetilde{S})$, onde

$$\tilde{f} = \sigma \circ f^1 \quad \text{e} \quad \widetilde{S} = \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}} \circ S^1.$$

Provaremos que $(\tilde{f}, \widetilde{S})$ é uma imersão isométrica que preserva G-estrutura dados ∇^E, α^0, g^E. Claramente, a segunda forma fundamental $\alpha^{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ é dada por $\alpha^{\tilde{f}} = \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}} \circ \alpha^{f^1}$, onde α^{f^1} é a segunda forma fundamental de f^1. Devido ao fato de $\sigma : \overline{M} \to \overline{M}$ ser uma isometria, temos que $\widetilde{S} : E \to TM^\perp_{\sigma\circ f^1}$ é uma isometria de fibrados vetoriais. Como S^1 preserva conexão e segunda forma fundamental, temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}\big(\alpha(X,Y)\big) &= \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}}\big(\alpha(X,Y)\big) = \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}}\big(\alpha^{f^1}(X,Y)\big) \\ &= \alpha^{\tilde{f}}(X,Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{S}\big(\nabla^E_X \epsilon\big) &= \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}}\big(S^1\big(\nabla^E_X\epsilon\big)\big) = \mathrm{d}\sigma|_{TM^\perp_{f^1}}\big(\nabla^\perp_{f^1 X} S^1(\epsilon)\big) \\ &= \nabla^\perp_{\sigma\circ f^1 X}\widetilde{S}(\epsilon), \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ e todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$, onde $\nabla^\perp_{\sigma\circ f^1}$ denota a conexão normal em $TM^\perp_{\sigma\circ f^1}$. Finalmente, a função $\widetilde{L} : \widehat{E} \to T\overline{M}$, dada por $\widetilde{L} = \mathrm{d}\tilde{f} \oplus \widetilde{S}$, é um isomorfismo que preserva G-estrutura, pois pode ser escrita como composição de isomorfismos que preservam G-estrutura. Desta maneira, (f^2, S^2) e $(\tilde{f}, \widetilde{S})$ são ambas imersões isométricas que preservam G-estrutura dados ∇^E, α^0, g^E. Por construção, facilmente observamos que:

$$f^2(x_0) = \tilde{f}(x_0), \quad \mathrm{d}f^2_{x_0} = \mathrm{d}\tilde{f}_{x_0} \quad \text{e} \quad S^2_{x_0} = \widetilde{S}_{x_0}.$$

Então, pela Proposição 2.8.6, concluímos que $f^2 = \tilde{f}$ e $S^2 = \widetilde{S}$, i.e., $f^2 = \sigma \circ f^1$ e $S^2 = \mathrm{d}\sigma \circ S^1$, como desejado. $\square$

Capítulo 3

Imersões Isométricas Clássicas

O intuito deste capítulo é reobter, a partir do Teorema 2.8.4, os teoremas clássicos de imersão isométrica, i.e, o teorema de imersão isométrica em formas espaciais semi-riemannianas (uma extensão do Teorema 1.4.1 ao caso semi-riemanniano), o conhecido resultado de imersão isométrica em formas espaciais complexas, e os teoremas de imersão apresentados em [5] e [6], que tratam de imersões isométricas nas estruturas geométricas riemannianas tridimensionais com grupo de isometria de quatro dimensões ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$ e Nil^3).

Para isso, definimos, em cada caso, uma tripla (M, ∇, P) formada pela variedade, conexão e G-estrutura em questão. A seguir, calculando a inner torsion à tripla correspondente, provamos a homogeneidade do ambiente de imersão, e desse modo, usando para isso o Teorema 2.8.4, enunciamos e demonstramos os já mencionados teoremas de imersão isométrica.

3.1 Imersões em Formas Espaciais

O estudo de formas espaciais semi-riemannianas, no formalismo proposto pelo Teorema 2.8.4, resume-se na análise do fibrado de referenciais ortonormais de um dado fibrado vetorial. Sejam, assim, $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0 munido de uma estrutura semi-riemanniana g de índice r e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0}$ um produto interno indefinido de índice r em E_0, e defina $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E)$, uma G-estrutura em E com $G = \mathrm{O}(E_0)$.

Se ∇ é uma conexão em E, calculemos a inner torsion de P com respeito a ∇.

3.1.1 Inner Torsion

Seja x um ponto de M fixado. A inner torsion $\mathfrak{I}_x^P$ é uma função linear de T_xM no espaço quociente $\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$. Não é difícil ver que G_x é o grupo das isometrias lineares de E_x (em relação a g_x) e que $\mathfrak{g}_x$ é a álgebra de Lie dos endomorfismos lineares de E_x anti-simétricas (com respeito a métrica g_x). Identificamos $\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ com o espaço $\mathrm{sym}(E_x)$ de todos os endomorfismos de E_x que são simétricos (na métrica g_x) via:

$$\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \ni T + \mathfrak{g}_x \longmapsto \tfrac{1}{2}(T + T^*) \in \mathrm{sym}(E_x), \tag{3.1}$$

onde $T^* : E_x \to E_x$ denota, aqui, a *transposta* de T com relação a g_x, i.e., o único endomorfismo linear de E_x tal que:

$$g_x\big(T(e), e'\big) = g_x\big(e, T^*(e')\big),$$

para todos $e, e' \in E_x$. Deste modo, a inner torsion $\mathfrak{I}_x^P$ se identifica com uma função linear de T_xM em $\mathrm{sym}(E_x)$. Sejam $s : U \to P$ uma seção local lisa com $x \in U$ e e, e' pontos fixados de E_x; considere as seções locais $\epsilon, \epsilon' : U \to E$ definidas por:

$$\begin{aligned} \epsilon(y) &= \big(s(y) \circ s(x)^{-1}\big) \cdot e, \\ \epsilon'(y) &= \big(s(y) \circ s(x)^{-1}\big) \cdot e', \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo $y \in U$. Uma vez que as representações de ϵ e ϵ' com respeito a s são constantes, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_v \epsilon &= \mathfrak{d}_v^s \epsilon + \Gamma_x(v) \cdot \epsilon(x) = \Gamma_x(v) \cdot \epsilon(x), \\ \nabla_v \epsilon' &= \mathfrak{d}_v^s \epsilon' + \Gamma_x(v) \cdot \epsilon'(x) = \Gamma_x(v) \cdot \epsilon'(x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $v \in T_xM$ (lembrar equação (2.10)). Como s é uma seção local de $\mathrm{FR}_{E_0}^{o}(E)$, segue que:

$$g_y\big(\epsilon(y), \epsilon'(y)\big) = \langle s(x)^{-1} \cdot e, s(x)^{-1} \cdot e' \rangle_{E_0},$$

para todo $y \in U$, de modo que a função $g(\epsilon, \epsilon')$ a valores reais é constante. Assim:

$$\begin{aligned} 0 = v\big(g(\epsilon, \epsilon')\big) &= (\nabla_v g)(e, e') + g_x(\nabla_v \epsilon, e') + g_x(e, \nabla_v \epsilon') \\ &= (\nabla_v g)(e, e') + g_x\big(\Gamma_x(v) \cdot e, e'\big) + g_x\big(e, \Gamma_x(v) \cdot e'\big), \end{aligned}$$

para todo $v \in T_xM$. Então:

$$g_x\big[\big(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*\big) \cdot e, e'\big] = -(\nabla_v g)(e, e')$$

e (Lema 2.5.3 e (3.1)):

$$g_x\big(\mathfrak{I}^P_x(v),\cdot\big) = \tfrac{1}{2} g_x\big[\big(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*\big),\cdot\big] = -\tfrac{1}{2}\nabla_v g,$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$. Identificando $\nabla_v g : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ com um endomorfismo linear de E_x, obtemos:

$$\mathfrak{I}^P_x(v) = -\tfrac{1}{2}\nabla_v g.$$

Desse modo, a inner torsion de P é fundamentalmente a derivada covariante da estrutura semi-riemanniana g. Em particular, $\mathfrak{I}^P = 0$ se e somente se $\nabla g = 0$, i.e., se ∇ for compatível com a estrutura semi-riemanniana g.

3.1.2 Homogeneidade

A respeito de $\mathrm{O}_r(\mathbb{R}^n)$-estruturas temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *Seja (M, g) uma variedade n-dimensional semi-riemanniana com métrica g de índice r com curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$ e com conexão de Levi-Civita ∇. Se $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(TM)$ é a $\mathrm{O}_r(\mathbb{R}^n)$-estrutura em M formada por todos os referenciais ortonormais de TM, então, (M, ∇, P) é infinitesimalmente homogênea.*

Demonstração. De fato, uma vez que ∇ é simétrica e compatível com a métrica temos $\mathfrak{I}^P = 0$, $T = 0$. Por outro lado, como M tem curvatura seccional constante c, a fórmula

$$R_x(v, w)u = c\big(g_x(w, u)v - g_x(v, u)w\big), \qquad \forall x \in M \text{ e } \forall v, w, u \in T_xM$$

nos mostra que o tensor de curvatura R é constante em referenciais que pertencem a G-estrutura (o tensor de curvatura R pode ser expresso utilizando apenas a G-estrutura P, que pode ser identificada a métrica g). Nesse caso, as funções multilineares R_0, T_0, $\mathfrak{I}_0$ a que faz referência o Lema 2.6.2 são dadas por $T_0 = 0$, $\mathfrak{I}_0 = 0$ e:

$$R_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (v, w, u) \longmapsto \langle w, u\rangle v - \langle v, u\rangle w \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a métrica de Minkowski de índice r em $\mathbb{R}^n$. □

3.1.3 Teorema de Imersão Isométrica

Teorema 3.1.2. *Suponha dados:*

- *uma variedade semi-riemanniana* $\overline{M}$ *de dimensão* $\bar{n}$*, métrica* $\bar{g}$ *de índice* $\bar{r}$*, conexão de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$ *e curvatura seccional constante* $c \in \mathbb{R}$*;*
- *uma variedade semi-riemanniana* n*-dimensional* M *com métrica* g *de índice* r *e conexão de Levi-Civita* ∇*;*
- *um fibrado vetorial* E *sobre* M *com fibra típica* $\mathbb{R}^k$ *munido de uma estrutura semi-riemanniana* g^E *de índice* s*, onde* $\overline{n} = n+k$ *e* $\overline{r} = r+s$*;*
- *uma conexão* ∇^E *em* E *compatível com* g^E*;*
- *uma seção lisa* α^0 *de* $\mathrm{Lin}_2^s(TM, E)$*.*

Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ *munido da estrutura semi-riemanniana* $\widehat{g}$ *dada pela soma ortonormal das métricas* g *e* g^E*. Assuma que, para todo* $x \in M$*, as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) vale a equação de Gauss:

$$g_x\big(R_x(v,w)u,z\big) = c\big(g_x(w,u)g_x(v,z) - g_x(v,u)g_x(w,z)\big) \\ + g_x^E\big(\alpha_x^0(w,u), \alpha_x^0(v,z)\big) - g_x^E\big(\alpha_x^0(v,u), \alpha_x^0(w,z)\big),$$

para todos $u, v, w, z \in T_xM$*;*

(ii) vale a equação de Codazzi:

$$g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u), e\big) - g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u), e\big) = 0,$$

para todos $u, v, w \in T_xM$ *e todo* $e \in E_x$*, onde* $\nabla^{\otimes}$ *denota a conexão induzida por* ∇ *e* ∇^E *em* $\mathrm{Lin}_2(TM, E)$*;*

(iii) vale a equação de Ricci:

$$g_x^E\big(R_x^E(v,w)e, e'\big) \\ + g_x\big(\alpha_x^0(v)^* \cdot e, \alpha_x^0(w)^* \cdot e'\big) - g_x\big(\alpha_x^0(w)^* \cdot e, \alpha_x^0(v)^* \cdot e'\big) = 0,$$

para todos $v, w \in T_xM$ *e todos* $e, e' \in E_x$*, onde* R^E *denota o tensor de curvatura de* ∇^E*.*

Então, para todo $x_0 \in M$*, todo* $y_0 \in \overline{M}$ *e para toda isometria linear* $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$ *existe uma solução local* (f, S) *do problema de imersão isométrica semi-riemanniano cujo domínio é um aberto* U *de* x_0 *tal que* $f(x_0) = y_0$ *e (2.23) valem. Se* M*, além disso, for conexa e simplesmente-conexa e se* $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ *for geodesicamente completa então existe uma única solução global* (f, S) *do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados* ∇^E*,* α^0*,* g^E*, satisfazendo as condições iniciais acima.*

Demonstração. Defina em $\overline{M}$, a G-estrutura $\overline{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\overline{M})$ com $G = \mathrm{O}_{\bar{r}}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$. Do exposto na Subseção 3.1.2 concluímos que $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ é infinitesimalmente homogênea.

Considere em $\widehat{E}$ a conexão $\widehat{\nabla}$ compatível com $\widehat{g}$ com componentes ∇, ∇^E e α^0, e defina $\widehat{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E})$. Como as conexões $\widehat{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$ são compatíveis com as estruturas semi-riemannianas $\hat{g}$ e $\bar{g}$, respectivamente, temos que $\mathfrak{I}^{\widehat{P}} = 0$ e $\mathfrak{I}^{\overline{P}} = 0$. Assim, a hipótese (a) do Teorema 2.8.4 é automaticamente satisfeita. Por (1.3), o lado esquerdo da equação de Gauss assume a seguinte forma:

$$c\big(g_x(w,u)g_x(v,z) - g_x(v,u)g_x(w,z)\big)$$

e os lados esquerdos das equações de Codazzi e Ricci se anulam. Assim, mera aplicação do Teorema 2.8.4 conclui a demonstração. □

3.2 Imersões em Formas Espaciais Complexas

Seja V um espaço vetorial real munido de uma estrutura complexa J. A *estrutura complexa canônica* J_0 de $\mathbb{R}^{2n}$ é definida por:

$$J_0(x,y) = (-y, x),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se V_0, V são espaços vetoriais reais de mesma dimensão com estruturas complexas J_0 e J, respectivamente então o conjunto:

$$\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{V_0}(V) = \big\{p \in \mathrm{FR}_{V_0}(V) : p \circ J_0 = J \circ p\big\}$$

é uma $\mathrm{GL}(V_0, J_0)$-estrutura no espaço vetorial V modelada sobre V_0, onde denotamos por $\mathrm{GL}(V_0, J_0)$ o subgrupo de $\mathrm{GL}(V_0)$ formado por todas os isomorfismos lineares de V_0 que comutam com J_0. Um elemento p de $\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{V_0}(V)$ é dito ser um *referencial complexo* de V. Notamos aqui que, quando tratarmos de V_0 igual a $\mathbb{R}^{2n}$ munido da estrutura complexa canônica, escreveremos apenas $\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}(V)$ ao invés de $\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{V_0}(V)$.

Nota 3.2.1. *Observamos, também, que, se P é uma $\mathrm{GL}(V_0, J_0)$-estrutura no espaço vetorial V então existe uma única estrutura complexa J em V tal que $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{V_0}(V)$.*

Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ um produto interno positivo definido ou indefinido em V. Assuma que J é anti-simétrico em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, i.e.:

$$\langle J(v), w\rangle_V + \langle v, J(w)\rangle_V = 0,$$

para todos $v, w \in V$. O *grupo unitário* de V com relação a J e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ é definido por:

$$\mathrm{U}(V, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) = \mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V) \cap \mathrm{GL}(V, J),$$

onde denotamos por $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ o grupo ortogonal de V. Escrevemos também $\mathrm{U}(V)$ quando J e $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ estão fixados pelo contexto. Se $\mathbb{R}^{2n}$ é munido da estrutura complexa canônica J_0 e do produto interno indefinido:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \sum_{i=1}^{n-r} (x_i x'_i + y_i y'_i) - \sum_{i=n-r+1}^{n} (x_i x'_i + y_i y'_i), \quad x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

de índice $2r$ então denotamos o grupo unitário $\mathrm{U}(\mathbb{R}^{2n}, J_0, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ por $\mathrm{U}_r(\mathbb{R}^{2n})$.

Dados dois espaços vetoriais reais V_0, V de mesma dimensão, e munidos respectivamente dos produtos internos indefinidos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ de mesmo índice, e estruturas complexas $J_0 : V_0 \to V_0$, $J : V \to V$ anti-simétricas em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ respectivamente, definimos:

$$\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{V_0}(V) = \big\{ p \in \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{V_0}(V) : p \circ J_0 = J \circ p \big\}.$$

O conjunto $\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{V_0}(V)$ é uma $\mathrm{U}(V_0, J_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0})$-estrutura no espaço vetorial V.

Nota 3.2.2. *Observamos que, reciprocamente, se P é uma $\mathrm{U}(V_0, J_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0})$-estrutura no espaço vetorial V então existe um único produto interno indefinido $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ em V e uma única estrutura complexa $J : V \to V$ anti-simétrica com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ tal que $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{V_0}(V)$. Quando V_0 é $\mathbb{R}^{2n}$ munido da estrutura complexa canônica e do produto interno indefinido* (3.4) *escrevemos simplesmente $\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}(V)$ ao invés de $\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{V_0}(V)$.*

Fixado $\Pi : E \to M$, um fibrado vetorial com fibra típica E_0, se J_0 é uma estrutura complexa em E_0 então o conjunto:

$$\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{E_0}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{x \in M} \mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{E_0}(E_x)$$

de todos os referenciais complexos de E é uma $\mathrm{GL}(E_0, J_0)$-estrutura no fibrado vetorial E.

Se g é uma estrutura semi-riemanniana em E de índice r, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$ é um produto interno indefinido em E_0 com índice r, J_0 é anti-simétrico em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$ e J_x é anti-simétrico com respeito a g_x para todo $x \in M$ então:

$$\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{E_0}(E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E) \cap \mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{E_0}(E)$$

é uma $\mathrm{U}(E_0)$-estrutura em E.

Imersões em formas espaciais complexas correspondem, no formalismo proposto pelo Teorema 2.8.4, justamente à análise do fibrado de referenciais $\mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{E_0}(E)$ acima descrito.

Sejam $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0, J uma estrutura quase complexa em E, g uma estrutura semi-riemanniana em E, J_0 uma estrutura complexa em E_0 e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$ um produto interno indefinido em E_0. Assuma J_x anti-simétrico em relação a g_x para todos $x \in M$, J_0 anti-simétrico com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$ e g_x com o mesmo índice que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$, para todo $x \in M$. Então o conjunto $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{u}}_{E_0}(E)$ é uma G-estrutura em E com $G = \mathrm{U}(E_0)$. Sendo ∇ é uma conexão em E, calculemos a inner torsion $\mathfrak{I}^P$.

3.2.1 Inner Torsion

Seja $x \in M$ fixado. Temos que $G_x = \mathrm{U}(E_x)$ e que $\mathfrak{g}_x$ é a álgebra de Lie das funções lineares $T : E_x \to E_x$ tais que $T \circ J_x = J_x \circ T$, com T anti-simétrico em relação a g_x. Temos um isomorfismo linear:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x &\longrightarrow \mathrm{sym}(E_x) \oplus \overline{\mathrm{Lin}}_{\mathrm{a}}(E_x, J_x) \\ T + \mathfrak{g}_x &\longmapsto \big(\tfrac{1}{2}(T + T^*), \tfrac{1}{2}[T - T^*, J_x]\big), \end{aligned}$$

onde $[T - T^*, J_x] = (T - T^*) \circ J_x - J_x \circ (T - T^*)$ e $\overline{\mathrm{Lin}}_{\mathrm{a}}(E_x, J_x)$ denota o espaço das funções lineares $T : E_x \to E_x$ que são anti-simétricas com respeito a g_x e tais que $T \circ J_x + J_x \circ T = 0$. Seja $s : U \to P$ uma seção local lisa com $x \in U$. Como apresentado na Subseção 3.1.1, temos:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*\big) = -\tfrac{1}{2}\nabla_v g,$$

para todo $v \in T_xM$.

Seja $e \in E_x$ fixado e defina uma seção local $\epsilon : U \to E$ como em (3.2). Então $\epsilon(x) = e$ e a representação de ϵ em relação a s é constante; além do mais, como s toma valores em $\mathrm{FR}^{\mathrm{c}}_{E_0}(E)$, a representação de $J(\epsilon)$ com respeito a s também é constante. Então:

$$\nabla_v \epsilon = \Gamma_x(v, e), \quad \nabla_v\big(J(\epsilon)\big) = \Gamma_x\big(v, J_x(e)\big),$$

e:

$$\nabla_v\big(J(\epsilon)\big) = (\nabla_v J)(e) + J_x(\nabla_v \epsilon),$$

para todo $v \in T_xM$. Obtemos portanto:

$$\Gamma_x(v) \circ J_x = \nabla_v J + J_x \circ \Gamma_x(v).$$

Assim, temos:

$$[\Gamma_x(v), J_x] = \nabla_v J,$$

para todo $v \in T_xM$. Desse modo:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v) - \Gamma_x(v)^*\big) = \Gamma_x(v) - \nabla_v g,$$

e:

$$\tfrac{1}{2}[\Gamma_x(v) - \Gamma_x(v)^*, J_x] = \nabla_v J - [\nabla_v g, J_x].$$

Portanto:

$$\mathfrak{I}^P_x(v) = \big(-\tfrac{1}{2}\nabla_v g, \nabla_v J - [\nabla_v g, J_x]\big),$$

para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$. Em particular, $\mathfrak{I}^P = 0$ se e somente se ∇ é compatível com g e J é paralelo.

3.2.2 Homogeneidade

Seja (M, g, J) uma variedade semi-Kähler. Dizemos que (M, g, J) tem *curvatura holomorfa constante* $c \in \mathbb{R}$ se:

$$g_x\big[R_x\big(v, J(v)\big)v, Jv\big] = -c g_x(v, v)^2,$$

para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$. É simples ver que se (M, g, J) tem curvatura holomorfa constante c então o tensor de curvatura R é dado por:

$$\begin{aligned} R_x(v, w)u = -\tfrac{c}{4}\big[g_x(v, u)w - g_x(w, u)v - g_x\big(v, J_x(u)\big)J_x(w) \\ + g_x\big(w, J_x(u)\big)J_x(v) - 2g_x\big(v, J_x(w)\big)J_x(u)\big], \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $x \in M$ e todos $v, w, u \in T_xM$. Se (M, g, J) é uma variedade semi-Kähler com curvatura holomorfa constante e se $P = \mathrm{FR}^{\mathrm{u}}(TM)$ então (M, ∇, P) é infinitesimalmente homogênea. De fato, a inner torsion $\mathfrak{I}^P$, e a torção são nulas e a fórmula (3.5) nos mostra que R é constante em referenciais que pertencem a P.

3.2.3 Teorema de Imersão Isométrica

Teorema 3.2.3. *Suponha dados:*

- *uma variedade semi-Kähler* $\overline{M}$ *de dimensão* $\bar{n}$, *métrica* $\bar{g}$ *de índice* $\bar{r}$, *conexão de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$, *estrutura complexa* $\overline{J}$ *e curvatura holomorfa constante* $c \in \mathbb{R}$;
- *uma variedade semi-riemanniana quase complexa* n*-dimensional* M *com métrica* g *de índice* r, *conexão de Levi-Civita* ∇ *e estrutura complexa* J;
- *um fibrado vetorial* E *sobre* M *com fibra típica* $\mathbb{R}^k$ *munido de uma estrutura semi-riemanniana* g^E *de índice* s, *onde* $\overline{n} = n + k$ *e* $\overline{r} = r + s$;
- *uma conexão* ∇^E *em* E *compatível com* g^E;
- J^E *uma estrutura quase complexa em* E;
- *uma seção lisa* α^0 *de* $\mathrm{Lin}_2^s(TM, E)$.

Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ *munido da estrutura semi-riemanniana* $\widehat{g}$ *dada pela soma ortonormal das métricas* g *e* g^E. *Assuma que, para todo* $x \in M$, *as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) vale que:

- J *é paralelo com respeito a* ∇, *i.e.,* (M, g, J) *é Kähler;*
- J^E *é paralelo com respeito a* ∇^E;
- α^0 *é* $\mathbb{C}$*-bilinear, i.e.,* $\alpha_x^0(J_x\cdot, \cdot) = \alpha_x^0(\cdot, J_x\cdot) = J_x^E \circ \alpha^0$, *para todo* $x \in M$.

(ii) vale a equação de Gauss:

$$\begin{aligned} g_x\big(R_x(v,w)u, z\big) = -\tfrac{c}{4}\big[&g_x(v,u)g_x(w,z) - g_x(w,u)g_x(v,z) \\ &- g_x\big(v, J_x(u)\big)g_x\big(J_x(w), z\big) + g_x\big(w, J_x(u)\big)g_x\big(J_x(v), z\big) \\ &- 2g_x\big(v, J_x(w)\big)g_x\big(J_x(u), z\big)\big] + g_x^E\big(\alpha_x^0(w,u), \alpha_x^0(v,z)\big) \\ &\qquad - g_x^E\big(\alpha_x^0(v,u), \alpha_x^0(w,z)\big), \end{aligned}$$

para todos $u, v, w, z \in T_xM$;

(iii) vale a equação de Codazzi:

$$g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u),e\big) - g_x^E\big((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u),e\big) = 0,$$

para todos $u, v, w \in T_xM$ e todo $e \in E_x$, onde $\nabla^{\otimes}$ denota a conexão induzida por ∇ e ∇^E em $\mathrm{Lin}_2(TM, E)$;

(iv) vale a equação de Ricci:

$$g_x^E\big(R_x^E(v,w)e,e'\big) \\ + g_x\big(\alpha_x^0(v)^* \cdot e, \alpha_x^0(w)^* \cdot e'\big) - g_x\big(\alpha_x^0(w)^* \cdot e, \alpha_x^0(v)^* \cdot e'\big) = 0,$$

para todos $v, w \in T_xM$ e todos $e, e' \in E_x$, onde R^E denota o tensor de curvatura de ∇^E.

Então, para todo $x_0 \in M$, todo $y_0 \in \overline{M}$ e para toda isometria $\mathbb{C}$-linear $\sigma_0 : \widehat{E}_{x_0} \to T_{y_0}\overline{M}$ (i.e., $\overline{J}_{y_0} \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \widehat{J}_{x_0}$) existe uma solução local (f, S) do problema de imersão isométrica semi-riemanniano cujo domínio é uma vizinhança aberta U de x_0 com $f(x_0) = y_0$, tal que (2.23) vale e $\mathrm{d}f_x \oplus S_x : \widehat{E}_x \to T_{f(x)}\overline{M}$ é $\mathbb{C}$-linear, para todo $x \in U$. Se M, além disso, for conexa e simplesmente-conexa e se $(\overline{M}, \overline{\nabla})$ for geodesicamente completa então existe uma única solução global (f, S) do problema de imersão isométrica semi-riemanniano dados ∇^E, α^0, g^E, satisfazendo as condições iniciais acima.

Demonstração. Assuma $\overline{M}$ munida de uma estrutura quase complexa $\overline{J}$ tal que $(\overline{M}, \bar{g}, \overline{J})$ seja uma variedade semi-Kähler com curvatura holomorfa constante $c \in \mathbb{R}$. Defina $\overline{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{u}}(T\overline{M})$ e $G = \mathrm{U}_{\bar{r}}(\mathbb{R}^{\bar{n}})$, de modo que $\overline{P}$ seja uma G-estrutura em $\overline{M}$ e $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ seja infinitesimalmente homogênea.

Considere $\widehat{\nabla}$ a conexão em $\widehat{E}$ compatível com $\widehat{g}$ cujas componentes são ∇, ∇^E e α^0. Defina uma estrutura quase complexa $\widehat{J}$ em $\widehat{E}$ fazendo $\widehat{J}_x(v,e) = \big(J_x(v), J_x^E(e)\big)$, para todos $x \in M$, $v \in T_xM$, $e \in E_x$. Como $x \in M$, J_x e J_x^E são anti-simétricos com respeito a g_x e g_x^E, respectivamente, $\widehat{J}_x$ torna-se anti-simétrico em relação a $\hat{g}$. Faça $\widehat{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{u}}(\widehat{E})$, de modo a tornar $\widehat{P}$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$.

Uma vez que a conexão $\overline{\nabla}$ é compatível com a estrutura semi-riemanniana $\bar{g}$ e $\overline{J}$ é paralelo temos $\mathfrak{I}^{\overline{P}} = 0$. Assim, a hipótese (a) do Teorema 2.8.4 se equivale ao paralelismo de $\widehat{J}$ com respeito a $\widehat{\nabla}$. Um simples cálculo nos mostra que $\widehat{J}$ é paralelo com respeito a $\widehat{\nabla}$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- J é paralelo com respeito a ∇, i.e., (M, g, J) é Kähler;

- J^E é paralelo com respeito a ∇^E;
- α^0 é $\mathbb{C}$-bilinear, i.e., $\alpha^0_x(J_x\cdot,\cdot) = \alpha^0_x(\cdot, J_x\cdot) = J^E_x \circ \alpha^0$, para todo $x \in M$.

A partir de (3.5) concluímos que o lado esquerdo da equação de Gauss torna-se:

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{c}{4}\big[g_x(v,u)g_x(w,z) - g_x(w,u)g_x(v,z) - g_x\big(v, J_x(u)\big)g_x\big(J_x(w), z\big)\\
+ g_x\big(w, J_x(u)\big)g_x\big(J_x(v), z\big) - 2g_x\big(v, J_x(w)\big)g_x\big(J_x(u), z\big)\big],
\end{aligned}
$$

e os lados esquerdos das equações de Codazzi e Ricci se anulam. Assim, nesse caso, a aplicação do Teorema 2.8.4 nos dá o teorema fundamental para imersão isométrica de variedades Kähler. □

3.3 $\mathrm{O}(E_0; e_0)$-Estruturas e Variedades Tridimensionais Homogêneas

Sejam V_0, V espaços vetoriais de dimensão finita de mesma dimensão e mesmo corpo de escalares; sejam W_0 um subespaço de V_0 e W um subespaço de V tal que W_0 e W tenham a mesma dimensão. Um V_0-referencial $p \in \mathrm{FR}_{V_0}(V)$ de V é dito *adaptado* a (W_0, W) se $p(W_0) = W$. O conjunto $\mathrm{FR}_{V_0}(V; W_0, W)$ formado por todos os V_0-referenciais de V adaptados a (W_0, W) é uma $\mathrm{GL}(V_0; W_0)$-estrutura no espaço vetorial V modelada sobre V_0, onde $\mathrm{GL}(V_0; W_0)$ denota o subgrupo de $\mathrm{GL}(V_0)$ formado pelos isomorfismos lineares $T : V_0 \to V_0$ tais que $T(W_0) = W_0$.

Se V_0 e V são munidos de produtos internos positivo definidos ou indefinidos, definimos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{V_0}(V; W_0, W) &= \mathrm{FR}_{V_0}(V; W_0, W) \cap \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{V_0}(V),\\
\mathrm{O}(V_0; W_0) &= \mathrm{GL}(V_0; W_0) \cap \mathrm{O}(V_0).
\end{aligned}
$$

Se $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{V_0}(V; W_0, W)$ é não-vazio então é uma $\mathrm{O}(V_0; W_0)$-estrutura no espaço vetorial V modelada sobre V_0.

Sejam $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0 e $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ uma seção lisa de E com $\epsilon(x) \neq 0$, para todo $x \in M$. Se $e_0 \in E_0$ é um vetor não nulo então o conjunto:

$$
\mathrm{FR}_{E_0}(E; e_0, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} \mathrm{FR}_{E_0}\big(E_x; e_0, \epsilon(x)\big)
$$

de todos os E_0-referenciais do fibrado vetorial E que são *adaptados* a (e_0, ϵ) é uma $\mathrm{GL}(E_0; e_0)$-estrutura no fibrado vetorial E. Se g uma estrutura semi-riemanniana em E e se um produto interno indefinido em E_0 é fixado então o conjunto:

$$\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E; e_0, \epsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FR}_{E_0}(E; e_0, \epsilon) \cap \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E)$$

é uma $\mathrm{O}(E_0; e_0)$-estrutura no fibrado vetorial E se $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}\big(E_x; e_0, \epsilon(x)\big) \neq \emptyset$ para todo $x \in M$.

Imersões nas estruturas geométricas riemannianas tridimensionais com grupo de isometria de quatro dimensões ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(\mathbb{R}^2)$ e Nil^3), como apresentadas em [5] e [6] correspondem, no formalismo proposto pelo Teorema 2.8.4, justamente à análise dos referenciais de $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}\big(E; e_0, \epsilon\big)$ que preservam orientação.

3.3.1 $\mathrm{O}(E_0; e_0)$-Estruturas - Inner Torsion

Seja $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0 e $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ uma seção lisa de E com $\epsilon(x) \neq 0$, para todo $x \in M$. Se $e_0 \in E_0$ é um vetor não nulo então $P = \mathrm{FR}_{E_0}(E; e_0, \epsilon)$ é uma G-estrutura em E com $G = \mathrm{GL}(E_0; e_0)$. Seja ∇ uma conexão em E. Calculemos $\mathfrak{I}^P$. Fixe $x \in M$. Então $G_x = \mathrm{GL}\big(E_x; \epsilon(x)\big)$ e $\mathfrak{g}_x$ é a álgebra de Lie dos endomorfismos lineares $T : E_x \to E_x$ tais que $T\big(\epsilon(x)\big) = 0$. Identificamos o quociente $\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ com E_x via:

$$\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \ni T + \mathfrak{g}_x \longmapsto T\big(\epsilon(x)\big) \in E_x.$$

Seja $s : U \to P$ uma seção local lisa com $x \in U$. Então $\mathfrak{I}^P_x$ identifica-se com a função linear de T_xM em E_x. Já que s toma valores em $\mathrm{FR}_{E_0}(E; e_0, \epsilon)$, temos:

$$\epsilon(y) = s(y) \cdot e_0,$$

de modo que a representação de ϵ com respeito a s é constante e:

$$\nabla_v \epsilon = \Gamma_x(v) \cdot \epsilon(x), \tag{3.6}$$

para todo $v \in T_xM$. Então:

$$\mathfrak{I}^P_x(v) = \nabla_v \epsilon,$$

para todo $v \in T_xM$ e:

$$\mathfrak{I}^P_x = (\nabla \epsilon)(x),$$

para todo $x \in M$. Em particular, $\mathfrak{I}^P = 0$ se e somente se a seção ϵ é paralela. Assuma agora que g é uma estrutura semi-riemanniana em E,

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_0}$ é um produto interno indefinido em E_0 e que $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}\big(E_x;e_0,\epsilon(x)\big)\neq\emptyset$, para todo $x\in M$. Então $P=\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_{E_0}(E;e_0,\epsilon)$ é uma G-estrutura em E com $G=\mathrm{O}(E_0;e_0)$. Calculemos $\mathfrak{I}^P$. Seja $x\in M$ fixado. Então $G_x=\mathrm{O}\big(E_x;\epsilon(x)\big)$ e $\mathfrak{g}_x$ é a álgebra de Lie dos endomorfismos anti-simétricos T de E_x tais que $T\big(\epsilon(x)\big)=0$. Temos o seguinte isomorfismo linear:

$$\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x\ni T+\mathfrak{g}_x\longmapsto\big(\tfrac{1}{2}(T+T^*),\tfrac{1}{2}(T-T^*)\cdot\epsilon(x)\big)\in\mathrm{sym}(E_x)\oplus\epsilon(x)^\perp$$

onde $\epsilon(x)^\perp$ denota o kernel de $g_x\big(\epsilon(x),\cdot\big)$. Seja $s:U\to P$ uma seção local lisa com $x\in U$. Como apresentado na Subseção 3.1.1, temos:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v)+\Gamma_x(v)^*\big)=-\tfrac{1}{2}\nabla_v g,$$

de modo que:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v)-\Gamma_x(v)^*\big)=\Gamma_x(v)+\tfrac{1}{2}\nabla_v g,$$

para todo $v\in T_xM$. Além do mais, (3.6) vale. Então:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v)-\Gamma_x(v)^*\big)\cdot\epsilon(x)=\nabla_v\epsilon+\tfrac{1}{2}(\nabla_v g)\big(\epsilon(x)\big).$$

Portanto:

$$\mathfrak{I}^P_x(v)=\Big(-\tfrac{1}{2}\nabla_v g,\nabla_v\epsilon+\tfrac{1}{2}(\nabla_v g)\big(\epsilon(x)\big)\Big),\tag{3.7}$$

para todos $x\in M$, $v\in T_xM$. Em particular, $\mathfrak{I}^P=0$ se e somente se ∇ é compatível com g e ϵ é paralelo.

3.3.2 $\mathrm{O}(E_0;e_0)$-Estruturas - Homogeneidade

Seja (M,g) uma variedade semi-riemanniana n-dimensional onde g tem índice r e seja $\xi\in\mathbf{\Gamma}(TM)$ um campo vetorial liso M com $g_x\big(\xi(x),\xi(x)\big)=1$, para todo $x\in M$. Considere em $\mathbb{R}^n$ a forma bilinear de Minkowski $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de índice r; denote por $e_1,\ldots,e_n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assuma a existência de uma função trilinear $R_0:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e de uma linear $L_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tais que para todo $x\in M$ e toda isometria linear $p:\mathbb{R}^n\to T_xM$ com $p(e_1)=\xi(x)$, as seguintes condições valem:

(a) R_0 é p-relacionado a R_x;

(b) $p\circ L_0=(\nabla\xi)_x\circ p$.

Defina $P=\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(TM;e_1,\xi)$, de modo que P seja uma G-estrutura em M com $G=\mathrm{O}(\mathbb{R}^n;e_1)$. Então (M,∇,P) é infinitesimalmente homogênea. De fato, isso segue do Lema 2.6.2, quando se tem em mente que, como ∇ é compatível com g, a inner torsion $\mathfrak{I}^P$ pode ser identificada com $\nabla\xi$. É interessante também considerarmos o caso onde M é orientada e (a) e (b) acima valem apenas para as isometrias lineares que preservam orientação $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$ com $p(e_1) = \xi(x)$. Nesse caso, considera-se o aberto de P formado pelos referenciais que preservam orientação, o qual é um fibrado principal com grupo estrutural:

$$\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n; e_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{T \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n; e_1) : \det(T) = 1\}.$$

Exemplos interessantes de variedades riemannianas que satisfazem as condições acima são as variedades riemannianas 3-dimensional com grupo de isometria de dimensão 4.

3.3.3 Variedades Homogêneas Tridimensionais

Nesta subseção consideramos as variedades riemannianas $\overline{M}$ homogêneas tridimensionais com grupo de isometria de dimensão 4: tais variedades são uma fibração riemannianas sobre uma forma espacial de dimensão 2, onde as fibras são geodésicas e existe uma família a 1 parâmetro de translações ao longo das fibras, gerada por um campo de Killing unitário ξ a que chamaremos aqui de *campo vetorial vertical*. Essas variedades são classificadas, a menos de isometrias, pela curvatura κ da base da fibração e pela curvatura do fibrado τ, onde κ e τ podem ser quaisquer números reais satisfazendo $\kappa \neq 4\tau^2$. A *curvatura do fibrado* é o número τ tal que $\overline{\nabla}_X\xi = \tau X \times \xi$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde denotamos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, e por $\times$ o produto vetorial em $\overline{M}$.

Quando a curvatura do fibrado τ se anula (e então $\kappa \neq 0$), obtemos as variedades produto $Q^2_\kappa \times \mathbb{R}$, lembrando que denotamos por Q^n_c as formas espaciais de dimensão n e curvatura c. Essas variedades têm um grupo de isometria com 4 componentes conexas. O vetor vertical ξ é simplesmente o vetor correspondente ao fator $\mathbb{R}$. Caso estudado por B. Daniel em [5].

Quando $\kappa \neq 0$, o grupo de isometria tem 2 componentes conexas: uma isometria preserva as orientações de ambos, fibras e base da fibração, ou inverte ambas as orientações. Essas variedades são de três tipos: elas têm o grupo de isometria das esferas de Berger para $\kappa > 0$, do grupo de Heisenberg Nil^3 para $\kappa = 0$, e de $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{R})$ para $\kappa < 0$. Casos tratados em [5] por B. Daniel.

Em todos esses casos no teorema de imersão encontramos as equações de Gauss e Codazzi, as quais relacionam a métrica de $\overline{M}$, seu operador forma

A, a componente tangencial T de ξ e a componente normal ν de ξ.

Curvatura

Usando a notação apresentada nos parágrafos acima, e denotando por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor de curvatura de $\overline{M}$, respectivamente, temos que:

Proposição 3.3.1. *Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ vale:*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_1(X,Y)Z, W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_2(\xi; X, Y)Z, W\rangle,$$

onde

$$R_1(X,Y)Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X,$$

$$R_2(V; X, Y)Z = \langle Y, V\rangle\langle Z, V\rangle X + \langle Y, Z\rangle\langle X, V\rangle V - \langle X, Z\rangle\langle Y, V\rangle V - \langle X, V\rangle\langle Z, V\rangle Y.$$

Demonstração. Seja (E_1, E_2, E_3) o referencial ortonormal orientado de $\overline{M}$ com

$$E_3 = \xi$$

cujos símbolos de Christoffel não-nulos $\overline{\Gamma}_{ij}^k = \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_k\rangle$ são:

$$\overline{\Gamma}_{12}^3 = \overline{\Gamma}_{23}^1 = -\overline{\Gamma}_{21}^3 = -\overline{\Gamma}_{13}^2 = \tau,$$

$$\overline{\Gamma}_{32}^1 = -\overline{\Gamma}_{31}^2 = \tau - \frac{\kappa}{2\tau}.$$

Fazendo

$$\langle \overline{R}(X \wedge Y), Z \wedge W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle$$

observamos que a matriz de $\overline{R}$ na base $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ é

$$\overline{R} = \operatorname{diag}(a, a, b)$$

com

$$a = \tau^2, \qquad b = -3\tau^2 + \kappa.$$

Escreveremos no que se segue, para $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $X = \widetilde{X} + x\xi$ com $\widetilde{X}$ perpendicular a ξ e $x = \langle X, \xi\rangle$. Usando a multilinearidade do tensor de curvatura, escrevemos $\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle$ como uma soma de 16 termos. Os termos em que ξ aparece três ou quatro vezes, ou duas nas posições $1, 2$ ou $3, 4$, se anulam por anti-simetria. Os termos onde ξ aparece uma única vez se anulam já que a matriz de $\overline{R}$ na base $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ é diagonal. Temos, então:

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \overline{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{W}\rangle + yw\langle \overline{R}(\widetilde{X},\xi)\widetilde{Z},\xi\rangle + yz\langle \overline{R}(\widetilde{X},\xi)\xi,\widetilde{W}\rangle \\ &\quad + xw\langle \overline{R}(\xi,\widetilde{Y})\widetilde{Z},\xi\rangle + xz\langle \overline{R}(\xi,\widetilde{Y})\xi,\widetilde{W}\rangle \\ &= (\kappa - 3\tau^2)(\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\rangle\langle \widetilde{Y},\widetilde{W}\rangle - \langle \widetilde{X},\widetilde{W}\rangle\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle) \\ &\quad + \tau^2(yw\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\rangle - yz\langle \widetilde{X},\widetilde{W}\rangle - xw\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\rangle + xz\langle \widetilde{Y},\widetilde{W}\rangle) \\ &= (\kappa - 3\tau^2)\langle R_1(X,Y)Z,W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_2(\xi;X,Y)Z,W\rangle.\end{aligned}$$

□

Seja, agora, M uma hipersuperfície orientada de $\overline{M}$ e N o vetor unitário normal a M. Temos:

Corolário 3.3.2. *Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ valem:*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_1(X,Y)Z,W\rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_2(\xi;X,Y)Z,W\rangle,$$

$$\overline{R}(X,Y)N = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y),$$

onde

$$R_1(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X,$$

$$\begin{aligned}R_2(V;X,Y)Z = \langle Y,V\rangle\langle Z,V\rangle X + \langle Y,Z\rangle\langle X,V\rangle V \\ - \langle X,Z\rangle\langle Y,V\rangle V - \langle X,V\rangle\langle Z,V\rangle Y,\end{aligned}$$

$$\nu = \langle N,\xi\rangle,$$

e T é a projeção de ξ em TM, i.e.,

$$T = \xi - \nu N.$$

Demonstração. Isso é uma consequência da Proposição 3.3.1, usando o fato de que X, Y e Z são tangentes à superfície e N é normal à superfície. □

Para mais detalhes ver [6].

3.3.4 Imersão Isométrica de Superfícies em Variedades Tridimensionais Homogêneas

Considere uma variedade riemanniana orientada simplesmente conexa M de dimensão 2. Seja g sua métrica (também denotada aqui por $\langle \cdot, \cdot \rangle$), ∇ sua conexão de Levi-Civita, R seu tensor de curvatura, K sua curvatura seccional, e J a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em TM. Seja A um campo de operadores simétricos $A_y : T_yM \to T_yM$, T um campo vetorial em M tal que $||T|| \leq 1$ e ν uma função lisa em V tal que $\nu^2 \leq 1$.

As equações de compatibilidade para superfícies em variedades riemannianas tridimensionais homogêneas com grupo de isometria de 4 dimensões sugerem a seguinte definição:

Definição 3.3.3. *Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana tridimensional homogênea com grupo de isometria de 4 dimensões. Sejam κ a curvatura da base da fibração e τ a curvatura da fibração. Dizemos que (g, A, T, ν) satisfaz as* equações de compatibilidade *para $\overline{M}$ se*

$$||T||^2 + \nu^2 = 1$$

e, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$K = \det A + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2, \tag{3.8}$$

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y), \tag{3.9}$$

$$\nabla_X T = \nu(AX - \tau JX), \tag{3.10}$$

$$\mathrm{d}\nu(X) + \langle AX - \tau JX, T\rangle = 0. \tag{3.11}$$

Nota 3.3.4. *Observamos que* (3.10) *implica* (3.11) *exceto quando $\nu = 0$ (por diferenciação da identidade $\langle T, T\rangle + \nu^2 = 1$ com respeito a X).*

Teorema 3.3.5. *Sejam M uma variedade riemanniana orientada simplesmente conexa de dimensão 2, g sua métrica e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Sejam A um campo de operadores simétricos $A_y : T_yM \to T_yM$, T um campo vetorial em M e ν uma função real lisa em M tal que $||T||^2 + \nu^2 = 1$.*

Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana tridimensional homogênea com grupo de isometria de 4 dimensões e ξ seu campo vetorial vertical. Seja κ a curvatura de sua base e τ a curvatura de seu fibrado. Então existe uma imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ tal que o operador forma em relação a normal N associado a f é

$$\mathrm{d}f \circ A \circ \mathrm{d}f^{-1}$$

e tal que

$$\xi = \mathrm{d}f(T) + \nu N$$

se e somente se (g, A, T, ν) *satisfaz as equações de compatibilidade para* $\overline{M}$*. Nesse caso, a imersão é única a menos de isometrias globais de* $\overline{M}$ *que preservem a orientação de ambas, fibras e base da fibração.*

Demonstração. Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana tridimensional homogênea com grupo de isometria de 4 dimensões e ξ seu campo vetorial vertical. Consideremos em $\overline{M}$ a G-estrutura P, com $G = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n; e_1)$, dada pelos referenciais de $\mathrm{FR}^o(TM; e_1, \xi)$ que preservam orientação (onde denotamos por e_1, e_2, e_3 a base canônica de $\mathbb{R}^3$). Denotemos, finalmente por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$.

Uma vez que $\overline{\nabla}$ é compatível com a métrica de $\overline{M}$ segue da equação (3.7) que podemos identificar a inner torsion de P com $\overline{\nabla}\xi$. Não é difícil ver que, para $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos:

$$\overline{\nabla}_X \xi = \tau X \times \xi,$$

onde denotamos por $\times$ o produto vetorial de $\overline{M}$. Segue, então, que $\overline{\nabla}\xi$ é constante em referenciais de P. Além disso temos que a torção é nula (conexão de Levi-Civita) e que R é constante nos referenciais pertencentes a P (ver Corolário 3.3.2). Assim, observamos que a tripla $(\overline{M}, \overline{\nabla}, P)$ é infinitesimalmente homogênea. Utilizando a notação apresentada na Subseção 3.3.2, temos R_0 definida em concordância com o Corolário 3.3.2, e:

$$L_0(v) = \tau v \times e_1,$$

onde denotamos por $\times$ o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. Defina $\epsilon : M \to \widehat{E}$ uma seção global de $\widehat{E}$ fazendo $\epsilon = (T, \nu)$. Defina uma G-estrutura $\widehat{P}$ em $\widehat{E}$, formada pelos elementos de $\mathrm{FR}^o(\widehat{E}; e_1, \epsilon)$ que preservam orientação.

A Hipótese (a) do Teorema 2.8.4 significa que para todo $x \in M$ e todo $p \in \widehat{P}_x$, devemos ter:

$$p \circ L_0|_{p^{-1}(T_xM)} = (\widehat{\nabla}\epsilon)_x \circ p|_{p^{-1}(T_xM)}.$$

Ou seja, denotando também por $\times$ o produto vetorial em $\widehat{E}$, deve valer, para todo $X \in T_xM$, que:

$$\tau X \times \epsilon = (\widehat{\nabla}_X \epsilon)_x.$$

Temos, no entanto, que as seguintes igualdades valem:

$$\begin{aligned}\tau X \times \epsilon &= \tau X \times (T, \nu)\\ &= \tau(-\nu JX, \langle JX, T\rangle),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_X \epsilon &= \widehat{\nabla}_X (T, \nu) \\ &= (\nabla_X T - \nu AX, \mathrm{d}\nu(X) + \langle AX, T \rangle).\end{aligned}$$

Donde segue a equivalência entre a Hipótese (a) do Teorema 2.8.4 e as equações (3.10) e (3.11). É mero corolário do Corolário 3.3.2 a equivalência entre as equações de Gauss e Codazzi do Teorema 2.8.4 (i.e. das Hipóteses (b) e (c)) com as equações (3.8) e (3.9), respectivamente. Finalmente, uma vez que a imersão de superfícies em variedades tridimensionais tem codimensão 1 segue que a equação de Ricci (Hipótese (d) do Teorema 2.8.4) é automaticamente satisfeita, já que ambos os lados da equação, esquerdo e direito, se anulam.

Assim, a nossa tese segue diretamente da tese do Teorema 2.8.4. $\square$

Capítulo 4

Grupos de Lie e Sol^3

4.1 Imersões Isométricas em Grupos de Lie

Nesta seção estudamos grupos de Lie munidos de métricas invariantes à esquerda e de uma 1-estrutura definida pela escolha de um referencial invariante à esquerda. A respeito de 1-estruturas vale notar que:

Lema 4.1.1. *Se P é uma 1-estrutura definida num fibrado vetorial $\pi : E \to M$, então $\mathfrak{I}^P_x$ é igual ao tensor de Christoffel $\Gamma_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(E_x)$.*

Demonstração. Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica E_0 e $s : M \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ uma seção lisa global de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Então $P = s(M)$ é uma G-estrutura em E com $G = \{\mathrm{Id}_{E_0}\}$ (o que chamamos de 1-*estrutura* em E). Para $x \in M$, temos $G_x = \{\mathrm{Id}_{E_x}\}$ e $\mathfrak{g}_x = \{0\}$. Assim, simples aplicação do Lema 2.5.3 prova a tese. $\square$

Aqui, o Teorema 2.8.4 nos leva ao seguinte resultado:

Teorema 4.1.2. *Suponha dados:*

- *Um grupo de Lie $\bar{n}$-dimensional H com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, métrica riemanniana invariante à esquerda $\bar{g}$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$;*
- *$\{E_i; 1 \le i \le \bar{n}\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{h}$;*
- *(M, g) uma variedade riemanniana n-dimensional ($n = \bar{n} - 1$) com conexão de Levi-Civita ∇;*
- *A um campo de operadores simétricos C^∞ ($A_p : T_pM \to T_pM$);*

- T_i *campos vetoriais lisos de* M *e* f_i *funções* C^∞ *reais em* M *(*$1 \leq i \leq \bar{n}$*) tais que* $||T_i||^2 + f_i^2 = 1$.

Sejam $\overline{R}_{ijkl}$ *e* Γ_{ij}^k *as constantes reais tais que, para todos* $i, j, k, l = 1, \ldots, \bar{n}$,

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k,$$

$$\overline{R}_{ijkl} = \bar{g}(\overline{R}(E_i, E_j)E_k, E_l).$$

(Observe que $\overline{R}_{ijkl}$ *e* Γ_{ij}^k *são, de fato, constantes uma vez que, para todo* $i = 1, \ldots, \bar{n}$, E_i *é um campo invariante à esquerda de* H*).*

Assuma, então, que, para $1 \leq i, j \leq \bar{n}$, *as seguintes equações são satisfeitas:*

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_j - f_j A(T_i) = \sum_{k,l} g(T_i, T_k)\Gamma_{kj}^l T_l \\ g(A(T_i), T_j) + T_i(f_j) = \sum_{k,l} g(T_i, T_k)\Gamma_{kj}^l f_l \end{cases}$$

e que, para todo $x \in M$*:*

- *vale a equação de Gauss:*

$$\sum_{i,j,k,l} v^i w^j u^k z^l \overline{R}_{ijkl} = g_x(R_x(v, w)u, z)$$
$$- g_x(A(w), v)g_x(A(v), z) + g_x(A(u), v)g_x(A(w), z)$$

para todos $u, v, w, z \in T_xM$*;*

Onde, para $1 \leq i \leq \bar{n}$*:*

$$v^i = g_x(v, T_i(x)), \qquad w^i = g_x(w, T_i(x)),$$
$$u^i = g_x(u, T_i(x)), \qquad z^i = g_x(z, T_i(x)).$$

- *vale a equação de Codazzi:*

$$\sum_{i,j,k,l} v^i w^j u^k f_l(x)\overline{R}_{ijkl} = v(g(A(W), U)) - w(g(A(V), U))$$
$$+ g_x(A(u), [W, V]) + g_x(A(v), \nabla_w U) - g_x(A(w), \nabla_v U)$$

para todos $u, v, w \in T_xM$ *(*v^i, w^i *e* u^i *como definidos acima) e* U, V, W *extensões locais de* u, v, w *respectivamente.*

Então, para todos $x_0 \in M$ e $y_0 \in H$, existe $f : U \to H$ (onde U é uma aberto de x_0 em M) imersão isométrica em H tal que $f(x_0) = y_0$, e $S : U \times \mathbb{R} \to f^\perp$ isomorfismo de fibrados vetoriais tais que:

- $\overline{g}_{f(x)}(S_x(e), S_x(e')) = ee'$, *para todo $x \in U$ e todos $e, e' \in x \times \mathbb{R}$;*
- *S preserva conexão se $U \times \mathbb{R}$ é munido com ∇^E tal que $\nabla^E_V e = V(e)$ (para V campo vetorial em U e e função real em U) e $f^\perp$ é munido da conexão normal $\nabla^\perp$;*
- *S leva $\alpha^0 := g(A(\cdot), \cdot)\frac{\partial}{\partial t}$ na segunda forma fundamental α da imersão isométrica f, i.e., $S_x \circ \alpha^0_x = \alpha_x$, para todo $x \in U$.*

Além do mais, se M é completa, conexa e simplesmente conexa existe uma única imersão isométrica global (f, S) de M em H com as propriedades acima.

Demonstração. Seja $\overline{s} : H \ni x \mapsto F_x \in \mathrm{FR}(T_xH)$ com F_x tal que $F_x(e_i) = E_i(p)$ $(1 \leq i \leq \bar{n})$. Defina em H a G-estrutura $\overline{P} = \overline{s}(H)$ com $G = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\bar{n}}}\}$. A seguir, para $x \in H$, denotaremos por $\overline{G}_x$ o grupo de Lie $\{\mathrm{Id}_{T_xH}\}$ e por $\bar{\mathfrak{g}}_x$ sua álgebra de Lie.

A existência de constantes $\overline{R}_{ijkl}$ e Γ^k_{ij} tais que, para todos $i, j, k, l = 1, \ldots, \bar{n}$,

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} E_k,$$

$$\overline{R}_{ijkl} = \bar{g}(\overline{R}(E_i, E_j)E_k, E_l),$$

mostra que tanto $\overline{R}$ quanto $\mathfrak{I}^{\overline{P}}$ são constantes em referenciais que pertencem a $\overline{P}$ (Lema 4.1.1). Assim, como $\overline{T} = 0$, temos que a tripla $(H,\overline{\nabla},\overline{P})$ é, de fato, infinitesimalmente homogênea.

Defina no fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus \mathbb{R}$ a estrutura riemanniana $\widehat{h}$ cujas restrições a TM e $\mathbb{R}$ são g e g^E ($g^E_x(a, b) := a(x)b(x)$, a, b funções reais em M) respectivamente e tal que TM e $\mathbb{R}$ sejam ortogonais. Considere em $\widehat{E}$ uma conexão $\widehat{\nabla}$, compatível com $\widehat{g}$, dada por

$$\widehat{\nabla}_V(W, a) = (\nabla_V W - aA(V), g(A(V), W) + V(a))$$

para V e W campos vetoriais em M e a uma função real em M.

Seja $\widehat{s} : M \ni x \mapsto F_x \in \mathrm{FR}(T_xM \oplus \mathbb{R})$ com F_x tal que $F_x(e_i) = (T_i(x), f_i(x))$ $(1 \leq i \leq \bar{n})$, e $\widehat{P} = \widehat{s}(M)$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$. Denote por $\widehat{G}_x$ o grupo de Lie $\{Id_{\widehat{E}_x}\}$ e por $\widehat{\mathfrak{g}}_x$ sua álgebra de Lie (onde

$x \in M$). Para $x \in M$ e $y \in H$, seja $\sigma : \widehat{E}_x \to T_yH$ a função linear tal que $\sigma(T_i(x), f_i(x)) = E_i(y)$ (função que preserva G-estrutura).

Provemos então que nossas hipóteses implicam que $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ \sigma|_{T_xM}$, onde $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma$ é um isomorfismo linear de $\frac{\mathfrak{gl}(\widehat{E}_x)}{\widehat{\mathfrak{g}}_x}$ em $\frac{\mathfrak{gl}(T_yH)}{\overline{\mathfrak{g}}_y}$ definido pela passagem ao quociente de $\mathrm{Ad}_\sigma : \mathfrak{gl}(\widehat{E}_x) \to \mathfrak{gl}(T_yH)$, a diferencial do isomorfismo de grupos de Lie $I_\sigma : GL(\widehat{E}_x) \ni T \mapsto \sigma \circ T \circ \sigma^{-1} \in GL(T_yH)$ na identidade (bem definido visto que Ad_σ mapeia $\widehat{\mathfrak{g}}_x$ em $\overline{\mathfrak{g}}_y$).

Já que para a 1-estrutura já mencionada $\widehat{\mathfrak{g}}_x$ e $\overline{\mathfrak{g}}_y$ são álgebras de Lie nulas, temos então, para todos $x \in M$ e $y \in H$, que $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma = \mathrm{Ad}_\sigma$.

Recordamos que $\overline{\Gamma} = \overline{\nabla} - \mathfrak{d}^{\overline{s}}$, onde

$$(\mathfrak{d}_X^{\overline{s}} V)(x) = \overline{s}(x)[d\widetilde{V}_x(X(x))]$$

(X e V campos vetoriais em H, e $\overline{s} \circ \widetilde{V} = V$). E, visto que $\mathfrak{d}_X^{\overline{s}} V = 0$ quando V é invariante à esquerda ($d\widetilde{V}_x$ é constante), $\overline{\Gamma} = \overline{\nabla}$ em campos invariantes à esquerda.

É também verdade que $\widehat{\Gamma}(T_i, (T_j, f_j)) = \widehat{\nabla}_{T_i}(T_j, f_j)$ porque se $\widetilde{Y}_i$ é uma seção de $\widehat{E}$ tal que $\widehat{s} \circ \widetilde{Y}_i = (T_i, f_i)$ então $\widetilde{Y}_i(p) = e_i$ (o que implica em $(d\widetilde{Y}_i)_p = 0$). Uma vez que

$$(\mathfrak{d}_X^{\widehat{s}}(T_i, f_i))(p) = \widehat{s}(p)[(d\widetilde{Y}_i)_p(X(p))] = 0$$

temos $\widehat{\Gamma}(T_i, (T_j, f_j)) = \widehat{\nabla}_{T_i}(T_j, f_j)$ como previamente dito. Assim, $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ \sigma|_{T_xM}$ se e só se $\widehat{\Gamma}_x(T_i, (T_j, f_j)) = (\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} \circ \overline{\Gamma}_y \circ \sigma)(T_i, (T_j, f_j))$ (observe que $\widehat{\Gamma}$ e $\overline{\Gamma}$ são tensores, $\mathrm{Ad}_\sigma^{-1} = \mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}}$ e que o seguinte diagrama comuta).

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "\sigma|_{T_xM}"] \arrow[d, "\widehat{\Gamma}_x"] & T_yH \arrow[d, "\overline{\Gamma}_y"] \\
\mathfrak{gl}(\widehat{E}_x) \arrow[r, "\mathrm{Ad}_\sigma"'] & \mathfrak{gl}(T_yH)
\end{tikzcd}$$

Já que

$$(T_i, 0) = \sum_j \widehat{g}((T_i, 0), (T_j, f_j))(T_j, f_j) = \sum_j g(T_i, T_j)(T_j, f_j)$$

é verdade que

$$\widehat{\nabla}_{T_i}(T_j, f_j) = \widehat{\Gamma}_x(T_i, (T_j, f_j)) = (\mathrm{Ad}_{\sigma^{-1}} \circ \overline{\Gamma}_y \circ \sigma)(T_i, (T_j, f_j)) =$$

$$= \sum_k g(T_i, T_k)\sigma^{-1} \circ \overline{\Gamma}_y(E_k, E_j) = \sum_k g(T_i, T_k)\sigma^{-1} \circ \overline{\nabla}_{E_k} E_j$$

E, visto que $\widehat{\nabla}_{T_i}(T_j, f_j) = (\nabla_{T_i} T_j - f_j A(T_i), g(A(T_i), T_j) + T_i(f_j))$ e $\overline{\nabla}_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k$, para todos $i, j = 1, \ldots, \bar{n}$, temos:

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_j - f_j A(T_i) = \sum_{k,l} g(T_i, T_k)\Gamma_{kj}^l T_l \\ g(A(T_i), T_j) + T_i(f_j) = \sum_{k,l} g(T_i, T_k)\Gamma_{kj}^l f_l \end{cases}$$

Isso prova que essas equações são necessárias e suficientes para termos a igualdade $\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ \sigma|_{T_x M}$.

A equação de Gauss como apresentada abaixo segue imediatamente da equação como apresentada no Teorema 2.8.4. No caso aqui apresentado vale que $\alpha_x(\cdot, \cdot) = g_x(A(\cdot), \cdot)$. Assim,

$$\overline{g}_y[\overline{R}_y(\sigma(v), \sigma(w))\sigma(u), \sigma(z)] = g_x(R_x(v, w)u, z) -$$

$$-g_x(A(w), v)g_x(A(v), z) + g_x(A(u), v)g_x(A(w), z)$$

para todos $u, v, w, z \in T_x M$.

Note então que:

$$v = \sum v^i (T_i, f_i)_x, \qquad w = \sum w^i (T_i, f_i)_x,$$
$$u = \sum u^i (T_i, f_i)_x, \qquad z = \sum z^i (T_i, f_i)_x.$$

A equação de Codazzi por outro lado segue facilmente quando observamos que

$$(\nabla^{\otimes} \alpha^0)_x(v, w, u) = v(g(A(W), U)) - g_x(\nabla_v W, A(u)) - g_x(A(w), \nabla_v U)$$

para todos $u, v, w \in T_x M$ e U, V, W extensões locais de u, v, w respectivamente.

$$\overline{g}_y[\overline{R}_y(\sigma(v), \sigma(w))\sigma(u), \sigma(1)] = v(g(A(W), U)) - w(g(A(V), U)) +$$

$$+g_x(A(u), [W, V]) + g_x(A(v), \nabla_w U) - g_x(A(w), \nabla_v U)$$

para todos $u, v, w \in T_x M$ e U, V, W extensões locais de u, v, w respectivamente.

Como $v = \sum v^i (T_i, f_i)_x$, $w = \sum w^i (T_i, f_i)_x$, $u = \sum u^i (T_i, f_i)_x$, $1 = \sum f_i(x)(T_i, f_i)_x$ a equação de Codazzi, como aqui apresentada, segue.

A equação de Ricci vale naturalmente:

Note que $\overline{g}_y[\overline{R}_y(\sigma(v),\sigma(w))\sigma(e'),\sigma(e)] = 0$ e $g_x[R^E_x(v,w)e',e] = 0$ para todos $v,w \in T_xM$ e todos $e,e' \in E_x$ já que:

$$\overline{g}_y[\overline{R}_y(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot] \qquad \text{e} \qquad g_x[R^E_x(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot] = 0$$

são anti-simétricos nas últimas 2 variáveis e e' e e são linearmente dependentes ($\dim E_x = 1$). Além do mais, temos

$$\begin{aligned} g_x(\alpha^0_x(v)^* \cdot e, \alpha^0_x(w)^* \cdot e') - g_x(\alpha^0_x(w)^* \cdot e, \alpha^0_x(v)^* \cdot e') \\ = ee'[g_x(A(v),A(w)) - g_x(A(v),A(w))] = 0 \end{aligned}$$

$(v,w \in T_xM,\ e,e' \in \mathbb{R})$.

Assim, Ricci vale imediatamente.

A partir dos fatos acima apresentados, o Teorema 2.8.4 conclui a demonstração. $\square$

4.2 Imersões isométricas em Sol^3

Como apresentado em [21], oito variedades riemannianas 3-dimensionais caracterizam toda geometria 3-dimensional. A única destas variedades riemannianas homogêneas simplesmente conexas de dimensão 3 que tem um grupo de isometria também de dimensão 3 é o grupo de Lie Sol^3, munido de uma métrica invariante à esquerda. Aqui demonstramos o resultado de imersão isométrica em Sol^3 publicado pelo autor na revista Matemática Contemporânea em 2006.

Por Sol^3, ou simplesmente Sol, nos referimos ao grupo de Lie cuja variedade base é $\mathbb{R}^3$, munido da operação de grupo:

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z')$$

e da métrica invariante à esquerda $\mathrm{d}s^2 = e^{2z}\mathrm{d}x^2 + e^{-2z}\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.

Consideramos a $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\}$-estrutura em Sol dada pelo referencial ortonormal invariante à esquerda que mapeia a base canônica de $\mathbb{R}^3$ em X_1, X_2 e X_3. Campos estes definidos da seguinte maneira:

$$X_1 : \mathrm{Sol} \ni (x,y,z) \mapsto (e^z,0,0) \in T_{(x,y,z)}\mathrm{Sol}$$

$$X_2 : \mathrm{Sol} \ni (x,y,z) \mapsto (0,e^{-z},0) \in T_{(x,y,z)}\mathrm{Sol}$$

$$X_3 : \mathrm{Sol} \ni (x, y, z) \mapsto (0, 0, 1) \in T_{(x,y,z)}\mathrm{Sol}.$$

Como corolário do Teorema 4.1.2 temos:

Corolário 4.2.1. *Seja* (M, g) *uma variedade riemanniana com conexão de Levi-Civita* ∇. *Sejam* A *um campo* C^∞ *de operadores simétricos (*$A_p : T_pM \to T_pM$*),* T_i *(*$1 \leq i \leq 3$*) campos vetoriais lisos de* M *e* f_i *funções reais* C^∞ *em* M *tais que* $||T_i||^2 + f_i^2 = 1$.

Assuma que as seguintes relações são satisfeitas:

- *para* $i \in \{1, 2, 3\}$ *e* $j \in \{1, 2\}$*:*

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_j - f_j A(T_i) = (-1)^j g(T_i, T_j) T_3 \\ g(A(T_i), T_j) + T_i(f_j) = (-1)^j g(T_i, T_j) f_3; \end{cases}$$

- *para* $i \in \{1, 2, 3\}$*:*

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_3 - f_3 A(T_i) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{(j+1)} g(T_i, T_j) T_j \\ g(A(T_i), T_3) + T_i(f_3) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{(j+1)} g(T_i, T_j) f_j. \end{cases}$$

Assuma que:

- *valem as equações de Gauss e Codazzi como apresentadas no Teorema 4.1.2.*

Então, para todos $x_0 \in M$ *e* $y_0 \in \mathrm{Sol}$, *existem* $f : U \to \mathrm{Sol}$ *(onde* U *é uma vizinhança aberta de* x_0 *em* M*) imersão isométrica em* Sol *tal que* $f(x_0) = y_0$ *e* $S : U \times \mathbb{R} \to f^\perp$ *isomorfismo de fibrados vetoriais tais que:*

- $\overline{g}_{f(x)}(S_x(e), S_x(e')) = ee'$, *para todo* $x \in U$ *e todos* $e, e' \in x \times \mathbb{R}$*;*
- S *preserva conexão se* $U \times \mathbb{R}$ *é munido de* ∇^E *tal que* $\nabla^E_V e = V(e)$ *(para* V *campo vetorial em* U *e* e *função real em* U*) e* $f^\perp$ *é munido da conexão normal* $\nabla^\perp$*;*
- S *leva* $\alpha^0 := g(A(\cdot), \cdot)\frac{\partial}{\partial t}$ *na segunda forma fundamental* α *da imersão isométrica* f, *i.e.,* $S_x \circ \alpha^0_x = \alpha_x$, *para todo* $x \in U$.

Além disso, se M *é completa, conexa e simplesmente conexa existe uma única imersão isométrica global* (f, S) *de* M *no* Sol *com as propriedades acima.*

Demonstração. Antes de mais nada vamos calcular $\overline{\Gamma}$ (tensor de Christoffel associado a $\overline{\nabla}$) nos campos vetoriais invariantes à esquerda X_i de Sol^3. Os colchetes de Lie $[X_i, X_j]$ podem ser deduzidos a partir de seus valores quando calculados em funções reais. Vemos que:

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = X_1, \qquad [X_2, X_3] = -X_2.$$

A fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita nos permite calcular $\overline{\nabla}_{X_i} X_j$. Obtemos:

$$\begin{array}{cc} \overline{\nabla}_{X_1} X_1 = -X_3 & \overline{\nabla}_{X_1} X_3 = X_1 \\ \overline{\nabla}_{X_2} X_2 = X_3 & \overline{\nabla}_{X_2} X_3 = -X_2 \end{array} \tag{4.1}$$

e $\overline{\nabla}_{X_i} X_j = 0$ para os demais i e j.

As primeiras equações do corolário anterior são, agora, equivalentes a:

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_j - f_j A(T_i) = (-1)^j g(T_i, T_j) T_3 & \text{para } i \in \{1,2,3\} \\ g(A(T_i), T_j) + T_i(f_j) = (-1)^j g(T_i, T_j) f_3 & \text{e } j \in \{1,2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{T_i} T_3 - f_3 A(T_i) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{(j+1)} g(T_i, T_j) T_j & \text{para } i \in \{1,2,3\} \\ g(A(T_i), T_3) + T_i(f_3) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{(j+1)} g(T_i, T_j) f_j. & \end{cases}$$

Essas equações, somadas às equações de Gauss e Codazzi, implicam na nossa tese, pelo Corolário 4.1.2. □

Nota 4.2.2. *A curvatura do* Sol *pode ser facilmente computada uma vez que:*

$$2\langle Z, \overline{\nabla}_X Y\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle,$$

onde X, Y, Z são campos vetoriais invariantes à esquerda de Sol *(ver [17] para mais detalhes).*

Temos:

$$\overline{R}_{1212} = -1, \quad \overline{R}_{1313} = 1, \quad \overline{R}_{2323} = 1.$$

e os outros $\overline{R}_{ijkl} = 0$ ou dados pelas simetrias do tensor curvatura.

Capítulo 5

Grupo de Heisenberg-Lorentz

5.1 Uma estrutura lorentziana invariante à esquerda no grupo de Heisenberg

Apresentaremos aqui um teorema de imersão isométrica no grupo de Heisenberg Nil quando este é munido de uma métrica lorentziana invariante à esquerda que faz desse grupo um dos quatro modelos geométricos em 3 dimensões como precisamente descritos em [7]. Tal resultado foi obtido por F. Manfio e por mim e recentemente aceito para publicação (ver [15]).

Por Nil entendemos o grupo de Lie 3-dimensional formado pelas matrizes reais 3×3 triangulares superiores da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

munido da usual operação de multiplicação. Identificamos Nil com $\mathbb{R}^3$, de modo que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ corresponde à matriz (5.1). Desse modo, $\mathbb{R}^3$ fica munido da seguinte multiplicação:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Consideraremos em Nil a seguinte métrica lorentziana:

$$g = -\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (\mathrm{d}z - x\mathrm{d}y)^2, \tag{5.2}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ não zero fixado.

Nota 5.1.1. *Tal métrica é geodesicamente completa. Uma prova disso pode ser encontrada na Seção 4 de [20], onde todas as geodésicas são explicitamente descritas. De modo mais amplo, pode-se provar que toda métrica lorentziana invariante à esquerda em* Nil *é geodesicamente completa (veja [13]).*

Considere a seguinte base ortonormal na álgebra de Lie do grupo Nil:

$$E_0 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad E_1 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad E_2 = \lambda\frac{\partial}{\partial x},$$

para a qual temos que:

$$[E_2, E_0] = 0, \qquad [E_1, E_0] = 0, \qquad [E_1, E_2] = -\lambda E_0.$$

Se denotarmos por ∇ a conexão de Levi-Civita de Nil, a fórmula de Koszul facilmente nos mostra que:

$$\begin{array}{ccc}
\nabla_{E_0}E_0 = 0, & \nabla_{E_0}E_1 = -\frac{\lambda}{2}E_2, & \nabla_{E_0}E_2 = -\dfrac{\lambda}{2}E_1, \\
\nabla_{E_1}E_0 = -\dfrac{\lambda}{2}E_2, & \nabla_{E_1}E_1 = 0, & \nabla_{E_1}E_2 = -\dfrac{\lambda}{2}E_0, \\
\nabla_{E_2}E_0 = -\dfrac{\lambda}{2}E_1, & \nabla_{E_2}E_1 = \frac{\lambda}{2}E_0, & \nabla_{E_2}E_2 = 0.
\end{array}$$

Seja (e_0, e_1, e_2) a base canônica do espaço de Minkowski 3-dimensional $\mathbb{R}^{1,2}$ com e_2 o vetor de tipo tempo, i.e., aquele com $\langle e_2, e_2\rangle = -1$. Defina G como o grupo das matrizes ortogonais T no espaço de Minkowski de dimensão 3 com determinante igual a 1 e tais que $T(e_0) = e_0$, i.e., $G = SO(\mathbb{R}^{1,2}; e_0)$. Mais explicitamente:

$$G = \left\{ X \in \mathrm{SO}(2,1); X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},\ \text{com } T \in SO(1,1) \right\}.$$

Observe que $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pertence a $SO(1,1)$ se e somente se $c = b$, $d = a$ e $\det T = 1$.

No que se segue consideramos P como a única G-estrutura em Nil que contém $p_0 \in \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\mathrm{Nil})$ tal que $p_0(e_i) = E_i$, para $i = 0, 1, 2$.

5.1.1 Inner Torsion

Seja E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^k$. Seja g uma estrutura semi-riemanniana em E de índice r; denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ o produto interno de Minkowski padrão de índice r em $\mathbb{R}^k$. Fixe um vetor não nulo $e_0 \in \mathbb{R}^k$ e tome $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$ uma seção lisa de E com $g_x(\epsilon(x), \epsilon(x)) = \langle e_0, e_0\rangle_r$, para todo $x \in M$. Então:

$$P = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(E; e_0, \epsilon) = \bigcup_{x\in M} \big\{p \in \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(E_x) : p(e_0) = \epsilon(x)\big\}$$

é uma G-estrutura em E, onde G é o subgrupo $\mathrm{O}_r(k; e_0)$ de $\mathrm{O}_r(k)$ formado pelas isometrias lineares que fixam e_0. Seja $x \in M$ fixado. Então $G_x = \mathrm{O}(g_x; \epsilon(x))$ é o grupo das isometrias lineares de (E_x, g_x) que fixam $\epsilon(x)$ e $\mathfrak{g}_x$ é a álgebra de Lie dos endomorfismos lineares $\mathfrak{g}_x$-anti-simétricos T de E_x tais que $T\big(\epsilon(x)\big) = 0$. Como fizemos na Seção 3.3.1, identificamos o quociente $\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x$ com E_x via:

$$\mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x \ni T + \mathfrak{g}_x \longmapsto \big(\tfrac{1}{2}(T + T^*), \tfrac{1}{2}(T - T^*)\cdot\epsilon(x)\big) \in \mathrm{sym}(E_x) \oplus \epsilon(x)^\perp,$$

onde $\epsilon(x)^\perp$ denota o kernel de $g_x\big(\epsilon(x), \cdot\big)$, de modo que $\mathfrak{I}^P_x$ pode ser identificada com uma aplicação linear de T_xM em E_x. De maneira praticamente idêntica a feita na Seção 3.3.1 segue que:

$$\mathfrak{I}^P_x(v) = \Big(-\tfrac{1}{2}\nabla_v g, \nabla_v \epsilon + \tfrac{1}{2}(\nabla_v g)\big(\epsilon(x)\big)\Big),$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$. De modo que, em particular, $\mathfrak{I}^P = 0$ se e somente se ∇ é compatível com g e ϵ é paralelo.

5.1.2 Homogeneidade Infinitesimal

Dos cálculos apresentados na Subseção 5.1.1, já que ∇ é, de fato, compatível com g, concluímos que $\mathfrak{I}^P$ pode ser identificada com ∇E_0. Então, o Lema 2.6.2 implica que $(\mathrm{Nil}, \nabla, P)$ é infinitesimalmente homogênea se e somente se existe uma função trilinear $R_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e uma aplicação linear $L_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que para todo $x \in \mathrm{Nil}$ e toda isometria linear $p : \mathbb{R}^3 \to T_x\mathrm{Nil}$ com $p(e_1) = E_0(x)$, as seguintes condições são satisfeitas:

(a) R_0 é p-relacionado com R_x;

(b) $p \circ L_0 = (\nabla E_0)_x \circ p$.

Provaremos a validade de (a) na Proposição seguinte, mas, antes demonstremos o seguinte Lema:

Lema 5.1.2. *Denotemos a métrica g de* Nil *por* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Sejam* $X, Y, Z \in \mathbf{\Gamma}(T\mathrm{Nil})$. *Se para* $V \in \mathbf{\Gamma}(T\mathrm{Nil})$, *escrevermos* $V = \tilde{V} + vE_0$, *onde* $v = \langle V, E_0 \rangle$, *então teremos que:*

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \frac{3\lambda^2}{4} \left(R_0(X, Y)Z + R_1(E_0; X, Y)Z \right)$$

onde

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$$

e

$$\begin{aligned} R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V \\ - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y. \end{aligned}$$

Demonstração. Um cálculo simples nos mostra que:

$$R(E_1, E_2)E_1 = \frac{3\lambda^2}{4} E_2$$

e

$$R(E_1, E_2)E_2 = \frac{3\lambda^2}{4} E_1.$$

Seja $X = \sum_{i=0}^{2} x_i E_i$, $Y = \sum_{i=0}^{2} y_i E_i$ e $Z = \sum_{i=0}^{2} z_i E_i$. Observamos que:

$$\begin{aligned} R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= x_1 y_2 z_1 R(E_1, E_2)E_1 + x_1 y_2 z_2 R(E_1, E_2)E_2 \\ &\quad + x_2 y_1 z_1 R(E_2, E_1)E_1 + x_2 y_1 z_2 R(E_2, E_1)E_2 \\ &= \frac{3\lambda^2}{4} \left(x_1 y_2 z_1 E_2 + x_1 y_2 z_2 E_1 - x_2 y_1 z_1 E_2 - x_2 y_1 z_2 E_1 \right). \end{aligned}$$

Então, para $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = -1$, temos:

$$\begin{aligned}
R_0(X,Y)Z &= \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X \\
&= \langle\sum_{i=0}^{2} x_iE_i, \sum_{i=0}^{2} z_iE_i\rangle Y - \langle\sum_{i=0}^{2} y_iE_i, \sum_{i=0}^{2} z_iE_i\rangle X \\
&= \sum_{i=0}^{2}\epsilon_i x_i z_i Y - \sum_{i=0}^{2}\epsilon_i y_i z_i X \\
&= \sum_{i=0}^{2}\epsilon_i \left(x_iz_iy_0E_0 + x_iz_iy_1E_1 + x_iz_iy_2E_2\right) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{2}\epsilon_i \left(y_iz_ix_0E_0 + y_iz_ix_1E_1 + y_iz_ix_2E_2\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{2}\epsilon_i(y_jx_iz_i - x_jy_iz_i)E_j = \\
&= \frac{4}{3\lambda^2}R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} + \left(y_0\sum_{i=0}^{2}\epsilon_i x_i z_i - x_0\sum_{i=0}^{2}\epsilon_i y_i z_i\right)E_0 \\
&\quad +x_0z_0(y_1E_1 + y_2E_2) - y_0z_0(x_1E_1 + x_2E_2) \\
&= \frac{4}{3\lambda^2}R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} + \left(y_0\langle X,Z\rangle - x_0\langle Y,Z\rangle\right)E_0 + x_0z_0Y - y_0z_0X \\
&= \frac{4}{3\lambda^2}R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} - R_1(E_0;X,Y)Z.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.3. *Utilizando a mesma notação do Lema 5.1.2, temos que, para todos $X,Y,Z,W \in \mathbf{\Gamma}(T\mathrm{Nil})$, vale a seguinte igualdade:*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \lambda^2\left(\frac{3}{4}\langle R_0(X,Y)Z,W\rangle + \langle R_1(E_0;X,Y)Z,W\rangle\right).$$

Demonstração. Antes de mais nada, definindo:

$$\langle R(X\wedge Y), Z\wedge W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle,$$

observa-se que a matriz de R na base $(E_1\wedge E_2, E_2\wedge E_0, E_0\wedge E_1)$ é diagonal. De fato:

$$\begin{aligned}
R(E_0,E_1)E_2 &= \nabla_{E_1}\nabla_{E_0}E_2 - \nabla_{E_0}\nabla_{E_1}E_2 + \nabla_{[E_0,E_1]}E_2 \\
&= \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_1}E_1 - \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_0}E_0 + \nabla_0 E_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(E_2,E_0)E_1 &= \nabla_{E_0}\nabla_{E_2}E_1 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_0}E_1 + \nabla_{[E_2,E_0]}E_1 \\
&= \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_0}E_0 - \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_2}E_2 + \nabla_0 E_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_0 &= \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_0 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_0 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_0 \\
&= \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_2}E_2 - \frac{\lambda}{2}\nabla_{E_1}E_1 + \lambda\nabla_{E_0}E_0 = 0.
\end{aligned}
$$

No que se segue, para $V \in \mathbf{\Gamma}(T\mathrm{Nil})$, escreveremos $V = \tilde{V} + vE_0$, onde $v = \langle V, E_0\rangle$. Observe que:

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_0)E_0 &= \nabla_{E_0}\nabla_{E_1}E_0 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_0}E_0 + \nabla_{[E_1,E_0]}E_0 \\
&= \nabla_{E_0}\nabla_{E_1}E_0 = \frac{\lambda^2}{4}E_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_2,E_0)E_0 &= \nabla_{E_0}\nabla_{E_2}E_0 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_0}E_0 + \nabla_{[E_2,E_0]}E_0 \\
&= \nabla_{E_0}\nabla_{E_2}E_0 = \frac{\lambda^2}{4}E_2
\end{aligned}
$$

e assim:

$$
R(\tilde{V},E_0)E_0 = \frac{\lambda^2}{4}\left(\langle\tilde{V},E_1\rangle E_1 - \langle\tilde{V},E_2\rangle E_2\right) = \frac{\lambda^2}{4}\tilde{V}.
$$

Decompondo X, Y, Z, W como fizemos com V nos parágrafos anteriores e usando a multilinearidade do tensor curvatura, obtemos uma soma com 16 termos. Os termos onde E_0 aparece três ou quatro vezes, ou duas nas posições $1,2$ ou $3,4$ se anulam por anti-simetria. Os termos onde E_0 aparece uma única vez também se anulam uma vez que a matriz de R na base $(E_1\wedge E_2, E_2\wedge E_0, E_0\wedge E_1)$ é diagonal. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{W}\rangle \\
&\quad +yw\langle R(\tilde{X},E_0)\tilde{Z},E_0\rangle + yz\langle R(\tilde{X},E_0)E_0,\tilde{W}\rangle \\
&\quad +xw\langle R(E_0,\tilde{Y})\tilde{Z},E_0\rangle + xz\langle R(E_0,\tilde{Y})E_0,\tilde{W}\rangle \\
&= \langle R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{W}\rangle \\
&\quad +\frac{\lambda^2}{4}\left(-yw\langle\tilde{X},\tilde{Z}\rangle + yz\langle\tilde{X},\tilde{W}\rangle + xw\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle - xz\langle\tilde{Y},\tilde{W}\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Observe agora que:

$$\begin{aligned}\langle R_1(E_0;X,Y)Z,W\rangle &= -yw\langle X,Z\rangle + yz\langle X,W\rangle + xw\langle Y,Z\rangle - xz\langle Y,W\rangle \\ &= -yw(\langle \tilde{X},\tilde{Z}\rangle + xz) + yz(\langle \tilde{X},\tilde{W}\rangle + xw) \\ &\quad +xw(\langle \tilde{Y},\tilde{Z}\rangle + yz) - xz(\langle \tilde{Y},\tilde{W}\rangle + yw) \\ &= -yw\langle \tilde{X},\tilde{Z}\rangle + yz\langle \tilde{X},\tilde{W}\rangle + xw\langle \tilde{Y},\tilde{Z}\rangle - xz\langle \tilde{Y},\tilde{W}\rangle.\end{aligned}$$

Usando o Lema 5.1.2 concluímos que:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \frac{3\lambda^2}{4}\Big(\langle R_0(X,Y)Z + R_1(E_0;X,Y)Z,\tilde{W}\rangle\Big) \\ &\quad +\frac{\lambda^2}{4}\langle R_1(E_0;X,Y)Z,W\rangle.\end{aligned}$$

Um cálculo simples nos mostra que:

$$\langle R_0(X,Y)Z + R_1(E_0;X,Y)Z,E_0\rangle = 0$$

e, então, temos a validade da tese proposta. $\square$

Para provarmos (b) tome $L_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função linear para a qual (b) é verdade se fizermos $p = p_0$, i.e., tome L_0 tal que:

$$\begin{aligned}L_0 : \qquad & e_0 \longmapsto 0 \\ & e_1 \longmapsto -\frac{\lambda}{2}e_2 \\ & e_2 \longmapsto -\frac{\lambda}{2}e_1\end{aligned}$$

Observe, agora, que $p \in P$ se e somente se p é tal que:

$$\begin{aligned}p : \qquad & e_0 \longmapsto X_0 = E_0 \\ & e_1 \longmapsto X_1 = aE_1 + bE_2 \\ & e_2 \longmapsto X_2 = bE_1 + aE_2\end{aligned}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2 - b^2 = 1$. Então, vemos que:

$$(\nabla E_0) \circ p(e_0) = \nabla_{E_0} E_0 = 0 = p \circ L_0(e_0),$$

$$\begin{aligned}(\nabla E_0) \circ p(e_1) &= \nabla_{X_1} E_0 = a\nabla_{E_1} E_0 + b\nabla_{E_2} E_0 \\ &= -\frac{\lambda}{2}(aE_2 + bE_1) = -\frac{\lambda}{2}X_2 = p \circ L_0(e_1)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla E_0) \circ p(e_2) &= \nabla_{X_2} E_0 = a\nabla_{E_2} E_0 + b\nabla_{E_1} E_0 \\ &= -\frac{\lambda}{2}(aE_1 + bE_2) = -\frac{\lambda}{2} X_1 = p \circ L_0(e_2).\end{aligned}$$

A linearidade conclui a demonstração de (b).

Nota 5.1.4. *É interessante notar que, para provar a existência de um endomorfismo $L_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz (b), consideramos como grupo estrutural de P um subgrupo do grupo ortogonal* especial *ao invés de um subgrupo do grupo ortogonal inteiro. Se escolhêssemos como grupo estrutural de P um subgrupo do grupo ortogonal inteiro haveria nos cálculos acima uma incoerência de sinais que impediria a definição de uma aplicação L_0 com as propriedades desejadas.*

5.1.3 Homogeneidade Global

Como $(\mathrm{Nil}, \nabla, P)$ é infinitesimalmente homogêneo e Nil é conexo, simplesmente conexo e geodesicamente completo (Nota 5.1.1), a Proposição 2.6.4 implica que $(\mathrm{Nil}, \nabla, P)$ é, de fato, globalmente homogêneo.

5.2 Um Teorema de Imersão Isométrica no Grupo de Heisenberg Lorentziano

Seja $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade semi-riemanniana com $\dim(M) = 2$ e conexão de Levi-Civita ∇. Suponha que nos são dados um campo liso S de operadores simétricos $S_x : T_xM \to T_xM$, T um campo vetorial em M e ν uma função lisa M tal que $||T||^2 + \nu^2 = 1$. Faça $\epsilon = 1$ se g tem índice 1 e $\epsilon = -1$ se tal índice é 0.

No que se segue, considere um fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus \mathbb{R}$ em M munido de uma estrutura lorentziana $\widehat{g}$ dada pela soma ortonormal de g e g^E (com $g^E = \epsilon \cdot g^{\mathbb{R}}$, onde por $g^{\mathbb{R}}$ entendemos a métrica canônica Euclideana de $\mathbb{R}$).

Denotaremos por $\widehat{\nabla}$ a conexão em $\widehat{E}$ compatível com $\widehat{g}$ e cujas componentes são ∇, $\nabla^{\mathbb{R}}$ e S, i.e., para V e W campos vetoriais em M e a função real em M, temos que

$$\widehat{\nabla}_V(W, a) = (\nabla_V W - \epsilon a S(V), g(S(V), W) + V(a)).$$

Definição 5.2.1. *Dizemos que* $(M, g, S, \xi = (T, \nu))$ *satisfaz às* equações de compatibilidade *para* $\overline{M} = \mathrm{Nil}$ *se as seguintes condições se verificam:*

(a) Para qualquer $p_0 : \mathbb{R}^{1,2} \to \widehat{E}$ *isometria linear com* $p_0(e_0) = \xi(x)$*, temos que as seguintes equações são satisfeitas:*

$$p_0 \circ L_0 \circ p_0^{-1}|_{T_xM} = (\widehat{\nabla}\xi)_x$$

onde $L_0 : \mathbb{R}^{1,2} \to \mathbb{R}^{1,2}$ *é a aplicação linear tal que:*

$$\begin{aligned} L_0 : \quad & e_0 \longmapsto 0 \\ & e_1 \longmapsto -\frac{\lambda}{2} e_2 \\ & e_2 \longmapsto -\frac{\lambda}{2} e_1; \end{aligned}$$

(b) vale a equação de Gauss:

$$K(x) = \lambda^2 \left(\nu(x)^2 - \frac{1}{4} \right) - \epsilon \det S_x$$

onde denotamos por K *a curvatura seccional de* M*;*

(c) vale a equação de Codazzi:

$$\epsilon(\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]) = \lambda^2 \nu (g(X, T)Y - g(Y, T)X)$$

para todos $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$*.*

Teorema 5.2.2. *Suponha dado* $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, S, \xi = (T, \nu))$ *satisfazendo as equações de compatibilidade para* $\overline{M}$*. Então, para todo* $x_0 \in M$ *e todo* $y_0 \in \overline{M}$*, existe* $f : U \to \overline{M}$ *(onde* U *é um aberto de* x_0 *em* M*) imersão isométrica em* $\overline{M}$ *tal que* $f(x_0) = y_0$*, o operador forma com respeito a normal* N *associada a* f *é:*

$$\mathrm{d}f \circ S \circ \mathrm{d}f^{-1}$$

e tal que:

$$E_0 = \mathrm{d}f(T) + \nu N.$$

Além do mais, se M *é conexa e simplesmente-conexa, como* $\overline{M}$ *é geodesicamente completa (ver Nota 5.1.1), então existe uma única imersão isométrica global* f *de* M *em* $\overline{M}$ *com as propriedades acima.*

Demonstração. Como, provado na Seção 5.1, $(\mathrm{Nil}, \nabla, P)$ é infinitesimalmente homogênea e podemos aplicar o Teorema 2.8.4 de modo a obtermos uma imersão isométrica no espaço Heisenberg-Lorentz. Seja $\widehat{p}_0$ um referencial ortonormal em $\widehat{E}$ tal que $\widehat{p}_0(e_0) = \xi$. Seja $\widehat{P}$ a única G-estrutura que contém $\widehat{p}_0$ (com $G = SO(\mathbb{R}^{1,2}; e_0)$ como descrito anteriormente). A Hipótese (a) do Teorema 2.8.4 significa que para todo $x \in M$ e todo $p \in \widehat{P}_x$, temos:

$$p \circ L_0 \circ p^{-1}|_{T_xM} = (\widehat{\nabla}\xi)_x. \tag{5.3}$$

Uma vez que todo $p \in \widehat{P}$ pode ser escrito como $p_0 \circ g$, para algum $g \in G$ e com p_0 como definido em 5.2.1(a), e, já que L_0 comuta com elementos de G (visto por um cálculo direto), temos que a hipótese (a) do Teorema 2.8.4 é satisfeita se e somente se:

$$p_0 \circ L_0 \circ p_0^{-1}|_{T_xM} = (\widehat{\nabla}\xi)_x.$$

Para provarmos que a equação de Gauss vale para $((M,\langle\cdot,\cdot\rangle), S, \xi = (T, \nu))$, seja $u, v \in TM$ uma base ortonormal para T_xM. Como $\dim(M) = 2$ é suficiente provar que:

$$\begin{aligned}\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(u), \sigma(v)\big)\sigma(u), \sigma(v)\big] &= g_x(R_x(u, v)u, v) \\ &\quad + \epsilon(-g_x(Su, v)^2 + g_x(Su, u)g_x(Sv, v)),\end{aligned}$$

para toda $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\mathrm{Nil}$ isometria linear tal que $\sigma(\xi) = E_0$, onde denotamos por $\overline{R}$ e R as curvaturas de Nil e M respectivamente. Isso é:

$$\overline{K}_y(\sigma(T_xM)) = K(x) + \epsilon \det S_x,$$

para toda $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\mathrm{Nil}$ isometria linear tal que $\sigma(\xi) = E_0$, onde denotamos por $\overline{K}$ e K as curvaturas seccionais de Nil e M respectivamente. Observe, agora, que a Proposição 5.1.3 implica em:

$$\begin{aligned}\overline{K}(\sigma(T_xM)) = \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(u), \sigma(v)\big)\sigma(u), \sigma(v)\big] &= \\ = \lambda^2\Big(\frac{3}{4}\bar{g}_y\big[R_0\big(\sigma(u), \sigma(v)\big)\sigma(u), \sigma(v)\big] & \\ + \bar{g}_y\big[R_1\big(E_0; \sigma(u), \sigma(v)\big)\sigma(u), \sigma(v)\big]\Big).&\end{aligned}$$

Uma vez que σ é uma isometria, temos que:

$$g_y\big[R_0\big(\sigma(u), \sigma(v)\big)\sigma(u), \sigma(v)\big] = \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2 = 1$$

e

$$\begin{aligned}\bar{g}_y\big[R_1\big(E_0;\sigma(u),\sigma(v)\big)\sigma(u),\sigma(v)\big] &= \langle v,T\rangle\langle u,T\rangle\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle\langle u,T\rangle\langle v,T\rangle \\ &- \langle u,u\rangle\langle v,T\rangle\langle v,T\rangle - \langle u,T\rangle\langle u,T\rangle\langle v,v\rangle = \\ &= -(\langle v,T\rangle^2 + \langle u,T\rangle^2) = \nu(x)^2 - 1.\end{aligned}$$

Assim:

$$\overline{K}(\sigma(T_xM)) = \lambda^2\left(\nu(x)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

e a equação de Gauss se torna:

$$K(x) = \lambda^2\left(\nu(x)^2 - \frac{1}{4}\right) - \epsilon \det S_x.$$

Para obtermos a equação de Codazzi como descrita na Definição 5.2.1 observe que, com $\alpha^0 = \langle S\cdot,\cdot\rangle$, temos:

$$(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u) = \langle \nabla_v SW - S\nabla_v W, u\rangle$$

para $u,v,w \in T_xM$, com W uma extensão local de w. Simples cálculos nos levam a:

$$\bar{R}_y(\sigma(v),\sigma(w))\sigma(e) = \nu\left(\langle w,T\rangle v - \langle v,T\rangle w\right),$$

para todos $v,w \in T_xM$ e $e \in \{x\}\times\mathbb{R}$. Desse modo, a equação de Codazzi como apresentada no Teorema 2.8.4(c) se escreve:

$$\epsilon(\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y]) = \lambda^2\nu(\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X),$$

para todos $X,Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. Já que M tem codimensão 1, temos que a equação de Ricci é automaticamente satisfeita. Assim, usando o Teorema 2.8.4, a tese fica provada. □

5.3 Rigidez Isométrica

Suponha dados elementos como na Definição 2.8.3. Lembre-se que uma imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^1,S^1) para ∇_1^E, α^1, g^E dados é dita *G-congruente* à imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^2,S^2) com dados ∇_2^E, α^2, g^E se existe uma isometria que preserva G-estrutura $\sigma:\overline{M}\to\overline{M}$ tal que $f^2 = \sigma\circ f^1$ e $S^2 = \pm \mathrm{d}\sigma\circ S^1$.

Definição 5.3.1. *Dizemos que uma imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^1,S^1) com dados ∇_1^E, α^1, g^E é* G-rígida*, se qualquer outra imersão isométrica que preserva G-estrutura (f^2,S^2) para ∇_2^E, α^2, g^E dados é G-congruente a (f^1,S^1).*

O intuito desta seção é provarmos um resultado de rigidez de imersões isométricas de superfícies em Nil. Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Lema 5.3.2. *Se* $\operatorname{rank}(E) = 1$, *então existe uma única conexão* ∇^E *em* E *compatível com* g^E.

Demonstração. Sejam ∇^1 e ∇^2 conexões em E compatíveis com g^E. Para $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, considere a seguinte função:

$$D(X) : \mathbf{\Gamma}(E) \to \mathbf{\Gamma}(E)$$

definida por

$$D(X)\epsilon = \nabla^1_X \epsilon - \nabla^2_X \epsilon$$

para todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$. Obviamente $D(X)$ é $\mathrm{C}^\infty(M)$-linear. Além do mais, $D(X)$ é anti-simétrica. De fato, para $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbf{\Gamma}(E)$, temos:

$$\begin{aligned} g^E\big(D(X)\epsilon_1, \epsilon_2\big) &= g^E\big(\nabla^1_X\epsilon_1 - \nabla^2_X\epsilon_1, \epsilon_2\big) \\ &= Xg^E(\epsilon_1, \epsilon_2) - g^E(\epsilon_1, \nabla^1_X\epsilon_2) \\ &\quad -Xg^E(\epsilon_1, \epsilon_2) + g^E(\epsilon_1, \nabla^2_X\epsilon_2) \\ &= -g^E(\epsilon_1, D(X)\epsilon_2). \end{aligned}$$

Agora, como $\operatorname{rank}(E) = 1$, a anti-simetria de $D(X)$ implica que $D(X) = 0$, i.e., $\nabla^1_X\epsilon = \nabla^2_X\epsilon$, para todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E)$. Como X é arbitrário, segue que $\nabla^1 = \nabla^2$. □

Tendo o Lema 5.3.2 em mente, denotaremos (f, S) uma imersão isométrica que preserva G-estrutura com dados ∇^E, α, g^E por (α, f, S), uma vez que ∇^E e g^E são fixados (lembre-se que a conexão de M é, também, fixa). Além disso, $E = TM \times \mathbb{R}$ é o fibrado linear trivial sobre M, de modo que a derivada covariante de uma seção $\eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ é simplesmente $X(\eta)$, para todo $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$.

Seja Nil o espaço lorentziano de Heisenberg munido da métrica invariante à esquerda $\overline{g}$ dada por (5.2). Como descrito na demonstração do Teorema 5.2.2, seja $G = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3; e_0) \simeq \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$, e

$$\widehat{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}_+(\widehat{E}; e_0, (T, \nu))$$

a G-estrutura em $\widehat{E} = TM \oplus E$ cujos elementos levam o vetor e_0 em (T, ν) (onde $\{e_0, e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{1,2}$, T é um campo vetorial em M e ν uma função lisa em M tal que $||T||^2 + \nu^2 = 1$).

Considere a G-estrutura $\overline{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(T\mathrm{Nil})$ como definida no início da Seção 5.1.

Lema 5.3.3. *Sejam (α^1, f^1, S^1) e (α^2, f^2, S^2) imersões isométricas que preservam G-estrutura de M em $(\mathrm{Nil}, \overline{\nabla})$. Denote por A^i o operador forma associado a α^i. Se o conjunto $\{x \in M; \nu(x) \neq 0\}$ é denso em M, então $A^1 = A^2$.*

Demonstração. No que se segue denotaremos por ∇ a conexão de Levi-Civita de (M, g) e por $\widehat{\nabla}^i$ a conexão em $\widehat{E}$ compatível com $\widehat{g}$ cujas componentes são ∇, α^i e a conexão canônica de E, $i = 1, 2$. I.e., temos:

$$\widehat{\nabla}^i_X(Y, \eta) = \nabla_X Y - \eta A^i X + X(\eta) + \alpha^i(X, Y), \tag{5.4}$$

para todos $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, $\eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$ e $i = 1, 2$. Dado $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$, defina a aplicação:

$$D(X) : \mathbf{\Gamma}(\widehat{E}) \to \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$$

fazendo $D(X)\epsilon = \widehat{\nabla}^1_X \epsilon - \widehat{\nabla}^2_X \epsilon$, para todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(\widehat{E})$. Claramente $D(X)$ é $\mathrm{C}^\infty(M)$-linear. Além do mais, dado $Y \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ e $\eta \in \mathbf{\Gamma}(E)$, a equação (5.4) mostra que:

$$D(X)(Y, \eta) = \big(\eta(A^2 X - A^1 X), \alpha^1(X, Y) - \alpha^2(X, Y)\big). \tag{5.5}$$

Por outro lado, como ambos (α^1, f^1, S^1) e (α^2, f^2, S^2) são imersões isométricas que preservam G-estrutura no mesmo espaço ambiente, suas inner torsions são iguais. Então, temos:

$$\mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x(X) = \widehat{\nabla}^1_X(T, \nu) = \widehat{\nabla}^2_X(T, \nu), \tag{5.6}$$

para todos $x \in M$ e $X \in T_x M$ (relembre o dito na Subseção 5.1.1). Então, a equação (5.6) nos mostra que $D(X)(T, \nu) = 0$ e, portanto:

$$\nu(A^2 X - A^1 X) = 0,$$

para todo $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. Visto que o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\nu(x) \neq 0$ é denso em M, concluímos que $A^1 X = A^2 X$, para todo $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$. $\square$

Teorema 5.3.4. *Seja (α, f, S) uma imersão isométrica que preserva G-estrutura de M em* Nil *tal que o conjunto $\{x \in M; \nu(x) \neq 0\}$ é denso em M. Se M é conexo e orientável, então (α, f, S) é G-rígida.*

Demonstração. Tal fato é uma mera aplicação do Lema 2.8.7.
Seja $(\alpha^1, f^1, S^1) = (\alpha, f, S)$ e seja (α^2, f^2, S^2) uma outra imersão isométrica que preserva G-estrutura de M em Nil. Como o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\nu(x) \neq 0$ é denso em M, o Lema 5.3.3 implica que $A^1 = A^2$, onde A^i denota o operador forma associado a α^i, $i = 1, 2$. Pode-se checar facilmente que $\alpha^1 = \pm\alpha^2$. Assim, em qualquer caso, o Lema 2.8.7 implica na existência de uma isometria que preserva G-estrutura $\sigma : \overline{M} \to \overline{M}$ tal que $f^2 = \sigma \circ f^1$ e $S^2 = \pm \mathrm{d}\sigma \circ S^1$. Isso mostra que (α, f, S) é, de fato, G-rígida. $\square$

Capítulo 6

Imersões Isométricas em Variedades Sub-riemannianas

6.1 Variedades Sub-riemannianas de Contato

Inspirados em [10] e [12] apresentamos nessa seção construções básicas em variedades sub-Riemannianas de contato.

Chamamos de *variedade sub-riemanniana* uma tripla $(M, \mathcal{D}, g)$ formada por uma variedade diferenciável M, $\mathcal{D}$ uma distribuição lisa em M, e g uma estrutura riemanniana no fibrado vetorial $\mathcal{D}$, i.e., g é lisa e, para cada $x \in M$, g_x é um produto interno positivo definido em $\mathcal{D}_x$. Chamamos g de *métrica sub-riemanniana*. Uma seção lisa X de $\mathcal{D}$ é dita campo vetorial *horizontal*. Nesse caso escrevemos $X \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$. A *forma de Levi* de uma distribuição $\mathcal{D}$ num ponto $x \in M$ é a aplicação bilinear anti-simétrica:

$$\mathcal{L}_x : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \longrightarrow T_xM/\mathcal{D}_x$$

definida por $\mathcal{L}_x\big(X(x), Y(x)\big) = [X, Y](x) + \mathcal{D}_x$, onde $X, Y \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{D})$. Se θ é uma 1-forma lisa em M que aniquila $\mathcal{D}$ então:

$$\mathrm{d}\theta|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x} = -\bar{\theta}_x \circ \mathcal{L}_x, \tag{6.1}$$

onde $\bar{\theta}_x : T_xM/\mathcal{D}_x \to \mathbb{R}$ é obtido a partir de θ_x pela passagem ao quociente. A distribuição $\mathcal{D}$ é dita ser uma *distribuição de contato* se sua codimensão é 1 e se sua forma de Levi é não-degenerada, i.e., se $\mathcal{L}_x(v, w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{D}_x$ temos que $v = 0$. Nesse caso, a menos de uma identificação entre $T_xM/\mathcal{D}_x$ e $\mathbb{R}$, a forma de Levi é uma forma simplética em $\mathcal{D}_x$ e, portanto, $\dim(\mathcal{D}_x)$ é par. Observe que se θ é uma 1-forma lisa em M que aniquila

$\mathcal{D}$ então a forma de Levi $\mathcal{L}_x$ pode ser identificada pelo isomorfismo $\bar{\theta}_x : T_xM/\mathcal{D}_x \to \mathbb{R}$ com $\omega_x = -\mathrm{d}\theta_x|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$. Em particular, ω_x é uma forma simplética em $\mathcal{D}_x$ e, fazendo $\dim(M) = 2n+1$, a n-ésima potência exterior ω_x^n é uma forma de volume em $\mathcal{D}_x$.

Neste capítulo trataremos de imersões em variedades sub-riemannianas $(M, \mathcal{D}, g)$ para as quais $\mathcal{D}$ é uma distribuição de contato; as conhecidas *variedades sub-riemannianas de contato*. Uma 1-forma lisa θ em M será chamada de *forma característica* para $(M, \mathcal{D}, g)$ se $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\theta)$ e se:

$$\omega_x^n = c\mathcal{V}_x,$$

para todo $x \in M$ e alguma constante $c > 0$, onde $\omega_x = -\mathrm{d}\theta_x|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$, $\dim(M) = 2n+1$ e $\mathcal{V}_x$ é a forma de volume em $\mathcal{D}_x$ definida pelo produto interno g_x e pela orientação induzida de ω_x^n.

Assuma que o anulado $\mathcal{D}^{\mathrm{o}} \subset TM^*$ de $\mathcal{D}$ é orientável, de modo que podemos escrever $\mathcal{D}$ como o núcleo de uma 1-forma lisa globalmente definida. É fácil ver que, com essas hipóteses, existe uma 1-forma característica θ que é única a menos de multiplicação por uma constante não-nula. Assuma escolhida uma 1-forma característica θ. Então existe um único campo vetorial ξ em M tal que $\mathrm{d}\theta(\xi, \cdot) = 0$ e $\theta(\xi) = 1$; observe que, como $\theta(\xi) = 1$, a condição $\mathrm{d}\theta(\xi, \cdot) = 0$ é equivalente a pedir que a derivada de Lie $\mathbb{L}_\xi\theta$ se anule, i.e., que o fluxo de ξ preserve θ. Chamamos ξ de *campo característico* de $(M, \mathcal{D}, g)$ correspondente a θ. Usando o campo vetorial característico ξ, obtemos uma extensão de g a uma métrica riemanniana em M (também denotada por g), fazendo $g(\xi, \xi) = 1$ e $g(\xi, \mathcal{D}) = 0$.

Observe que, como $\omega_x = -\mathrm{d}\theta_x|_{\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x}$ é uma forma simplética em $\mathcal{D}_x$, existe uma única estrutura complexa J_x em $\mathcal{D}_x$ que é ortogonal (ou anti-simétrica) com respeito ao produto interno g_x e tal que $\omega_x(\cdot, J_x\cdot)$ é um produto interno positivo definido (explicitamente, seja H_x o operador g_x-anti-simétrico em $\mathcal{D}_x$ com $\omega_x = g_x(H_x\cdot, \cdot)$ e tome J_x a componente ortogonal na decomposição polar de H_x). Chamamos J de *estrutura complexa característica* de $(M, \mathcal{D}, g)$.

Nota 6.1.1. *Em geral, não é verdade que $g(J\cdot, \cdot)$ é um múltiplo escalar de $\mathrm{d}\theta|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$, no entanto isso vale nos modelos considerados na Seção 6.4; mais especificamente, em tais modelos vale a seguinte igualdade:*

$$\mathrm{d}\theta|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}} = -2g(J\cdot, \cdot). \tag{6.2}$$

Denote por $G \cong \mathrm{U}(n)$ o subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(2n+1)$ definido por:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : T \in \mathrm{U}(n) \right\}, \tag{6.3}$$

onde $\mathrm{U}(n)$ denota o grupo das isometrias lineares $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ que comutam com a estrutura complexa canônica $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definida por:

$$J(x, y) = (-y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

Assim temos uma G-estrutura P em $(M, \mathcal{D}, g)$ formada pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^{2n+1} \to T_xM$ tais que:

- p leva o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n+1}$ na métrica riemanniana de M;
- p leva o último vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ em $\xi(x)$;
- a restrição de p ao espaço gerado pelos primeiros $2n$ vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ leva a estrutura complexa (6.4) na estrutura complexa característica de $(M, \mathcal{D}, g)$.

Chamamos, então, P de *G-estrutura característica* de $(M, \mathcal{D}, g)$.

Temos aqui o seguinte teorema demostrado em [10, Teorema 1.1]:

Teorema 6.1.2. *Dada uma variedade sub-riemanniana de contato $(M, \mathcal{D}, g)$ com θ uma 1-forma característica e ξ o correspondente campo característico, existe uma única conexão ∇ em TM tal que:*

(a) $\mathcal{D}$ é ∇-paralela, i.e., a derivada covariante de um campo vetorial horizontal (ao longo de qualquer campo vetorial de M) é horizontal, de modo que ∇ se restringe a uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{D}$;

(b) o campo vetorial característico ξ e a métrica sub-riemanniana g são paralelos;

(c) $\mathrm{T}(X, Y) = \mathrm{d}\theta(X, Y)\xi$, para X, Y em $\mathcal{D}$, onde T denota a torção de ∇;

(d) o endomorfismo $\mathrm{T}(\xi, \cdot)$ de TM preserva $\mathcal{D}$ e sua restrição a $\mathcal{D}$ é g-simétrica.

A conexão dada pelo Teorema 6.1.2 é chamada de *conexão adaptada* da variedade sub-riemanniana $(M, \mathcal{D}, g)$ e é interessante notar que tal conexão não depende da escolha da 1-forma característica θ. O endomorfismo g-simétrico $\mathrm{T}(\xi, \cdot)|_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ é chamado de *sub-torção* de $(M, \mathcal{D}, g)$ e é aqui denotado por τ; observe que, como $\mathrm{T}(\xi, \xi) = 0$, o endomorfismo $\mathrm{T}(\xi, \cdot)$ de TM é simétrico em relação a métrica riemanniana g. Obviamente, como ξ, $\mathcal{D}$ e a métrica sub-riemanniana g são ∇-paralelos, também a métrica riemanniana g é ∇-paralela. Denotemos por ∇^{LC} a conexão de Levi-Civita da métrica riemanniana g. Pode-se provar (ver [10]) que:

$$\nabla_X Y = \pi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathrm{LC}}_X Y), \tag{6.5}$$

onde X, Y são campos vetoriais horizontais e $\pi^{\mathcal{D}}$ denota a projeção ortogonal em $\mathcal{D}$. Também vale que:

$$\nabla_\xi X = [\xi, X] + \tau(X),$$

onde X é um campo vetorial horizontal. O tensor τ é, então, relacionado à derivada de Lie de g pela fórmula:

$$g\big(\tau(X), Y\big) = \tfrac{1}{2}(\mathbb{L}_\xi g)(X, Y), \tag{6.6}$$

para X, Y em $\mathcal{D}$.

Nota 6.1.3. *Dada uma variedade sub-riemanniana de contato* $(M, \mathcal{D}, g)$ *com forma característica* θ *e campo característico* ξ*, também pode-se considerar uma extensão de* g *a uma* métrica lorentziana g^{L} *fazendo* $g^{\mathrm{L}}(\xi, \xi) = -1$ *e* $g^{\mathrm{L}}(\xi, \mathcal{D}) = 0$*. É interessante notar que o lado direito de* (6.5) *não se altera se* ∇^{LC} *é substituída pela conexão de Levi-Civita de* g^{L}*, como facilmente se observa utilizando a fórmula de Koszul. Além disso, ambos os lados de*(6.6) *não se alteram se* g *é trocada por* g^{L}*. De fato, observe que* $g - g^{\mathrm{L}} = 2\,\theta \otimes \theta$ *e, portanto, sua derivada de Lie ao longo de* ξ *é zero.*

6.2 Imersões Isométricas de Variedades Sub-Riemannianas

Sejam $(M, \mathcal{D}, g)$, $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ variedades sub-riemannianas. Por *imersão isométrica* de $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ em $(M, \mathcal{D}, g)$ entendemos uma aplicação diferenciável $f : M^0 \to M$ tal que:

$$\mathrm{d}f_x(\mathcal{D}^0_x) = \mathcal{D}_{f(x)} \cap \mathrm{d}f_x(T_x M^0) \tag{6.7}$$

e:

$$g_{f(x)}\big(\mathrm{d}f(x)\cdot v, \mathrm{d}f(x)\cdot w\big) = g^0_x(v,w),$$

para todos $x \in M^0$, $v, w \in \mathcal{D}^0_x$. Assuma agora que $(M, \mathcal{D}, g)$ é uma variedade sub-riemanniana de contato munida da conexão adaptada ∇ e com a extensão riemanniana de g discutida na Seção 6.1. Definimos o *fibrado normal* $f^\perp \to M^0$ fazendo:

$$f^\perp_x = \mathrm{d}f_x(T_xM^0)^\perp \subset T_{f(x)}M,$$

para todo $x \in M^0$, onde $\perp$ é tomado com respeito a extensão riemanniana de g. A *segunda forma fundamental*:

$$\alpha^f_x : T_xM^0 \times T_xM^0 \longrightarrow f^\perp_x, \quad x \in M^0,$$

para a imersão isométrica f é definida por:

$$\alpha^f(X,Y) = \mathrm{proj}_{f^\perp}\big[\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)\big],$$

onde X, Y são campos vetoriais lisos de M^0 e $\mathrm{proj}_{f^\perp}$ denota a projeção ortogonal em $f^\perp$. Como $\mathcal{D}$ é ∇-paralela e $\mathrm{d}f(\mathcal{D}^0) \subset \mathcal{D}$ segue que:

$$\alpha^f_x(\mathcal{D}^0_x \times \mathcal{D}^0_x) \subset \mathcal{D}_{f(x)} = \xi\big(f(x)\big)^\perp, \tag{6.8}$$

onde ξ denota o campo vetorial característico de $(M, \mathcal{D}, g)$.

Assuma que ambos $(M, \mathcal{D}, g)$ e $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ sejam variedades sub-riemannianas de contato e que a imersão isométrica $f : M^0 \to M$ satisfaz:

$$\mathrm{d}f_x\big(\xi^0(x)\big) = \xi\big(f(x)\big), \tag{6.9}$$

para todo $x \in M^0$, onde ξ^0 denota um campo vetorial característico de $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$. Nesse caso dizemos que f é uma *imersão isométrica de variedades sub-riemannianas de contato*. Segue, então, de (6.9) que f é uma imersão isométrica entre as variedades riemannianas obtidas ao considerarmos as extensões riemannianas de g^0 e g. O fibrado normal $f^\perp$ é simplesmente o fibrado normal da imersão isométrica riemanniana, no entanto observamos que a segunda forma fundamental α^f *não coincide* com a segunda forma fundamental da imersão isométrica riemanniana uma vez que sua definição usa a conexão adaptada de M, e não sua conexão de Levi-Civita.

Nota 6.2.1. *Como ξ é ∇-paralela, segue de* (6.9) *que* $\alpha^f(\cdot, \xi^0) = 0$.

Temos o seguinte:

Lema 6.2.2. *Se $f : M^0 \to M$ é uma imersão isométrica de contato então:*

(a) $f^*\theta = \theta^0$*, onde* θ^0 *e* θ *denotam as 1-formas características de* M^0 *e* M*, respectivamente;*

(b) a restrição da segunda forma fundamental α^f *a* $\mathcal{D}^0$ *é simétrica e, se a sub-torção* τ *de* M *se anula, então* α^f *é simétrica;*

(c) $\mathrm{d}f(\nabla^0_X Y) = \nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big)$*, para quaisquer campos vetoriais* X*,* Y *em* M^0*, onde* ∇^0 *e* ∇ *denotam as conexões adaptadas de* M^0 *e* M*, respectivamente;*

(d) $\mathrm{d}f\big(\tau^0(X)\big)$ *é a projeção ortogonal sobre* $\mathrm{d}f(TM^0)$ *de* $\tau\big(\mathrm{d}f(X)\big)$*, para qualquer* X *em* $\mathcal{D}^0$*, onde* τ^0 *e* τ *denotam, respectivamente, as sub-torções de* M^0 *e* M*.*

Demonstração. Segue de (6.7) que $\mathrm{Ker}(f^*\theta) = \mathcal{D}^0$ e de (6.9) temos que $(f^*\theta)(\xi^0) \equiv 1$, de modo que $f^*\theta = \theta^0$, o que prova (a). Se X, Y são campos vetoriais lisos de M^0 então:

$$\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big) - \nabla_Y\big(\mathrm{d}f(X)\big) = \mathrm{d}f\big([X,Y]\big) + \mathrm{T}\big(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\big),$$

onde T denota a torção de ∇; assim:

$$\alpha^f(X,Y) - \alpha^f(Y,X) = \mathrm{proj}_{f^\perp}\Big(\mathrm{T}\big(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\big)\Big) \tag{6.10}$$

e, se X, Y são seções de $\mathcal{D}^0$, $\mathrm{T}\big(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\big)$ é paralela a $\xi = \mathrm{d}f(\xi^0)$, de modo que o lado direito de (6.10) se anula. Quando $X = \xi^0$ e a sub-torção τ se anula então, novamente, o lado direito de (6.10) se anula. Isso demonstra (b). Para provarmos (c), seja ∇^* a conexão em TM^0 correspondente pelo isomorfismo de fibrados vetoriais $\mathrm{d}f : TM^0 \to \mathrm{d}f(TM^0)$ a conexão em $\mathrm{d}f(TM^0) \subset f^*(TM)$ obtida tomando-se a projeção ortogonal de $f^*\nabla$ sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$. É suficiente mostrar que ∇^* se iguala a ∇^0, i.e., que ∇^* satisfaz as condições que caracterizam a conexão adaptada (ver o Teorema 6.1.2). O fato de g ser paralela com respeito a ∇ e o fato de que $\mathrm{d}f : TM^0 \to \mathrm{d}f(TM^0)$ mapeia g^0 na restrição de g implica que g^0 é ∇^*-paralela. Também, como ξ é paralelo com respeito a ∇, a equação (6.9) implica que ξ^0 é ∇^*-paralelo (de modo que ambas $\mathcal{D}^0$ e a métrica sub-riemanniana g^0 são ∇^*-paralelas). Finalmente, calculamos o tensor torção T^* de ∇^* da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\big(\mathrm{T}^*(X,Y)\big) = \mathrm{proj}_f\big[\nabla_X\big(\mathrm{d}f(Y)\big) - \nabla_Y\big(\mathrm{d}f(X)\big) - \mathrm{d}f\big([X,Y]\big)\big]\\ = \mathrm{proj}_f\big[\mathrm{T}\big(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)\big)\big],\end{aligned}$$

onde X, Y são campos vetoriais em M^0 e proj_f denota a projeção ortogonal sobre $\mathrm{d}f(TM^0)$. Segue facilmente de (6.9) e de (a) que $\mathrm{T}^*(X,Y) = \mathrm{d}\theta^0(X,Y)\xi^0$ para X, Y em $\mathcal{D}^0$. Além disso, se identificamos $\mathcal{D}^0$ com $\mathrm{d}f(\mathcal{D}^0)$, a função $\mathrm{T}^*(\xi^0,\cdot)|_{\mathcal{D}^0}$ se identifica com a composição de $\mathrm{T}(\xi,\cdot)|_{\mathcal{D}^0} = \tau|_{\mathcal{D}^0}$ com a projeção ortogonal sobre $\mathcal{D}^0$. Isso mostra que $\mathrm{T}^*(\xi^0,\cdot)|_{\mathcal{D}^0}$ é um endomorfismo linear g^0-simétrico de $\mathcal{D}^0$ concluindo a demonstração de ambos (c) e (d). $\square$

Suponha dada uma imersão isométrica f de uma variedade sub-riemanniana $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ numa variedade sub-riemanniana de contato $(M, \mathcal{D}, g)$. Obtemos, então, a *conexão normal* $\nabla^\perp$ de f no fibrado normal $f^\perp \to M^0$ pela projeção ortogonal da conexão adaptada ∇.

Nota 6.2.3. *Observamos que a estrutura riemanniana em $f^\perp$ obtida pela restrição g é paralela em relação a conexão normal $\nabla^\perp$.*

6.3 $(\mathrm{U}(n) \times 1)$-estruturas - Inner Torsion

Seja $\pi : V \to M$ um fibrado vetorial de posto $2n+1$ sobre M. Defina:

$$G \doteq \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; T \in \mathrm{U}(n) \right\}.$$

Temos então:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; S \text{ é anti-simétrica e } S \circ J = J \circ S \right\}.$$

Seja P uma G-estrutura em V. Sejam g uma métrica riemanniana em V, ∇ uma conexão em V, $\xi : M \to V$ uma seção unitária do fibrado V e J uma estrutura quase complexa em $\xi^\perp$. Defina $\tilde{J} \in \mathrm{Lin}(V)$ de modo que $\tilde{J}|_{\xi^\perp} = J$ e $\tilde{J}(\xi) = 0$. Seja, então, $\rho : \frac{\mathfrak{gl}(V)}{\mathfrak{g}_V} \to V \oplus \mathrm{Lin}_s^2(V \times V, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Lin}(V)$ definida da seguinte forma:

$$\rho(T + \mathfrak{g}_V) = (T(\xi), -[g(T\cdot,\cdot) + g(\cdot, T\cdot)], [T, \tilde{J}]).$$

Afirmamos que ρ é bem definida e injetora.

Se $T \in \mathfrak{g}_v$ fica claro que $(T(\xi), -[g(T\cdot,\cdot) + g(\cdot, T\cdot)], [T, \tilde{J}]) = 0$, pois T é anti-simétrico, comuta com $\tilde{J}$ e $T(\xi) = 0$. Reciprocamente, se $\rho(T + \mathfrak{g}_V) = 0$ então T é anti-simétrico, comuta com $\tilde{J}$ e $T(\xi) = 0$, donde temos que $T \in \mathfrak{g}_v$. Como ρ é linear, da recíproca segue sua injetividade.

Sejam $s : U \subset M \in P$ uma seção de P, $\Gamma_x : T_xM \to \mathfrak{gl}(V)$ o tensor de Christoffel associado a s e $\mathfrak{I}_x^P : T_xM \to \frac{\mathfrak{gl}(V)}{\mathfrak{g}_V}$ a inner torsion de P em $x \in M$. Lembrando que $\mathfrak{I}_x^P(v) = (\Gamma_x(v) + \mathfrak{g}_V)$, quaisquer que sejam $x \in M$ e $v \in T_xM$, observa-se:

$$\rho \circ \mathfrak{I}_x^P(v) = (\Gamma_x(v, \xi), -[g(\Gamma_x(v)\cdot, \cdot) + g(\cdot, \Gamma_x(v)\cdot)], [\Gamma_x(v), \tilde{J}]).$$

Note que se ϵ é uma seção s-constante de V, i.e., $\epsilon(y) = (s(y) \circ s(x)^{-1}) \cdot \epsilon(x)$ (para todo $y \in U$), de $\nabla_v \epsilon = \mathfrak{d}_v^s \epsilon + \Gamma_x(v, \epsilon(x))$ segue que $\nabla_v \epsilon = \Gamma_x(v, \epsilon(x))$, para todos $x \in U$, $v \in T_xM$. Como ξ é uma seção s-constante de V temos que $\nabla_v \xi = \Gamma_x(v, \xi)$.

Por sua vez, para u_1 e u_2, seções s-constantes de V, temos que $g(u_1, u_2)$ é constante, e, então:

$$(\nabla_v g)(u_1, u_2) + g(\Gamma_x(v, u_1), u_2) + g(u_1, \Gamma_x(v, u_2)) = 0$$

Além disso, observamos que ϵ se é seção s-constante de V, $\tilde{J}(\epsilon)$ também o é. Desta maneira segue de $(\nabla_v \tilde{J}) = \tilde{J}_x(\nabla_v \epsilon) - \nabla_v(\tilde{J}(\epsilon))$ que $[\Gamma_x(v), \tilde{J}] = \nabla_v \tilde{J}$.

Assim, das observações acima, segue que:

$$\rho \circ \mathfrak{I}_x^P(v) = (\nabla_v \xi, \nabla_v g, \nabla_v \tilde{J}) \tag{6.11}$$

para todos $x \in M$ e $v \in T_xM$.

6.4 Modelos com curvatura holomorfa constante

No que se segue apresentamos três exemplos de variedades sub-riemannianas de contato $(M, \mathcal{D}, g)$ cuja sub-torção τ é nula e cuja *curvatura seccional holomorfa* é constante, i.e., existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$g\big(R_x\big(X, J(X)\big)X, J(X)\big) = -cg(X, X)^2, \tag{6.12}$$

para todo $x \in M$ e todo $X \in \mathcal{D}_x$, onde R denota o tensor curvatura da conexão adaptada, escolhido com a seguinte convenção de sinais:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Toda variedade sub-riemanniana de contato com sub-torção nula e curvatura seccional holomorfa constante é localmente equivalente (a menos de um escalar que multiplique a métrica) a um dos três exemplos abaixo apresentados ([10]).

6.4.1 O modelo de curvatura zero: grupo de Heisenberg sub-riemanniano

Denote por $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ definida por:

$$\omega\big((x, y), (x', y')\big) = \langle x, y'\rangle - \langle x', y\rangle,$$

para todos $x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto euclideano canônico de $\mathbb{R}^n$. O *n-ésimo grupo de Heisenberg* é o grupo de Lie:

$$H^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$$

munido do produto:

$$(z, t) \cdot (z', t') = \big(z + z', t + t' + \omega(z, z')\big), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n},\ t, t' \in \mathbb{R}.$$

Sua álgebra de Lie é:

$$\mathfrak{h}^n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$$

munida do colchete de Lie:

$$[(Z, T), (Z', T')] = 2\big(0, \omega(Z, Z')\big), \quad Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n},\ T, T' \in \mathbb{R}.$$

Consideramos a distribuição invariante à esquerda $\mathcal{D}$ em H^{2n+1}:

$$\mathcal{D}_{(0,0)} = \mathbb{R}^{2n} \times \{0\}$$

munida da métrica sub-riemanniana invariante à esquerda g tal que $g_{(0,0)}$ é o produto interno euclideano de $\mathcal{D}_{(0,0)} \cong \mathbb{R}^{2n}$. Escolhemos a 1-forma característica θ como a 1-forma invariante à esquerda em H^{2n+1} tal que:

$$\theta_{(0,0)}(Z, T) = T, \quad Z \in \mathbb{R}^{2n},\ T \in \mathbb{R}.$$

Assim, a 2-forma $\mathrm{d}\theta$ é a 2-forma invariante à esquerda em H^{2n+1} tal que:

$$\mathrm{d}\theta_{(0,0)}\big((Z, T), (Z', T')\big) = -2\,\omega(Z, Z'), \quad Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n},\ T, T' \in \mathbb{R},$$

e o campo vetorial característico é o campo invariante à esquerda ξ em H^{2n+1} tal que:

$$\xi_{(0,0)} = (0, 1).$$

A estrutura complexa característica de H^{2n+1} é o endomorfismo invariante à esquerda de $\mathcal{D}$ cujo valor em $(0, 0)$ pode ser identificado com a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ (lembre-se de (6.4)). A conexão adaptada ∇ de H^{2n+1} é simplesmente a conexão invariante à esquerda canônica, i.e., a conexão para a qual campos vetoriais invariantes à esquerda são paralelos. A sub-torção τ é zero e o tensor de curvatura R de ∇ é zero.

Mostremos que H^{2n+1} munido da conexão adaptada e da G-estrutura característica é *homogêneo*, i.e., tal que difeomorfismos afins que preservam a G-estrutura agem transitivamente em referenciais que pertencem a G-estrutura. Note que uma vez que translações à esquerda de H^{2n+1} são difeomorfismos afins que preservam G-estrutura, temos que mostrar apenas que difeomorfismos afins que preservam G-estrutura agem transitivamente em G-referenciais na identidade $(0,0)$. No entanto é fácil ver que o próprio grupo G (ver (6.3)) consiste de automorfismos de grupo de H^{2n+1}. Usando isso podemos facilmente mostrar que ele consiste de difeomorfismos afins que preservam G-estrutura. O grupo G obviamente age transitivamente em G-referenciais na identidade. Os tensores característicos de H^{2n+1} são dados por:

$$R_{\mathrm{o}} = 0, \quad \mathfrak{I}_{\mathrm{o}} = 0,$$
$$\mathrm{T}_{\mathrm{o}}\big((z,t),(z',t')\big) = -2\langle J(z), z'\rangle(0,1), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n},\ t, t' \in \mathbb{R},$$

onde J é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno euclideano de $\mathbb{R}^{2n}$.

6.4.2 O modelo com curvatura positiva: esfera sub-riemanniana

Denote por:
$$S^{2n+1} = \big\{z \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle z, z\rangle = 1\big\}$$
a esfera unitária de $\mathbb{R}^{2n+2}$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto euclideano canônico. Denote por $J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n+2}$ (ver (6.4)).

Consideramos a distribuição $\mathcal{D}$ em S^{2n+1} definida por:

$$\mathcal{D}_z = T_z S^{2n+1} \cap J(T_z S^{2n+1}) = \{z, J(z)\}^{\perp}, \quad z \in S^{2n+1},$$

onde o complemento ortogonal é tomado em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. A métrica sub-riemanniana g é dada pela restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathcal{D}$. A 1-forma característica θ em S^{2n+1} é escolhida de modo que:

$$\theta_z(v) = \langle J(z), v\rangle, \quad z \in S^{2n+1},\ v \in T_z S^{2n+1} = z^{\perp},$$

sua diferencial exterior é dada por:

$$\mathrm{d}\theta_z(v,w) = 2\langle J(v), w\rangle, \quad z \in S^{2n+1},\ v, w \in T_z S^{2n+1},$$

e o campo vetorial característico ξ é dado por:

$$\xi(z) = J(z), \quad z \in S^{2n+1}.$$

A estrutura complexa característica de S^{2n+1} é a restrição de $-J$. A extensão riemanniana da métrica sub-riemanniana g é apenas a restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Denotamos por ∇^{LC} sua conexão de Levi-Civita. A conexão adaptada ∇ pode ser escrita como:

$$\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}} + \mathfrak{t}$$

onde o tensor $\mathfrak{t}$ é dado por:

$$\mathfrak{t}(X,Y) = \langle J(X), Y\rangle\xi, \quad \mathfrak{t}(X,\xi) = \mathfrak{t}(\xi, X) = -J(X), \quad \mathfrak{t}(\xi,\xi) = 0,$$

para todos X, Y em $\mathcal{D}$. A sub-torção τ se anula. O tensor de curvatura R de ∇ é dado por:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - 2g\big(J(X),Y\big)J(Z) \\ + g\big(J(Y),Z\big)J(X) - g\big(J(X),Z\big)J(Y), \end{aligned}$$

para todos X, Y, Z em $\mathcal{D}$. Além disso:

$$R(\xi,\cdot) = 0, \quad R(\cdot,\cdot)\xi = 0.$$

Note que (6.12) vale para $c = 2$.

A esfera S^{2n+1} munida com a conexão adaptada e G-estrutura característica é homogênea uma vez que o grupo $\mathrm{U}(n+1)$ das isometrias lineares de $\mathbb{R}^{2n+2}$ que comutam com a estrutura complexa canônica age em S^{2n+1} por difeomorfismos afins que preservam G-estrutura e age transitivamente em referenciais que pertencem a G-estrutura. Os tensores característicos de S^{2n+1} são dados por:

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{o}}\big((z_1,t_1),(z_2,t_2)\big)(z_3,t_3) &= \langle z_2, z_3\rangle(z_1,0) - \langle z_1, z_3\rangle(z_2,0) \\ &- 2\langle J(z_1), z_2\rangle\big(J(z_3),0\big) + \langle J(z_2), z_3\rangle\big(J(z_1),0\big) \\ &- \langle J(z_1), z_3\rangle\big(J(z_2),0\big), \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{o}} = 0,$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{o}}\big((z,t),(z',t')\big) = -2\langle J(z), z'\rangle(0,1),$$

para todos $z, z_1, z_2, z_3, z', z'_1, z'_2, z'_3 \in \mathbb{R}^{2n}$, $t, t_1, t_2, t_3, t' \in \mathbb{R}$, onde J é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclideano de $\mathbb{R}^{2n}$.

6.4.3 O modelo de curvatura negativa: anti-de Sitter sub-riemanniano

Denotaremos aqui por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^{2n+2}$ definida por:

$$\langle z, z' \rangle = -z_1 z'_1 - z_{n+2} z'_{n+2} + \sum_{i=2}^{n+1} (z_i z'_i + z_{n+1+i}\, z'_{n+1+i}), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Seja:

$$C^{2n+1} = \big\{ z \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle z, z \rangle = -1 \big\}.$$

A restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a C^{2n+1} é uma métrica lorentziana e essa variedade lorentziana é conhecida como o *espaço-tempo anti-de Sitter*. Note que C^{2n+1} não é simplesmente-conexo já que é difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$.

Denote por $J : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{2n+2}$ a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n+2}$ definida como em (6.4). Note que J é simultaneamente anti-simétrico e ortogonal em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideramos a distribuição $\mathcal{D}$ em C^{2n+1} definida por:

$$\mathcal{D}_z = T_z C^{2n+1} \cap J(T_z C^{2n+1}) = \{z, J(z)\}^{\perp}, \quad z \in C^{2n+1},$$

onde o complemento ortogonal é tomado em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A métrica sub-riemanniana g é dada pela restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathcal{D}$. Note que como, para $z \in C^{2n+1}$, o espaço gerado por z e $J(z)$ é negativo para $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\{z, J(z)\}^{\perp}$ é positiva definida.

A 1-forma característica θ em C^{2n+1} é escolhida de modo que:

$$\theta_z(v) = \langle J(z), v \rangle, \quad z \in C^{2n+1},\ v \in T_z C^{2n+1} = z^{\perp},$$

sua diferencial exterior é dada por:

$$\mathrm{d}\theta_z(v, w) = 2 \langle J(v), w \rangle, \quad z \in C^{2n+1},\ v, w \in T_z C^{2n+1},$$

e o campo vetorial característico ξ é dado por:

$$\xi(z) = -J(z), \quad z \in C^{2n+1}.$$

A estrutura complexa característica de C^{2n+1} é igual a restrição de $-J$. A extensão *lorentziana* da métrica sub-riemanniana g (ver Nota 6.1.3) é simplesmente a restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Denotamos por ∇^{LC} a conexão de Levi-Civita da extensão lorentziana. A conexão adaptada ∇ pode ser escrita como:

$$\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}} + \mathfrak{t}$$

onde o tensor $\mathfrak{t}$ é dado por:

$$\mathfrak{t}(X,Y) = \langle J(X), Y\rangle\xi, \quad \mathfrak{t}(X,\xi) = \mathfrak{t}(\xi, X) = J(X), \quad \mathfrak{t}(\xi,\xi) = 0,$$

para todos X, Y em $\mathcal{D}$. A sub-torção τ se anula. O tensor de curvatura R de ∇ é dado por:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + 2g\big(J(X),Y\big)J(Z) \\ - g\big(J(Y),Z\big)J(X) + g\big(J(X),Z\big)J(Y), \end{aligned}$$

para todos X, Y, Z em $\mathcal{D}$. Além disso:

$$R(\xi,\cdot) = 0, \quad R(\cdot,\cdot)\xi = 0.$$

Observe que (6.12) vale para $c = -2$.

O espaço C^{2n+1} munido da conexão adaptada e da G-estrutura característica é homogêneo já que o grupo $\mathrm{U}(n,1)$ das isometrias lineares de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que comutam com a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n+2}$ age em C^{2n+1} por difeomorfismos afins que preservam G-estrutura e age transitivamente em referenciais que pertencem a G-estrutura. Os tensores característicos de C^{2n+1} são dados por:

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{o}}\big((z_1,t_1),(z_2,t_2)\big)(z_3,t_3) = \langle z_1,z_3\rangle(z_2,0) - \langle z_2,z_3\rangle(z_1,0) \\ + 2\langle J(z_1),z_2\rangle\big(J(z_3),0\big) - \langle J(z_2),z_3\rangle\big(J(z_1),0\big) \\ + \langle J(z_1),z_3\rangle\big(J(z_2),0\big), \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{o}} = 0,$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{o}}\big((z,t),(z',t')\big) = -2\langle J(z),z'\rangle(0,1),$$

para todos $z, z_1, z_2, z_3, z', z_1', z_2', z_3' \in \mathbb{R}^{2n}$, $t, t_1, t_2, t_3, t' \in \mathbb{R}$, onde J é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno euclideano de $\mathbb{R}^{2n}$.

6.5 Imersão Isométrica de Variedades de Contato nos Modelos Curvatura Holomorfa Constante

Descreveremos nesta seção o problema de imersão isométrica de variedades sub-riemannianas de contato em variedades sub-riemannianas de contato com sub-torção nula e com curvatura holomorfa constante com segunda forma fundamental, conexão normal, campo vetorial característico e estrutura complexa característica previamente fixados.

Usaremos a notação Q_c^{2n+1} quando quisermos, coletivamente, nos referir aos três modelos de variedades sub-riemannianas de contato com sub-torção nula e curvatura holomorfa constante como apresentados na Seção 6.4. Definimos:

$$Q_0^{2n+1} = H^{2n+1}, \quad Q_1^{2n+1} = S^{2n+1}, \quad Q_{-1}^{2n+1} = C^{2n+1}.$$

Denotamos por ξ o campo vetorial característico de Q_c^{2n+1}, por ∇ a conexão adaptada de Q_c^{2n+1} e por J a estrutura complexa característica de Q_c^{2n+1}.

Assuma dados os seguintes objetos:

1. uma variedade sub-riemanniana de contato $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ de dimensão $(2k+1)$, com campo vetorial característico ξ^0, conexão adaptada ∇^0 e sub-torção nula ($k \le n$);

2. um campo vetorial $E \to M^0$ sobre M^0 de posto $2(n-k)$;

3. uma estrutura riemanniana g^E em E;

4. uma conexão ∇^E em E para a qual g^E é paralela;

5. um tensor liso α^0 tal que, para todo $x \in M^0$, $\alpha^0_x : T_xM^0 \times T_xM^0 \to E_x$ é uma aplicação bilinear simétrica cujo núcleo contém $\xi^0(x)$;

6. um endomorfismo liso $\widehat{J}$ do fibrado vetorial $\mathcal{D}^0 \oplus E$ tal que, para todo $x \in M^0$, $\widehat{J}_x$ é uma estrutura complexa em $\mathcal{D}^0_x \oplus E_x$ ortogonal com respeito a $g^0_x \oplus g^E_x$.

Uma *solução para o problema de imersão isométrica sub-Riemann/sub-Riemann* em Q_c^{2n+1} para os objetos acima é um par (f, L), onde $f : M^0 \to Q_c^{2n+1}$ é uma imersão isométrica de variedades sub-riemannianas de contato, $L : E \to f^\perp$ é uma isometria de fibrados vetoriais e onde as seguintes condições são satisfeitas:

- L leva ∇^E em $\nabla^\perp$;
- $L_x \circ \alpha^0_x = \alpha^f_x$, para todo $x \in M^0$;
- a restrição de $\mathrm{d}f_x \oplus L_x : T_xM^0 \oplus E_x \to T_{f(x)}Q^{2n+1}_c$ a $\mathcal{D}^0_x \oplus E_x$ (cuja imagem é automaticamente $\mathcal{D}_{f(x)}$) leva $\widehat{J}_x$ em $J_{f(x)}$.

Note que as hipóteses de que $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$ tem sub-torção nula, que g^E é ∇^E-paralela e a hipótese de que α^0 é simétrica são necessárias à existência de solução para o problema de imersão isométrica sub-Riemann/sub-Riemann (ver parte (d) do Lema 6.2.2, Nota 6.2.3 e parte (b) do Lema 6.2.2).

Denote por θ^0 a 1-forma característica de $(M^0, \mathcal{D}^0, g^0)$; segue da parte (a) do Lema 6.2.2 que se (f, L) é uma solução para o problema de imersão isométrica sub-Riemann/sub-Riemann então $f^*\theta = \theta^0$ e $f^*\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta^0$. Como $\mathrm{d}f_x \oplus L_x : T_xM^0 \oplus E_x \to T_{f(x)}Q^{2n+1}_c$ leva $g^0_x \oplus g^E_x$ em $g_{f(x)}$ e $\widehat{J}_x$ em $J_{f(x)}$, segue de (6.2) que:

$$\mathrm{d}\theta^0_x|_{\mathcal{D}^0_x \times \mathcal{D}^0_x} = -2(g^0_x \oplus g^E_x)(\widehat{J}_x \cdot, \cdot)|_{\mathcal{D}^0_x \times \mathcal{D}^0_x}, \tag{6.13}$$

para todo $x \in M$. Denotando por H^0o endomorfismo linear anti-simétrico de $\mathcal{D}^0$ definido por:

$$-\mathrm{d}\theta^0|_{\mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}^0} = g^0(H^0 \cdot, \cdot)$$

então, segue de (6.13) que $\widehat{J} : \mathcal{D}^0 \oplus E \to \mathcal{D}^0 \oplus E$ pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\widehat{J} \cong \begin{pmatrix} \frac{1}{2}H^0 & -J_1^t \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

onde $J_1 : \mathcal{D}^0 \to E$ é um morfismo de fibrado vetorial, $J_1^t : E \to \mathcal{D}^0$ denota sua transposta e $J_2 : E \to E$ é um morfismo anti-simétrico de fibrado vetorial.

6.5.1 Existência de Solução para o Problema de Imersão Isométrica

Teorema 6.5.1. *Assuma dados os objetos* (1)—(6) *para o problema de imersão isométrica sub-Riemann/sub-Riemann com $\widehat{J}$ decomposta como em* (6.14). *Assuma que M^0 é simplesmente-conexa. Então existe uma solução $f : M^0 \to Q^{2n+1}_c$, $L : E \to f^\perp$, para o problema de imersão isométrica* *sub-Riemann/sub-Riemann se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} g^0_x\big(R^0_x(z_1,z_2)z_3,z_4\big) = {} & g^E_x\big(\alpha^0_x(z_2,z_3),\alpha^0_x(z_1,z_4)\big) \\ & - g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1,z_3),\alpha^0_x(z_2,z_4)\big) \\ & + c\big[g^0_x(z_2,z_3)g^0_x(z_1,z_4) - g^0_x(z_1,z_3)g^0_x(z_2,z_4) \\ & \quad - \tfrac{1}{2}\, g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_2\big)g^0_x\big(H^0_x(z_3),z_4\big) \\ & \quad + \tfrac{1}{4}\, g^0_x\big(H^0_x(z_2),z_3\big)g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_4\big) \\ & \quad - \tfrac{1}{4}\, g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_3\big)g^0_x\big(H^0_x(z_2),z_4\big)\big], \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$R^0_x\big(\xi^0(x),z_1\big)z_2 = 0, \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned} (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(z_1,z_2,z_3) & - (\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(z_2,z_1,z_3) \\ & = c\big[-g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_2\big)J_1(z_3) \\ & \quad + \tfrac{1}{2}\, g^0_x\big(H^0_x(z_2),z_3\big)J_1(z_1) \\ & \quad - \tfrac{1}{2}\, g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_3\big)J_1(z_2)\big], \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x\big(\xi^0(x),z_1,z_2\big) = 0, \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} g^E_x\big(R^E_x(z_1,z_2)\epsilon,\epsilon'\big) = {} & g^0_x\big(A^0_x(z_2,\epsilon),A^0_x(z_1,\epsilon')\big) \\ & - g^0_x\big(A^0_x(z_1,\epsilon),A^0_x(z_2,\epsilon')\big) \\ & + c\big[-g^0_x\big(H^0_x(z_1),z_2\big)g^E_x\big(J_2(\epsilon),\epsilon'\big) \\ & \quad + g^E_x\big(J_1(z_2),\epsilon\big)g^E_x\big(J_1(z_1),\epsilon'\big) \\ & \quad - g^E_x\big(J_1(z_1),\epsilon\big)g^E_x\big(J_1(z_2),\epsilon'\big)\big], \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$R^E_x\big(\xi^0(x),z_1\big)\epsilon = 0, \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\, g^0_x\big((\nabla^0 H^0)_x(z_1,z_2),z_3\big) \\ & \quad = g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1,z_3),J_1(z_2)\big) - g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1,z_2),J_1(z_3)\big), \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$(\nabla^0 H^0)_x\big(\xi^0(x),z_1\big) = 0, \tag{6.22}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha^0_x\big(z_1,H^0_x(z_2)\big) + (\nabla^{\diamond}J_1)(z_1,z_2) = J_2\big(\alpha^0_x(z_1,z_2)\big); \tag{6.23}$$

$$(\nabla^{\diamond}J_1)\big(\xi^0(x),z_1\big) = 0, \tag{6.24}$$

$$g^E_x\big((\nabla^E J_2)(z_1,\epsilon),\epsilon'\big) = g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1,J^t_1(\epsilon)),\epsilon'\big) - g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1,J^t_1(\epsilon')),\epsilon\big), \tag{6.25}$$

$$(\nabla^E J_2)\big(\xi^0(x),\epsilon\big) = 0, \tag{6.26}$$

para todos $x \in M^0$, $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{D}^0_x$, $\epsilon, \epsilon' \in E_x$, onde R^0 denota o tensor curvatura de ∇^0, R^E denota o tensor curvatura de ∇^E, $A^0_x : T_xM^0 \times E_x \to T_xM^0$ denota a aplicação bilinear definida por:

$$g^E_x\big(\alpha^0_x(z_1, z_2), \epsilon\big) = -g^0_x\big(A^0_x(z_1, \epsilon), z_2\big), \quad z_1, z_2 \in T_xM, \ \epsilon \in E_x,$$

$\nabla^{\otimes}$ denota a conexão em $(TM^0)^* \otimes (TM^0)^* \otimes E$ induzida por ∇^0 e ∇^E, e $\nabla^{\diamond}$ denota a conexão em $(\mathcal{D}^0)^* \otimes E$ induzida por ∇^0 e ∇^E.

Demonstração. Esse teorema é aplicação direta do Teorema 2.8.1 (ver também [18, Nota 7.5]). Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM^0 \oplus E$ sobre M^0 munido da conexão $\widehat{\nabla}$ que torna $g^0 \oplus g^E$ paralela e que tem como componentes ∇^0, ∇^E e α^0. Seja G o grupo de Lie definido em (6.3). Lembre-se de que a variedade sub-riemanniana de contato Q^{2n+1}_c é munida de sua G-estrutura característica P e que a tripla (Q^{2n+1}_c, ∇, P) é homogênea. Munimos o fibrado vetorial $\widehat{E}$ com a G-estrutura $\widehat{P}$ formada pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^{2n+1} \to \widehat{E}_x$, $x \in M^0$, tais que:

- p leva o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n+1}$ em $g^0_x \oplus g^E_x$;
- p leva o último vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ em $\xi^0(x)$;
- a restrição de p ao espaço gerado pelos primeiros $2n$ vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{2n+1}$ leva a estrutura complexa (6.4) em $\widehat{J}_x$.

Agora, o Teorema 2.8.1 afirma que a existência de uma solução (f, L) para o problema de imersão isométrica sub-Riemann/sub-Riemann é equivalente às equações (2.15)—(2.21). Por cálculos diretos pode-se observar que a equação (2.15) é equivalente [1] a (6.15) e (6.16), a equação (2.16) é equivalente a (6.19) e (6.20), as equações (2.17) e (2.18) são equivalentes a (6.17) e (6.18). A equação (2.19) é automaticamente satisfeita já que a $\mathcal{D}^0$-componente de $\widehat{J}$ foi escolhida de modo a ser igual a $\frac{1}{2}H^0$ (ver (6.14)) e porque a sub-torção de M^0 se anula. A equação (2.20) é satisfeita pela simetria de α^0. Finalmente, a equação (2.21) é equivalentes às seguintes condições:

(a) $g^0 \oplus g^E$ é $\widehat{\nabla}$-paralela;

(b) ξ^0 é $\widehat{\nabla}$-paralelo;

(c) $\widehat{J}$ é $\widehat{\nabla}$-paralelo.

A condição (a) é garantida pela construção de $\widehat{\nabla}$. A condição (b) segue do fato de que ξ^0 é ∇^0-paralela e de que ξ^0 está no núcleo de α^0. Finalmente, a condição (c) é equivalente às equações (6.21)—(6.26). □

[1] Tenha em mente que, como ξ^0 é ∇^0-paralelo, temos $R^0(\cdot, \cdot)\xi^0 = 0$.

Capítulo 7

Família Associada a uma Superfície Mínima

7.1 Deformações Mínimas que Preservam G-estrutura

O intuito desta seção reside em apresentar, para uma dada superfície mínima imersa num espaço ambiente de inner torsion nula, uma família a 1 parâmetro de imersões mínimas no mesmo ambiente. Considere $(\overline{M}^{\bar{n}}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ uma variedade riemanniana infinitesimalmente homogênea com G-estrutura.

Sejam (M, g) uma superfície de Riemann (com J sendo sua estrutura complexa paralela), e $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica $\mathbb{R}^k$ $(k = \bar{n} - 2)$ munido de uma estrutura riemanniana g^E. Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus E$ munido de estrutura riemanniana $\widehat{g}$ cujas restrições a TM e E são g e g^E respectivamente e tal que TM e E sejam ortogonais. Seja $\widehat{P} \subset \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E})$ uma G-estrutura em $\widehat{E}$. Seja α^0 uma seção lisa de $\mathrm{Lin}_2^{\mathrm{s}}(TM, E)$ tal que $\sum_{i=1}^{2} \alpha^0(X_i, X_i) = 0$, para todo $x \in M$ e toda base ortonormal (X_1, X_2) de T_xM. Suponha que $(M, g, \alpha^0, \widehat{P})$ satisfaça as equações de compatibilidade para o problema de imersão isométrica em $(\overline{M}^{\bar{n}}, \overline{\nabla}, \overline{P})$, então o Teorema 2.8.4 nos mostra a existência de uma imersão isométrica (local) que preserva G-estrutura mínima (f, S) de M em $\overline{M}$.

Comecemos o estudo das famílias associadas a (f, S) provando o seguinte:

Proposição 7.1.1. *Suponha $(M, g, \alpha^0, \widehat{P})$ como descrita acima. Para $\theta \in \mathbb{S}^1$, defina:*

$$\alpha_x^{0,\theta}(\cdot, \cdot) = \alpha_x^0(\cdot, e^{-\theta J} \cdot)$$

$$\widehat{P}_\theta = \big\{p \in \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E}); p = (e^{\theta J} \oplus I_E) \circ \tilde{p},\ \ onde\ \tilde{p} \in \widehat{P}\big\}.$$

Então $\alpha_x^{0,\theta}$ *é simétrico,* $\sum_{i=1}^2 \alpha^{0,\theta}(X_i, X_i) = 0$ *e* $\big((M,g), \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta\big)$ *satisfaz as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para* $\overline{M}$.

Demonstração. Provemos inicialmente que $\alpha_x^{0,\theta}$ é, de fato, simétrico e que $\sum_{i=1}^2 \alpha^{0,\theta}(X_i, X_i) = 0$.

Seja (v, Jv) uma base para T_xM. Para provarmos a simetria de $\alpha_x^{0,\theta}$ é suficiente mostrar que $\alpha_x^{0,\theta}(v, Jv) = \alpha_x^{0,\theta}(Jv, v)$. Uma vez que vale a igualdade $\sum_{i=1}^2 \alpha^0(X_i, X_i) = 0$ para todo $x \in M$ e (X_1, X_2) uma base ortonormal para T_xM, temos que $\alpha^0(v, v) = -\alpha^0(Jv, Jv)$. Então:

$$\begin{aligned}\alpha_x^{0,\theta}(v, Jv) &= (\cos\theta)\alpha^0(v, Jv) - (\sin\theta)\alpha^0(v, -v) = \\ &= (\cos\theta)\alpha^0(Jv, v) - (\sin\theta)\alpha^0(Jv, Jv) = \alpha_x^{0,\theta}(Jv, v).\end{aligned}$$

Para provarmos que $\sum_{i=1}^2 \alpha^{0,\theta}(X_i, X_i) = 0$ para todo $x \in M$ e (X_1, X_2) uma base ortonormal de T_xM, observe que:

$$\begin{aligned}\alpha_x^{0,\theta}(v, v) + \alpha_x^{0,\theta}(Jv, Jv) &= (\cos\theta)\alpha_x^0(v, v) - (\sin\theta)\alpha_x^0(v, Jv) + \\ &+ (\cos\theta)\alpha_x^0(Jv, Jv) - (\sin\theta)\alpha_x^0(Jv, -v) = \\ &= (\cos\theta)\big(\alpha_x^0(v, v) + \alpha_x^0(Jv, Jv)\big) = 0.\end{aligned}$$

Seja $(e_i)_{i=1}^{\bar{n}-n}$ uma base ortonormal para E. Sejam S_i e S_i^θ, $i = 1, \ldots, \bar{n} - n$, os campos de operadores simétricos em TM definidos por $\alpha_x^0(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^{\bar{n}-n} g_x(S_i(\cdot), \cdot)e_i$ e $\alpha_x^{0,\theta}(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^{\bar{n}-n} g_x(S_i^\theta(\cdot), \cdot)e_i$. É imediato ver que $S_i^\theta = e^{\theta J} S_i$.

Para provarmos que a equação de Gauss continua sendo satisfeita por $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$, seja $u, v \in TM$ uma base ortonormal para T_xM. Como $\dim(M) = 2$, é suficiente mostrar que a igualdade:

$$\begin{aligned}\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(u), \sigma_\theta(v)\big)\sigma_\theta(u), \sigma_\theta(v)\big] &= g_x(R_x(u, v)u, v) \\ &- g_x(\alpha_x^{0,\theta}(v, u), \alpha_x^{0,\theta}(u, v)) + g_x(\alpha_x^{0,\theta}(u, u), \alpha_x^{0,\theta}(v, v)) \quad (7.1)\end{aligned}$$

para toda $\sigma_\theta : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, aplicação que preserva G-estrutura que relaciona $(\widehat{P}_\theta)_x$ e $\overline{P}_y$, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\overline{K}(\sigma_\theta(T_xM)) = K(x) - \sum_{i=1}^2 \big(g_x(S_{i,\theta}(u), v)^2 + \\ g_x(S_{i,\theta}(u), u) \cdot g_x(S_{i,\theta}(v), v)\big) = K(x) + \sum_{i=1}^2 \det(S_{i,\theta})\end{aligned}$$

para toda $\sigma_\theta : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, função que preserva G-estrutura que relaciona $(\widehat{P}_\theta)_x$ a $\overline{P}_y$, onde denotamos por $\overline{K}$ e K as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e M respectivamente. É fácil ver que $\det(S_{i,\theta}) = \det(S_i)$. Observe agora que para toda $\sigma_\theta : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, função que preserva G-estrutura que relaciona $(\widehat{P}_\theta)_x$ a $\overline{P}_y$, existe uma aplicação que preserva G-estrutura $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ que relaciona $\widehat{P}_x$ a $\overline{P}_y$ e tal que $\sigma_\theta(e^{\theta J} \oplus I_E) = \sigma$. Obviamente $\sigma_\theta(TM) = \sigma(TM)$. A equação de Gauss para $(M, g, \alpha^0, \widehat{P})$ é:

$$\overline{K}(\sigma(T_xM)) = K(x) + \sum_{i=1}^{2} \det(S_i),$$

de onde segue que (7.1) vale, i.e., $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$ satisfaz a equação de Gauss. De modo a provarmos a validade da equação de Codazzi para $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$ note que:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\otimes}\alpha^{0,\theta})_x(v,w,u) &= \nabla^E_v \alpha^{0,\theta}(w,u) - \alpha^{0,\theta}_x(\nabla_v W, u) - \alpha^{0,\theta}_x(w, \nabla_v U)\\
&= \nabla^E_v\big((\cos\theta)\alpha^0_x(w,u) - (\sin\theta)\alpha^0_x(w,Ju)\big) - (\cos\theta)\alpha^0_x(\nabla_v W, u) +\\
&\quad (\sin\theta)\alpha^0_x(\nabla_v W, Ju) - (\cos\theta)\alpha^0_x(w,\nabla_v U) + (\sin\theta)\alpha^0_x(w, J\nabla_v U)\\
&= (\cos\theta)\big(\nabla^E_v\alpha^0_x(w,u) - \alpha^0_x(\nabla_v W,u) - \alpha^0_x(w,\nabla_v U)\big) -\\
&\quad (\sin\theta)\big(\nabla^E_v\alpha^0_x(w,Ju) - \alpha^0_x(\nabla_v W, Ju) - \alpha^0_x(w, \nabla_v JU)\big)\\
&= (\cos\theta)(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u) - (\sin\theta)(\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,Ju) \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

para todos $v, w, u \in T_xM$ e todo $e \in E$, onde W e U são extensões locais de w e u respectivamente. Observe que usamos aqui $\nabla J = 0$. A Equação (7.2) implica que a equação de Codazzi para $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$ pode ser escrita como se segue:

$$\begin{aligned}
&\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(w)\big)\sigma_\theta(u), \sigma_\theta(e)\big] =\\
&\quad (\cos\theta)\big(g_x((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,u),e) - g_x((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,u),e)\big) -\\
&\quad (\sin\theta)\big(g_x((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(v,w,Ju),e) - g_x((\nabla^{\otimes}\alpha^0)_x(w,v,Ju),e)\big) \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

onde $\sigma_\theta : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ é uma aplicação que preserva G-estrutura que relaciona $(\widehat{P}_\theta)_x$ a $\overline{P}_y$.

Como acima, dada $\sigma_\theta : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$, uma aplicação que preserva G-estrutura que relaciona $(\widehat{P}_\theta)_x$ e $\overline{P}_y$, considere a função que preserva G-estrutura $\sigma : \widehat{E}_x \to T_y\overline{M}$ que relaciona $\widehat{P}_x$ a $\overline{P}_y$ e tal que $\sigma_\theta(e^{\theta J} \oplus I_E) = \sigma$.

Observe agora que, para $v \in T_xM$ e $a, b \in \widehat{E}_x$, temos:

$$\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(Jv)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big] = \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(Jv)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big], \quad (7.4)$$

de fato:

$$\begin{aligned}
&\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(Jv)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big] \\
&\quad = \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta((e^{\theta J} \oplus I_E)(v)), \sigma_\theta((e^{\theta J} \oplus I_E)(Jv))\big)\sigma(a), \sigma(b)\big] \\
&= \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big((\cos\theta)\sigma_\theta(v) + (\sin\theta)\sigma_\theta(Jv), (\cos\theta)\sigma_\theta(Jv) - (\sin\theta)\sigma_\theta(v)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big] \\
&\quad = \bar{g}_y\big[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(Jv)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big] = \\
&\quad = \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(Jv)\big)\sigma(a), \sigma(b)\big].
\end{aligned}$$

Se $u \in T_xM$ e $e \in E$, usando a Equação (7.4) é simples ver que:

$$\begin{aligned}
&\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(Jv)\big)\sigma_\theta(u), \sigma_\theta(e)\big] = \\
&\qquad (\cos\theta)\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(Jv)\big)\sigma(u), \sigma(e)\big] \\
&\qquad - (\sin\theta)\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(Jv)\big)\sigma(Ju), \sigma(e)\big]. \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Já que $(M, g, \alpha^0, \widehat{P})$ satisfaz a equação de Codazzi, as equações (7.3) e (7.5) provam que $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$ também o faz, como desejado.

Para verificarmos que $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$ satisfaz a equação de Ricci precisamos apenas observar que, para $v \in T_xM$ e $e, e' \in E$, temos:

$$\bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma(v), \sigma(Jv)\big)\sigma(e), \sigma(e')\big] = \bar{g}_y\big[\overline{R}_y\big(\sigma_\theta(v), \sigma_\theta(Jv)\big)\sigma_\theta(e), \sigma_\theta(e')\big], \quad (7.6)$$

e:

$$\begin{aligned}
&g_x^E\big(R_x^E(v,w)e, e'\big) + g_x\big(\widetilde{\alpha}_x^{0,\theta}(v,e), \widetilde{\alpha}_x^{0,\theta}(w,e')\big) - g_x\big(\widetilde{\alpha}_x^{0,\theta}(w,e), \widetilde{\alpha}_x^{0,\theta}(v,e')\big) = \\
&\quad = g_x^E\big(R_x^E(v,w)e, e'\big) + g_x\big(e^{\theta J}\widetilde{\alpha}_x^0(v,e), e^{\theta J}\widetilde{\alpha}_x^0(w,e')\big) \\
&\quad - g_x\big(e^{\theta J}\widetilde{\alpha}_x^0(w,e), e^{\theta J}\widetilde{\alpha}_x^0(v,e')\big) = g_x^E\big(R_x^E(v,w)e, e'\big) \\
&\qquad + g_x\big(\widetilde{\alpha}_x^0(v,e), \widetilde{\alpha}_x^0(w,e')\big) - g_x\big(\widetilde{\alpha}_x^0(w,e), \widetilde{\alpha}_x^0(v,e')\big)
\end{aligned}$$

para todos $v, w \in T_xM$ e todos $e, e' \in E$. Isso prova que a equação de Ricci vale para $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$, o que conclui nossa demonstração. □

Nota 7.1.2. *Como apresentado no Capítulo 1, Seção 1.6, Dajczer e Gromoll provaram em [3] a existência de uma família a 1 parâmetro de imersões mínimas associadas a uma subvariedade real Kähler mínima de $\mathbb{R}^n$. Em* *sua prova eles demonstram que uma imersão isométrica* $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ *é mínima se e somente se ela é circular, i.e., se a segunda forma fundamental* α *satisfaz* $\alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY)$ *para* $X, Y \in TM$. *Embora tal caracterização de minimalidade possa ser provada para subvariedades Kähler de variedades Kähler arbitrárias, nosso método de deformação não produz em geral uma família associada de imersões mínimas, já que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci não parecem valer para os "dados deformados" quando a dimensão da variedade de origem é maior que* 2. *Note que quando* $\dim(M) > 2$, *é difícil correlacionar as curvaturas* $\bar{g}\big[\overline{R}\big(\sigma(\cdot), \sigma(\cdot)\big)\sigma(\cdot), \sigma(\cdot)\big]$ *e* $\bar{g}\big[\overline{R}\big(\sigma_\theta(\cdot), \sigma_\theta(\cdot)\big)\sigma_\theta(\cdot), \sigma_\theta(\cdot)\big]$ *como feito na prova da Proposição 7.1.1.*

Lema 7.1.3. *Usando a mesma notação da Proposição 7.1.1, temos:*

$$\overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma_\theta} \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}^\theta} = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}_x^{\widehat{P}} = \mathfrak{I}_y^{\overline{P}} \circ \sigma.$$

Demonstração. Defina $\phi = (e^{\theta J} \oplus I_E)$. A conexão $\widehat{\nabla}$ pode ser escrita como:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \big(\nabla_X Y_1 + \widetilde{\alpha}^0(X, Y_2), \nabla^E_X Y_2 + \alpha^0(X, Y_1)\big)$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ e todo $Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma(TM \oplus E)$, onde $\widetilde{\alpha}^0$ é a seção de $\mathrm{Lin}(TM, E; TM)$ tal que $g^E(\alpha^0(u, v), e) = g(\widetilde{\alpha}^0(u, e), v)$ para todos $v, w \in T_xM$ e todo $e \in E$.

No que se segue denotamos por $\widehat{\nabla}^\theta$ a conexão em $\widehat{E}$ relativa à quadrupla $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta)$, i.e., $\widehat{\nabla}^\theta_X Y = \big(\nabla_X Y_1 + \widetilde{\alpha}^{0,\theta}(X, Y_2), \nabla^E_X Y_2 + \alpha^{0,\theta}(X, Y_1)\big)$, para todo $X \in \Gamma(TM)$ e todo $Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma(\widehat{E})$ $(= \Gamma(TM \oplus E)$. Para compararmos $\mathfrak{I}^{\widehat{P}}$ e $\mathfrak{I}^{\widehat{P}_\theta}$ provaremos que, para $p \in \widehat{P}$, $\overline{\omega}_x = p^*\omega$ e $\overline{\omega}_\theta = p^*_\theta \omega_\theta$ são iguais, onde $p_\theta = \phi \circ p \in \widehat{P}_\theta$. Para $\epsilon \in \Gamma(\widehat{E})$ defina $\epsilon^\theta = \phi \circ \epsilon \in \Gamma(\widehat{E})$. Observe que $\widetilde{\epsilon} \in \Gamma(E_0)$ definido como a representação de ϵ com respeito a p se iguala a representação de ϵ^θ em relação a p_θ. De fato, $p_\theta^{-1} \circ \epsilon^\theta = p^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \epsilon = \widetilde{\epsilon}$. Então, para $v \in T_xM$, temos que:

$$\widehat{\nabla}_v \epsilon = p(x)\big[\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}_x(v) + \overline{\omega}_x(v) \cdot \widetilde{\epsilon}(x)\big]$$

e:

$$\widehat{\nabla}^\theta_v \epsilon^\theta = p_\theta(x)\big[\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}_x(v) + \overline{\omega}^\theta_x(v) \cdot \widetilde{\epsilon}(x)\big] = \phi(x)\big(p(x)\big[\mathrm{d}\widetilde{\epsilon}_x(v) + \overline{\omega}^\theta_x(v) \cdot \widetilde{\epsilon}(x)\big]\big).$$

Assim:

$$\big(\widehat{\nabla}_v \epsilon - \phi^{-1}\widehat{\nabla}^\theta_v \epsilon^\theta\big) = p\big[(\overline{\omega}_x(v) - \overline{\omega}^\theta_x(v)) \cdot \widetilde{\epsilon}(x)\big]. \tag{7.7}$$

Por outro lado, se $X \in \Gamma(TM)$ e $Y = (Y_1, Y_2) \in \widehat{E} = TM \oplus E$, temos que:

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}^{\theta}_X \phi(Y) &= \big(\nabla_X e^{\theta J} Y_1 + \widetilde{\alpha}^{\theta}_0(X, Y_2), \nabla^E_X Y_2 + \alpha^{\theta}_0(X, e^{\theta J} Y_1)\big) = \\ &= \big(e^{\theta J}\nabla_X Y_1 + e^{\theta J}\widetilde{\alpha}_0(X, Y_2), \nabla^E_X Y_2 + \alpha_0(X, Y_1)\big) = \phi(\widehat{\nabla}_X Y). \quad (7.8)\end{aligned}$$

Note que, de fato, $\widetilde{\alpha}^{0,\theta}_x(v, e) = e^{\theta J}\widetilde{\alpha}^0_x(v, e)$ para todo $v \in T_xM$ e todo $e \in E$, já que, para todo $w \in T_xM$, temos:

$$\begin{aligned}g_x(\widetilde{\alpha}^{0,\theta}_x(v, e), w) &= g^E_x(\alpha^{0,\theta}_x(v, w), e) = g^E_x(\alpha^0_x(v, e^{-\theta J} w), e) \\ &= g_x(\widetilde{\alpha}^0_x(v, e), e^{-\theta J} w) = g_x(e^{\theta J}\widetilde{\alpha}^0_x(v, e), w).\end{aligned}$$

Desse modo, as equações (7.7) e (7.8) provam que $\overline{\omega}_x = \overline{\omega}^{\theta}_x$. Uma vez que $p_\theta = \phi \circ p$ e $\sigma_\theta = \phi \circ \sigma$, facilmente vemos que $\overline{\mathrm{Ad}}_{p_\theta} = \overline{\mathrm{Ad}}_\phi \overline{\mathrm{Ad}}_p$ e $\overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma_\theta} = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \overline{\mathrm{Ad}}_\phi$. A situação pode ser visualizada no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{E}_x \arrow[r, "\sigma_\theta"] & T_y\overline{M} \arrow[r, "\bar{\omega}_y"'] \arrow[rrr, bend left, "\mathfrak{I}^{\overline{P}_y}"] & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "\text{quociente}"'] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ad}}_{\bar{p}}"'] & \mathfrak{gl}(T_y\overline{M})/\mathfrak{g}_y \\
 & \widehat{E}_x \arrow[ul, "\phi"] \arrow[u, "\sigma"'] \arrow[r, "\bar{\omega}_x=(\bar{\omega}_\theta)_x"'] \arrow[rrr, bend left, "\mathfrak{I}^{\widehat{P}_x}"] \arrow[rrrd, bend right, "\mathfrak{I}^{\widehat{P}^\theta_x}"'] & \mathfrak{gl}(E_0) \arrow[r, "\text{quociente}"'] & \mathfrak{gl}(E_0)/\mathfrak{g} \arrow[r, "\overline{\mathrm{Ad}}_p"'] \arrow[rd, "\overline{\mathrm{Ad}}_{p_\theta}"'] & \mathfrak{gl}(\widehat{E}_x)/\mathfrak{g}_x \arrow[u, "\overline{\mathrm{Ad}}_\sigma"'] \\
 & & & & \mathfrak{gl}(\widehat{E}_x)/\mathfrak{g}_x \arrow[u, "\overline{\mathrm{Ad}}_\phi"'] \arrow[uu, bend right, "\overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma_\theta}"']
\end{tikzcd}$$

o qual nos leva a:

$$\overline{\mathrm{Ad}}_{\sigma_\theta} \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}^\theta}_x = \overline{\mathrm{Ad}}_\sigma \circ \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = \mathfrak{I}^{\overline{P}}_y \circ \sigma; \quad (7.9)$$

o que conclui a demonstração. □

Nota 7.1.4. *O Lema 7.1.3 nos diz que a hipótese (a) do Teorema 2.8.4* não *é satisfeita quando o fibrado vetorial $\widehat{E}$ é munido da G-estrutura $\widehat{P}^\theta$, a menos que as inner torsions $\mathfrak{I}^{\widehat{P}^\theta}$ e $\mathfrak{I}^{\widehat{P}}$ sejam ambas iguais a zero.*

Corolário 7.1.5. *Sejam (M^n, g) uma variedade semi-riemanniana orientável, com $n = 2$, e J uma estrutura complexa paralela em relação a conexão de Levi-Civita ∇ de TM. Seja f uma imersão isométrica mínima de M numa* *variedade também semi-riemanniana* $(\overline{M}, \bar{g})$. *Suponha* $\overline{M}$ *munida da conexão de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$ *e de uma* G*-estrutura* $\overline{P}$ *com* $\mathfrak{I}^{\overline{P}}_y = 0$, *para todo* $y \in \overline{M}$, *e tal que a tripla* $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ *seja infinitesimalmente homogênea. Então existe uma família de imersões isométricas mínimas* f_θ *de* M *na variedade* $\overline{M}$, *com* $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Demonstração. Considere o fibrado normal $\pi : f^\perp \to M$ associado à imersão $f : M \to \overline{M}$. Seja α^f a segunda forma fundamental relativa a imersão f. Denote por $1_{f^\perp}$ a aplicação identidade de $f^\perp$. Considere em $\widehat{E} = TM \oplus f^\perp$ a G-estrutura $\widehat{P}$ dada a partir de $\overline{P}$ pela composição de seus elementos à esquerda com a função $(\mathrm{d}f \oplus 1_{f^\perp})^{-1} : T\overline{M} \to \widehat{E}$, i.e. tome

$$\widehat{P} = \{\widehat{p} \in \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E}); p = [(\mathrm{d}f \oplus 1_{f^\perp})^{-1} \circ p], p \in \overline{P}\}.$$

Temos, então, que $(f, 1_{f^\perp})$ é uma solução do problema de imersão isométrica (semi-riemanniano) de $(M, \nabla, \widehat{P})$ em $(\overline{M}, \overline{\nabla}, \overline{P})$ dados $\nabla^\perp$, $\alpha^\perp$, $g^\perp$.

Defina $(M, g, \alpha^{f,\theta}, \widehat{P}_\theta)$, a partir de $(M, g, \alpha^f, \widehat{P})$, da maneira explicitada na Proposição 7.1.1. Do Lema anterior segue que $\mathfrak{I}^{\widehat{P}^\theta}_x = \mathfrak{I}^{\widehat{P}}_x = 0$. Assim, a primeira hipótese do Teorema 2.8.4 é satisfeita. Desse modo, a tese segue imediatamente da Proposição 7.1.1 e do Teorema 2.8.4. $\square$

7.2 Imersão Isométrica no Produto de Formas Espaciais

Tendo em vista aplicações ao nosso teorema, nessa seção consideraremos o caso especial de imersões isométricas numa variedade $\overline{M}$ dada pelo produto de duas formas espaciais de dimensões n_1 e n_2. Mostraremos que a natural $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_2})$-estrutura é infinitesimalmente homogênea e tem inner torsion nula.

7.2.1 Inner Torsion

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com fibra típica $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ e F um subfibrado n-dimensional de E. Defina g como a estrutura riemanniana em E e ∇ uma conexão em E. Faça:

$$P = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(E; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}, F)$$

i.e., P é o conjunto de $\mathbb{R}^{\bar{n}}$-referenciais ortonormais em E que levam $\mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}$ em F. Então, P é uma G-estrutura em M com G o grupo de aplicações ortogonais de $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ que fixam $\mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}$, i.e.:

$$G = \mathrm{O}(\mathbb{R}^{\bar{n}}; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}) \cong \mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_2}).$$

Para calcularmos $\mathfrak{I}_x^P$ observe que nós temos $G_x = O(E_x; F_x)$. A álgebra de Lie de G_x, denotada por $\mathfrak{g}_x$, consiste dos endomorfismos lineares $T : E_x \to E_x$ anti-simétricos (com respeito a g_x) e que satisfazem $T(F_x) \subset F_x$. Temos o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(E_x)/\mathfrak{g}_x &\longrightarrow \mathrm{sym}(E_x) \oplus \mathrm{Lin}(F_x, F_x^\perp) \\ T + \mathfrak{g}_x &\longmapsto \big(\tfrac{1}{2}(T + T^*), \tfrac{1}{2} q_x \circ (T - T^*)|_{F_x}\big) \end{aligned}$$

onde $q : E \to F^\perp$ é a projeção ortogonal, e $T^* : E_x \to E_x$ denota o transposto de T com respeito a g_x. Assim, podemos identificar $\mathfrak{I}_x^P$ com uma aplicação linear de T_xM no espaço $\mathrm{sym}(E_x) \oplus \mathrm{Lin}(F_x, F_x^\perp)$.

Seja $s : U \to P$ uma seção local lisa com $x \in U$. Como na Seção 3.1.1, temos aqui:

$$\frac{1}{2}(\Gamma_x(v) + \Gamma_x(v)^*) = -\frac{1}{2}\nabla_v g,$$

para todo $v \in T_xM$.

Considere a componente $\alpha^F \in \Gamma(\mathrm{Lin}(E; F; F^\perp))$ de ∇ em relação a decomposição $E = F \oplus F^\perp$. Esta é a *segunda forma fundamental* com respeito a decomposição $E = F \oplus F^\perp$. Dado $e \in F_x$, defina $\epsilon : U \to E$ como em (3.2). A representação de ϵ com respeito a s é constante e vale (3.3), para todo $v \in T_xM$. Além disso, como s toma valores em $\mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(E; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}, F)$, temos que $\epsilon(U) \subset F$. Assim:

$$\nabla_v \epsilon + F_x = \alpha_x^F(v, e) \in E_x/F_x.$$

Donde segue que:

$$q(\Gamma_x(v) \cdot e) = \alpha_x(v, e),$$

para todos $v \in T_xM$, $e \in E_x$. E, então:

$$\tfrac{1}{2}\big(\Gamma_x(v) - \Gamma_x(v)^*\big) = \Gamma_x(v) - \tfrac{1}{2}\nabla_v g,$$

para todo $v \in T_xM$.

E, se olharmos para $\nabla_v g : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$ como um endomorfismo linear de E_x, teremos:

$$\mathfrak{I}_x^P(v) = \big(-\tfrac{1}{2}\nabla_v g, \alpha^F(v, \cdot) + \tfrac{1}{2} q \circ \nabla_v g|_{F_x}\big)$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$. Onde observamos que, $\mathfrak{I}^P = 0$ se e somente se $\nabla g = 0$ e $\alpha^F = 0$, i.e., se e somente se ∇ é compatível com g e a derivada covariante de qualquer seção lisa de F é uma seção lisa de F.

7.2.2 Homogeneidade

Sejam (M_1,∇_1) e (M_2,∇_2) variedades afins com $\dim(M_i) = n_i$ ($i \in \{1,2\}$). Seja P_i uma G_i-estrutura em M_i, onde G_i é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n_i})$. Denote por ∇ a conexão em $M_1 \times M_2$ naturalmente induzida por ∇_1 e ∇_2. $G \doteq G_1 \times G_2$ pode ser (diagonalmente) identificado com um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ e $P \doteq P_1 \times P_2$ torna-se, assim, uma G-estrutura em M. Se (M_1, ∇_1, P_1) e (M_2, ∇_2, P_2) são homogêneas então (M, ∇, P) também o é.

Assim, se, para $i = 1, 2$, (M_i,g^i) é uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante $c_i \in \mathbb{R}$, ∇_i é a conexão de Levi-Civita associada a g^i e $P_i = \mathrm{FR}^o(TM_i)$ é uma $O(n_i)$-estrutura em M_i, então, se definimos P e ∇ como acima, (M, ∇, P) é homogênea (e, portanto, infinitesimalmente homogênea).

7.2.3 Teorema de Imersão em Produtos de Formas Espaciais

Seja (M,g) uma variedade riemanniana com $\dim(M) = n < \bar{n}$ e conexão de Levi-Civita ∇. Considere o fibrado vetorial $\widehat{E} = TM \oplus \mathbb{R}^{\bar{n}-n}$ em M munido da estrutura riemanniana $\widehat{g}$ dada pela soma ortonormal de g e $g^{\mathbb{R}^{\bar{n}-n}}$. Suponha dada uma seção lisa α^0 de $\mathrm{Lin}(TM, TM; \mathbb{R}^{\bar{n}-n})$. Denotaremos por $\widehat{\nabla}$ a conexão em $\widehat{E}$ que é compatível com $\widehat{g}$ e cujas componentes são ∇, $\nabla^{\mathbb{R}^{\bar{n}-n}}$ e α^0. Seja F um subfibrado vetorial de $\widehat{E}$.

Definição 7.2.1. *Dizemos que a quadrupla (M, g, α^0, F) satisfaz as equações de compatibilidade para $\overline{M} = M_1 \times M_2$ se as seguintes condições são obedecidas:*

(a) A derivada covariante $\widehat{\nabla}$ de seções de F são, também, seções de F, i.e., a segunda forma fundamental do subfibrado F é nula;

(b) vale a equação de Gauss;

(c) vale a equação de Codazzi;

(d) vale a equação de Ricci.

Teorema 7.2.2. *Assuma dada (M, g, α^0, F) satisfazendo as equações de compatibilidade para $\overline{M} = M_1 \times M_2$. Então, para todo $x_0 \in M$, existe (f, S) uma solução local do problema de imersão isométrica semi-riemanniano definido numa vizinhança aberta de x_0. Além do mais, se M é completa, conexa e simplesmente-conexa, então existe uma única imersão isométrica global (f, S) de M em $\overline{M}$.*

Demonstração. Defina $\widehat{P} = \mathrm{FR}^o(\widehat{E}; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}, F)$. Então $\widehat{P}$ é uma G-estrutura em $\widehat{E}$, onde G é como definida na Subseção 7.2.1, i.e.:

$$G = \mathrm{O}(\mathbb{R}^{\bar{n}}; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}) \cong \mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_1}) \times \mathrm{O}(\mathbb{R}^{n_2}).$$

Como $\mathfrak{I}^{\overline{P}} = 0$, a hipótese (a) do Teorema 2.8.4 significa que $\mathfrak{I}^{\widehat{P}} = 0$. Observe, agora, que os cálculos feitos na Subseção 7.2.1 continuam válidos para $\widehat{P}$. Desse modo, $\mathfrak{I}^{\widehat{P}} = 0$ se e somente se a distribuição F é $\widehat{\nabla}$-paralela, i.e., se a derivada covariante de seções de F são ainda seções de F, já que $\widehat{\nabla}$ é compatível com $\hat{g}$. □

7.3 Gráficos Mínimos

Definição 7.3.1. *Uma função $f : (M, g) \to (N, h)$ é dita* (fracamente) conforme *se existe uma função lisa não-negativa μ em M tal que $f^*h = \mu g$.*

Definição 7.3.2. *Uma aplicação $f : (M, J^M) \to (N, J^N)$ entre variedade quase complexas é holomorfa (+holomorfa) se*

$$\mathrm{d}f \circ J^M = J^N \circ \mathrm{d}f$$

e é anti-holomorfa (−holomorfa) se

$$\mathrm{d}f \circ J^M = -J^N \circ \mathrm{d}f.$$

Proposição 7.3.3. *Se $f : M \to N$ é uma função ±holomorfa entre variedades Kähler, então f é harmônica.*

Demonstração. Ver [8, p. 38]. □

Proposição 7.3.4. *Seja $f : M \to M'$ um mergulho holomorfo de uma variedade complexa M numa variedade Kähler (M', ω). Então f é uma imersão mínima.*

Demonstração. Como M é uma subvariedade complexa de M', $(M, f^*\omega)$ é uma variedade Kähler (ver [22], p. 94). Pela Proposição 7.3.3 obtemos que f é harmônica e, assim, a Proposição 1.5.3 implica na tese. □

Proposição 7.3.5. *Seja $f : M \to N$ uma função holomorfa entre duas variedades kählerianas. Então o gráfico da função f é mínimo em $M \times N$, i.e., se definimos $F : M \to M \times N$ por $F(x) = (x, f(x))$ e munimos M com a métrica induzida de $M \times N$, então F é uma imersão mínima.*

Demonstração. Uma vez que f é C^∞, F é um mergulho liso de M numa subvariedade fechada de $M \times N$. Como M é uma variedade complexa e $M \times N$ é Kähler, a Proposição 7.3.4 implica que $\mathrm{gr}(f)$ é mínimo (i.e., $\mathrm{gr}(f)$ tem curvatura média nula) se e somente se $F : M \to M \times N$ é holomorfa.

Por outro lado, F é holomorfa se e somente se $\pi^M(F) : M \to M$ e $\pi^N(F) : M \to N$ são funções holomorfas, onde π^M e π^N são as projeções canônicas de $M \times N$ em M e N respectivamente. Como $\pi^M(F) = \mathrm{Id}_M$ (a função identidade de M) e $\pi^N(F) = f$, a tese segue imediatamente. □

Agora, desejamos provar que, se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa entre duas superfícies orientáveis, então a métrica induzida em M a partir de $M \times N$ por $F : M \ni x \mapsto (x, f(x)) \in M \times N$ é conforme a métrica original de M.

Lembremos o seguinte:

Proposição 7.3.6. *Seja $f : (M, J^M) \to (N, J^N)$ uma função entre duas superfícies de Riemann M e N munidas com métricas hermitianas g e h respectivamente. Então, f é $+$holomorfa se e somente se f é uma aplicação conforme que preserva orientação.*

Corolário 7.3.7. *Se $f : M \to N$ é uma função holomorfa entre duas superfícies Kähler, então a métrica induzida em M a partir de $M \times N$ por $F : M \ni x \mapsto (x, f(x)) \in M \times N$ é conforme a métrica original de M.*

Demonstração. Denotemos por $g_{M\times N}$ a métrica produto em $M \times N$, e por g_M e g_N as métricas riemannianas de M e N respectivamente. A métrica $\widetilde{g}_M$ induzida em M por F é $\widetilde{g}_M = F^* g_{M\times N} = g_M + f^* g_N$. Já que $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa entre duas superfícies Kähler, a Proposição 7.3.6 nos diz que $(f^* g_N)_x = \mu(x)(g_M)_x$, para $x \in M$ e μ uma função real em M. Então, temos que $(\widetilde{g}_M)_x = (1 + \mu(x))(g_M)_x$. □

7.3.1 A Segunda Forma Fundamental de um Gráfico

Sejam M e N variedades riemannianas e $f : M \to N$ uma função diferenciável. Defina $F : M \to M \times N$ fazendo $F(x) = \big(x, f(x)\big)$, para todo

$x \in M$. Observemos, agora, sua segunda forma fundamental:

$$\alpha_x^F : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathrm{d}f_x)^\perp \subset T_xM \oplus T_{f(x)}N.$$

Note que se V, W são espaços vetoriais com produto interno e $L : V \to W$ é uma aplicação linear, então:

$$\mathrm{gr}(L)^\perp = \big\{(-L^*w, w) : w \in W\big\}.$$

Identificando $\mathrm{gr}(L)^\perp$ com W via o isomorfismo $(-L^*w, w) \mapsto w$, temos que a projeção ortogonal de $V \oplus W$ em $\mathrm{gr}(L)^\perp$ é dada por:

$$V \oplus W \ni (v, w) \longmapsto (\mathrm{Id}_W + L \circ L^*)^{-1}\big(w - L(v)\big) \in W.$$

De agora em diante, identificaremos $\mathrm{gr}(\mathrm{d}f_x)^\perp$ com $T_{f(x)}N$ do modo acima descrito e denotaremos por:

$$\pi : T_xM \oplus T_{f(x)}N \ni (v, w) \longmapsto (\mathrm{Id}_{T_{f(x)}N} + \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}f_x^*)^{-1}\big(w - \mathrm{d}f_x(v)\big) \in T_{f(x)}N$$

a projeção ortogonal em $\mathrm{gr}(\mathrm{d}f_x)^\perp$.

Dados campos vetoriais X, Y em M, temos:

$$\alpha_x^F\big(X(x), Y(x)\big) = \pi\big(\nabla^{M\times N}_{X(x)}(\mathrm{d}F \circ Y)\big).$$

Por outro lado, $\mathrm{d}F \circ Y$ pode ser identificado com a seção lisa $(Y, \mathrm{d}f \circ Y)$ do seguinte fibrado vetorial:

$$\begin{aligned} F^*T(M \times N) \cong F^*(\mathrm{pr}_1^*TM \oplus \mathrm{pr}_2^*TN) &\cong [(\mathrm{pr}_1 \circ F)^*TM] \oplus [(\mathrm{pr}_2 \circ F)^*TN] \\ &\cong TM \oplus f^*TN, \end{aligned}$$

onde $\mathrm{pr}_1 : M \times N \to M$, $\mathrm{pr}_2 : M \times N \to N$ denotam as projeções canônicas. Então:

$$\nabla_X^{M\times N}(\mathrm{d}F \circ Y) = \big(\nabla_X^M Y, \nabla_X^N(\mathrm{d}f \circ Y)\big),$$

onde ∇^M é a conexão de Levi-Civita de g e ∇^N é a única conexão em $f^*(TN)$ tal que $\nabla_X^N(s \circ f) = \widetilde{\nabla}_{\mathrm{d}f(X)}s$, para todo $s \in \mathbf{\Gamma}(TN)$ e $X \in \mathbf{\Gamma}(TM)$ (onde $\widetilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de N). Então, temos que:

$$\alpha_x^F\big(X(x), Y(x)\big) = (\mathrm{Id}_{T_{f(x)}N} + \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}f_x^*)^{-1}\big(\nabla^N_{X(x)}(\mathrm{d}f \circ Y) - \mathrm{d}f_x(\nabla^M_{X(x)}Y)\big).$$

Como $\nabla_X^N(\mathrm{d}f \circ Y) - \mathrm{d}f(\nabla_X^M Y) = \big(\nabla_X(\mathrm{d}f)\big)(Y) = \big(\nabla(\mathrm{d}f)\big)(X, Y)$, temos, então, que:

$$\alpha_x^F(v, w) = (\mathrm{Id}_{T_{f(x)}N} + \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}f_x^*)^{-1}\big[\big(\nabla(\mathrm{d}f)\big)_x(v, w)\big] \tag{7.10}$$

para todos $x \in M$, $v, w \in T_xM$. Observamos que na expressão acima $\mathrm{d}f$ é entendida como seção do fibrado vetorial $\mathrm{Lin}(TM, f^*TN)$.

7.4 Imersões Mínimas de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$

Usando o seguinte resultado devido a Smith ([23]), definiremos uma família de superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ a partir dos gráficos de representantes harmônicos de elementos do segundo grupo de homotopia $\pi_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ da esfera $\mathbb{S}^2$.

Teorema 7.4.1 (*Smith*)**.** *Todo elemento de $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ é representado por funções harmônicas para $1 \leq n \leq 7$.*

Como provado em [23, Exemplo 8.1], os representantes harmônicos de $\pi_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ são dados pelas funções holomorfas $f_n : \mathbb{S}^2 \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{S}^2$. Denote por g_R a métrica redonda de $\mathbb{S}^2$. Provemos o seguinte:

Proposição 7.4.2. *As imersões $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ dadas por*

$$F_n(z) = (z, z^n) \tag{7.11}$$

são mínimas quando $\mathbb{S}^2$ é munido da métrica pull-back $g_n = F_n^*(g_R \times g_R)$. Para todo n, g_n é conforme a métrica redonda g_R; o fator conforme Φ_n converge uniformemente para 1 quando $n \to \infty$ em pontos fora do equador, e diverge para $+\infty$ uniformemente no equador.

Demonstração. A Proposição 7.3.5 nos diz que $F_n : \mathbb{S}^2 \ni x \mapsto (x, f_n(x)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma imersão mínima se munirmos $\mathbb{S}^2$ com a métrica induzida a partir de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ por F_n. Pelo Corolário 7.3.7, g_n é conforme a métrica redonda g_R de $\mathbb{S}^2$. O fator conforme Φ_n pode ser calculado explicitamente da mareira seguinte. Considere a projeção estereográfica $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, onde $\mathbb{C}$ é o plano que corta a esfera no seu equador. A expressão explícita para ϕ é:

$$\phi(x,y) = (0,0,1) + \frac{2(x,y,-1)}{1+x^2+x^2}.$$

As derivadas parciais de ϕ são, então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(1-x^2-y^2, -2xy, 2x)}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{(-2xy, 1-x^2-y^2, 2y)}{(1+x^2+y^2)^2},$$

e suas normas $\left\| \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \right\|$ e $\left\| \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \right\|$ dadas por:

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| = \frac{2}{1+x^2+y^2}.$$

Então, o pull-back $\phi^* g_R$ de g_R é dado pela métrica conforme:

$$\phi^* g_R = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

Seja $\psi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ a função:

$$\psi_n(z) = (z, z^n),$$

cuja diferencial é:

$$\mathrm{d}\psi_n(z)w = (w, nz^{n-1}w) \in T_{(z,z^n)}\mathbb{C}^2.$$

Aqui, consideramos $\mathbb{C}^2$ munido da métrica produto $h = \phi^* g_R \times \phi^* g_R$. Como sabemos que o pull-back de g_R por ψ é conforme a métrica redonda, para calcularmos o fator conforme precisamos apenas considerar a h-norma do vetor $\mathrm{d}\psi(z)1$:

$$\begin{aligned} &h_{(z,z^n)}\big(\mathrm{d}\psi(z)1, \mathrm{d}\psi(z)1\big) = h_{(z,z^n)}\big((1, nz^{n-1}), (1, nz^{n-1})\big) \\ &\quad = (\phi^* g)_z(1,1) + n^2(\phi^* g)_{z^n}(z^{n-1}, z^{n-1}) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} + \frac{4n^2|z|^{2n-2}}{(1+|z|^{2n})^2}. \end{aligned}$$

Tal fator é relativo a métrica plana de $\mathbb{C}$; para termos o fator conforme em relação a g_R precisamos dividir por $\dfrac{4}{(1+|z|^2)^2}$, o que nos leva a:

$$\Phi_n(z) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} + \frac{4n^2|z|^{2n-2}}{(1+|z|^{2n})^2} \cdot \frac{(1+|z|^2)^2}{4} = 1 + n^2|z|^{2n-2}\left(\frac{1+|z|^2}{1+|z|^{2n}}\right)^2. \tag{7.12}$$

Observe agora que $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = 1$ se $|z| \neq 1$, e $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = \lim_{n\to\infty}(1+n^2) = +\infty$ se $|z| = 1$. □

Obtemos, então, de maneira imediata o seguinte:

Teorema 7.4.3. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma família $F_{n,\theta} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\theta \in [0, 2\pi[$, de imersões mínimas (não totalmente geodésicas) de $(\mathbb{S}^2, g_n)$ em $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_R \times g_R)$, onde g_R é a métrica redonda e $g_n = \Phi_n \cdot g_R$, e é Φ_n o fator conforme dado por* (7.12)*.*

Demonstração. Esse resultado é uma simples aplicação do Corolário 7.1.5 ao caso da imersão mínima $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ descrita em (7.11), observando o cálculo da segunda forma fundamental de gráficos apresentado na Subseção 7.3.1.

Defina, para $x \in \mathbb{S}^2$, $E_x = (\mathrm{d}F_n)_x^\perp$. Considere em $\mathbb{S}^2$ o fibrado vetorial $\widehat{E} = T\mathbb{S}^2 \oplus E$. Seja $A : \widehat{E} \ni (v, w) \mapsto (\mathrm{d}F_n(v), w) \in T\mathbb{S}^2 \times T\mathbb{S}^2$ e defina $F = A^{-1}(T\mathbb{S}^2 \times \{0\})$. Se α é a segunda forma fundamental relativa à imersão F_n, defina $\alpha^0 = A^{-1} \circ \alpha$. Então (F_n, Id_E) é uma solução global do problema de imersão isométrica riemanniano que imerge $((\mathbb{S}^2, g_n), \alpha^0, F)$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (Teorema 7.2.2).

Como provado na Seção 7.2, para uma variedade de chegada como $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ munida da $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2)$-estrutura temos homogeneidade infinitesimal e uma inner torsion que se anula. Assim, definindo $\widehat{P} = \mathrm{FR}^{\mathrm{o}}(\widehat{E}; \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{0\}^{n_2}, F)$, o Corolário 7.1.5 nos dá uma família a 1 parâmetro $F_{n,\theta} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\theta \in [0, 2\pi[$ de imersões mínimas relativas a imersão de $((\mathbb{S}^2, g_n), \alpha^0, \widehat{P})$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. $\square$

Nota 7.4.4. *Observe que, como provado na Subseção 7.3.1, temos que:*

$$\alpha_x^{F_n}(v, w) = (\mathrm{Id}_{T_{f_n(x)}\mathbb{S}^2} + (\mathrm{d}f_n)_x \circ (\mathrm{d}f_n)_x^*)^{-1}\big[\big(\nabla(\mathrm{d}f_n)\big)_x(v, w)\big],$$

para todos $x \in \mathbb{S}^2$ e $v, w \in T_x\mathbb{S}^2$. Como $\mathrm{d}f_n \neq 0$, temos que a família $F_{n,\theta}$ não é trivial no sentido de que, para $\theta \neq 0$, temos $\alpha^{0,\theta} \neq \alpha^0$ e, assim, $(M, g, \alpha^{0,\theta}, \widehat{P}_\theta) \neq (M, g, \alpha^0, \widehat{P})$.

Apêndice A

Conexões

De modo a relacionarmos conexões principais e conexões lineares introduzimos, inicialmente, os conceitos de produto de fibras e de fibrados associados.

A.1 Produto de Fibras

Seja X um conjunto munido de uma G-estrutura P, i.e., seja X_0 um conjunto a que chamamos de *espaço modelo*, G um subgrupo de $\mathrm{Bij}(X_0)$ e P um subconjunto de $\mathrm{Bij}(X_0, X)$ que é uma G-órbita de algum elemento de $\mathrm{Bij}(X_0, X)$. Temos, então, que o conjunto de todas as aplicações que preservam G-estrutura do espaço modelo X_0 em X é um espaço principal com grupo estrutural G. Desse modo, para cada conjunto X munido de G-estrutura existe um correspondente espaço principal com grupo estrutural G. O produto de fibras, a que dedicamos esta seção, mostra uma construção que caminha no sentido recíproco ao acima exposto.

Antes de definirmos produto de fibras, no entanto, precisamos da seguinte definição:

Definição A.1.1. *Seja G um grupo. Por* G-espaço *entendemos um conjunto N munido de uma ação à esquerda de G. O subgrupo G_{ef} de* $\mathrm{Bij}(N)$ *(conjunto das bijeções de N) dado pela imagem do homomorfismo $G \ni g \mapsto \gamma_g \in \mathrm{Bij}(N)$ correspondente à ação de G em N é chamado de* grupo efetivo *do G-espaço N.*

Sejam G um grupo, P um espaço principal com grupo estrutural G e N um G-espaço. Temos uma ação à esquerda de G no produto cartesiano

$P \times N$ definida por:

$$g \cdot (p, n) = (p \cdot g^{-1}, g \cdot n), \tag{A.1}$$

para todo $g \in G$, $p \in P$ e todo $n \in N$. Denote por $[p, n]$ a G-órbita de um elemento (p, n) de $P \times N$ e por $P \times_G N$ o conjunto formado por todas essas G-órbitas. Chamamos $P \times_G N$ de *produto de fibras* do espaço principal P com o G-espaço N. Note que para todos $p \in P$, $g \in G$, $n \in N$ temos a seguinte igualdade:

$$[p \cdot g, n] = [p, g \cdot n]. \tag{A.2}$$

Usaremos também, no que se segue, a seguinte notação alternativa de produto de fibras $P \times_G N$:

$$P \underset{\sim}{\times} N \overset{\text{def}}{=} P \times_G N,$$

quando não houver interesse em se enfatizar o grupo G. Observe que a notação abraviada $P \underset{\sim}{\times} N$ não causa confusão, já que o grupo estrutural G está ligado ao espaço principal P.

Mostremos agora que o produto de fibras $P \times_G N$ é naturalmente munido de uma G_{ef}-estrutura modelada sobre N. Precisamos do seguinte:

Lema A.1.2. *Se P é um espaço principal com grupo estrutural G e N é um G-espaço, então, para cada $p \in P$ a função:*

$$\hat{p} : N \ni n \longmapsto [p, n] \in P \times_G N \tag{A.3}$$

é bijetora.

Demonstração. Dados $n, n' \in N$ com $[p, n] = [p, n']$ existe, então, $g \in G$ com $g \cdot (p, n) = (p, n')$. Isso significa que $p = p \cdot g^{-1}$ e $n' = g \cdot n$. Uma vez que a ação de G em P é livre, a igualdade $p = p \cdot g^{-1}$ implica $g = 1$ e, portanto, $n = n'$. Provemos agora a sobrejetividade de $\hat{p}$. Um elemento arbitrário de $P \times_G N$ é da forma $[q, n]$, com $q \in P$, $n \in N$. Como a ação de G em P é transitiva, existe $g \in G$ com $q = p \cdot g$. E, assim, $\hat{p}(g \cdot n) = [p, g \cdot n] = [p \cdot g, n] = [q, n]$. $\square$

Dados $p \in P$, $g \in G$ e fazendo $q = p \cdot g$ a igualdade (A.2) nos diz que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\hat{p}"] & \\ & P \times_G N \\ N \arrow[uu, "\gamma_g"] \arrow[ur, "\hat{q}"'] & \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

Segue, assim, que a função:

$$\mathfrak{H} : P \ni p \longmapsto \hat{p} \in \mathrm{Bij}(N, P \times_G N) \tag{A.5}$$

é um morfismo de espaços principais cujo grupo subjacente é $G \ni g \mapsto \gamma_g \in \mathrm{Bij}(N)$. A imagem de (A.5) é o conjunto:

$$\widehat{P} = \big\{\hat{p} : p \in P\big\} \subset \mathrm{Bij}(N, P \times_G N). \tag{A.6}$$

Não é difícil ver que $\widehat{P}$ é um subespaço principal de $\mathrm{Bij}(N, P \times_G N)$ com grupo estrutural G_{ef}. Assim, $\widehat{P}$ é uma G_{ef}-estrutura no produto de fibras $P \times_G N$ modelado sobre N. De agora em diante, consideraremos sempre o produto de fibras $P \times_G N$ munido da G_{ef}-estrutura $\widehat{P}$.

Observe que a função (A.5) é injetora se e somente se a ação de G em N é efetiva; nesse caso, a aplicação $P \ni p \mapsto \hat{p} \in \widehat{P}$ é um isomorfismo de espaços principais. Notamos que, em geral, $\widehat{P}$ é isomorfo a um quociente do espaço principal P.

A.2 Fibrados Associados

Fibrados associdados são construídos a partir de fibrados principais por uma aplicação fibra à fibra do conceito de produto de fibras discutido na Subseção A.1. Começamos definindo uma versão diferenciável da Definição A.1.1.

Definição A.2.1. *Por* G-espaço diferenciável *entendemos uma variedade diferenciável* N *munida de uma ação lisa à esquerda* $G \times N \to N$ *de um grupo de Lie* G.

Observe que o grupo efetivo G_{ef} de um G-espaço diferenciável é um subgrupo do grupo $\mathrm{Diff}(N)$ de todos os difeomorfismos de N. O núcleo do homomorfismo $G \ni g \mapsto \gamma_g \in \mathrm{Diff}(N)$, que corresponde à ação à esquerda de G em N, é um subgrupo normal fechado de G e G_{ef} é, assim, isomorfo ao quociente de G por tal núcleo; podemos, portanto, munir G_{ef} de uma estrutura de grupo de Lie.

Sejam $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal e N um G-espaço diferenciável. Para cada $x \in M$ consideramos o produto de fibras $P_x \times_G N$ do espaço principal P_x com o G-espaço N e definimos:

$$P \times_G N = \bigcup_{x \in M} (P_x \times_G N);$$

assim, temos uma *aplicação de projeção*

$$\Pi : P \times_G N \longrightarrow M$$

que leva $P_x \times_G N$ no ponto $x \in M$ e uma *aplicação quociente* $\mathfrak{q}$ definida por:

$$\mathfrak{q} : P \times N \ni (p, n) \longmapsto [p, n] \in P \times_G N.$$

O seguinte diagrama coutativo ilustra a relação entre as funções Π, Π e $\mathfrak{q}$:

$$\begin{tikzcd} P \times N \arrow[d, "\text{first projection}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{q}"] & \\ P \arrow[d, "\Pi"'] & P \times_G N \arrow[dl, "\Pi"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{A.7}$$

Chamamos $\Pi : P \times_G N \to M$ (ou apenas $P \times_G N$) de *fibrado associado* ao fibrado G-principal P e ao G-espaço diferenciável N. O conjunto $P \times_G N$ é também chamado *espaço total* do fibrado associado. Para cada $x \in M$, o conjunto

$$P_x \times_G N = \Pi^{-1}(x)$$

é chamado de *fibra* de $P \times_G N$ sobre x.

Note que cada fibra $P_x \times_G N$ é naturalmente munida da G_{ef}-estrutura $\widehat{P_x} = \{\hat{p} : p \in P_x\}$. Como G_{ef} é um subgrupo de $\text{Diff}(N)$, tal G_{ef}-estrutura pode ser enfraquecida à uma $\text{Diff}(N)$-estrutura que corresponde a estrutura de uma variedade diferenciável difeomorfa C^∞ a N na fibra $P_x \times_G N$.

Nota A.2.2. *Se P é uma G-estrutura num conjunto X e H é um subgrupo de G, então uma H-estrutura Q em X contida em P é dita ser um* fortalecimento *da G-estrutura P. Por outro lado, dizemos que P é um* enfraquecimento *da H-estrutura Q.*

Nosso objetivo, agora, é munir todo o espaço total $P \times_G N$ com a estrutura de uma variedade diferenciável. Dada uma seção local lisa $s : U \to P$ de P temos, então, uma bijeção associada:

$$\hat{s} : U \times N \ni (x, n) \longmapsto [s(x), n] = \widehat{s(x)}(n) \in \Pi^{-1}(U) \subset P \times_G N, \tag{A.8}$$

a que chamamos de *trivialização local* do fibrado associado $P \times_G N$ correspondente a seção local lisa s. Se $s_1 : U_1 \to P$, $s_2 : U_2 \to P$ são seções locais lisas de P e se $g : U_1 \cap U_2 \to G$ denota a aplicação de transição de s_1 para s_2 então a *aplicação de transição* $\hat{s}_1^{-1} \circ \hat{s}_2$ de $\hat{s}_1$ para $\hat{s}_2$ é dada por:

$$\hat{s}_1^{-1} \circ \hat{s}_2 : (U_1 \cap U_2) \times N \ni (x, n) \longmapsto \big(x, g(x) \cdot n\big) \in (U_1 \cap U_2) \times N$$

e, portanto, é um difeomorfismo C^∞ entre conjuntos abertos. Segue de modo simples que existe uma única estrutura diferenciável no conjunto $P \times_G N$ tal que para toda seção local lisa $s : U \to P$ de P o conjunto $\Pi^{-1}(U)$ é aberto em $P \times_G N$ e a trivialização local $\hat{s}$ é um difeomorfismo liso. Aqui, sempre consideraremos o espaço total $P \times_G N$ de um fibrado associado como munido de tal estrutura diferenciável. O fato das topologias de M e N serem Hausdorff e satisfazerem ao segundo axioma da enumerabilidade implica que a topologia de $P \times_G N$ é também Hausdorff e satisfaz ao segundo axioma da enumerabilidade, de modo que $P \times_G N$ é uma variedade diferenciável. Pode-se facilmente checar os seguintes fatos:

- a projeção $\Pi : P \times_G N \to M$ é uma submersão lisa;
- a aplicação quociente $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$ é uma submersão lisa;
- para todo $x \in M$ a fibra $P_x \times_G N$ é uma subvariedade de $P \times_G N$;
- para todo $x \in M$ e todo $p \in P_x$, se a fibra $P_x \times_G N$ é munida da estrutura diferenciável induzida de $P \times_G N$ como uma subvariedade então a função $\hat{p} : N \to P_x \times_G N$ é um difeomorfismo C^∞.

O último dos itens acima listados implica que a estrutura diferenciável de $P_x \times_G N$ obtida pelo enfraquecimento da G_{ef}-estrutura $\widehat{P_x}$ coincide com a estrutura diferenciável que $P_x \times_G N$ herda de $P \times_G N$.

A.2.1 Seções locais de um fibrado associado

Sejam $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal, N um G-espaço diferenciável. Considere o fibrado associado $\Pi : P \times_G N \to M$ e a função quociente $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$.

Definição A.2.3. *Por* seção local do fibrado associado $P \times_G N$ *entendemos uma aplicação* $\epsilon : U \to P \times_G N$ *definida num subconjunto aberto* U *de* M *tal que* $\Pi \circ \epsilon = \mathrm{Id}_U$*, i.e., tal que* $\epsilon(x) \in P_x \times_G N$*, para todo* $x \in U$*.*

Se $\epsilon : U \to P \times_G N$ é uma seção local $P \times_G N$ e se $s : U \to P$ é uma seção local lisa de P então existe uma única função $\tilde{\epsilon} : U \to N$ tal que $\epsilon = \mathfrak{q} \circ (s, \tilde{\epsilon})$, i.e., tal que:

$$\epsilon(x) = [s(x), \tilde{\epsilon}(x)], \tag{A.9}$$

para todo $x \in U$; de fato, $\tilde{\epsilon}$ é apenas a segunda coordenada da função $\hat{s}^{-1} \circ \epsilon$. Chamamos $\tilde{\epsilon}$ de *representação* de ϵ em relação a s. Obviamente ϵ é C^∞ se e somente se $\tilde{\epsilon}$ é lisa.

A.2.2 A diferencial da aplicação quociente

Sejam $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal, N um G-espaço diferenciável. Considere o fibrado associado $\Pi : P \times_G N \to M$ e a aplicação quociente $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$. Para todo $x \in M$, a função $\mathfrak{q}$ leva $P_x \times N$ na fibra $P_x \times_G N$ sobre x e, portanto, para todo $p \in P_x$ e todo $n \in N$, a diferencial $\mathrm{d}\mathfrak{q}(p,n)$ leva $T_{(p,n)}(P_x \times N) = \mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_n N$ no espaço vertical $\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N)$. No que se segue calculamos a restrição da diferencial $\mathrm{d}\mathfrak{q}(p,n)$ a $\mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_n N$. Nessa direção, identificamos $\mathrm{Ver}_p(P)$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ via o isomorfismo canônico

$$\mathrm{d}\beta_p(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ver}_p(P) \tag{A.10}$$

onde, para $p \in P_x$, β_p é o difeomorfismo C^∞ de G em P_x tal que $\beta_p(g) = p \cdot g$; e identificamos $\mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N)$ com $T_n N$ via o isomorfismo

$$\mathrm{d}\hat{p}(n) : T_n N \longrightarrow \mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N), \tag{A.11}$$

onde, se $p \in P_x$, $\hat{p}$ é o difeomorfismo C^∞ de N na fibra $P_x \times_G N$ tal que $\hat{p}(n) = [p,n]$. Para todo $X \in \mathfrak{g}$, denotamos por X^N o *campo vetorial induzido* na variedade diferenciável N, i.e, a função definida por:

$$X^N(n) = \mathrm{d}\beta_n(1) \cdot X \in T_n N,$$

para todo $n \in N$, onde $\beta_n : G \to N$ é a aplicação dada pela ação do elemento n; e por X^P o campo vetorial induzido na variedade diferenciável P.

Lema A.2.4. *Sejam $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal, N um G-espaço diferenciável e considere o fibrado associado $\Pi : P \times_G N \to M$ e a aplicação quociente $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$. Dados $p \in P$, $n \in N$ então a seta pontilhada no diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ver}_p(P) \oplus T_n N \arrow[r, "\mathrm{d}\mathfrak{q}(p,n)"] & \mathrm{Ver}_{(p,n)}(P \times_G N) \\
\mathfrak{g} \oplus T_n N \arrow[u, "\mathrm{d}\beta_p(1) \oplus \mathrm{Id}", "\cong"'] \arrow[r, dotted] & T_n N \arrow[u, "\cong", "\mathrm{d}\hat{p}(n)"']
\end{tikzcd}$$

e dada por:

$$\mathfrak{g} \oplus T_n N \ni (X, u) \longmapsto u + X^N(n) \in T_n N.$$

Demonstração. Defina $x = \Pi(p)$. A função $\mathfrak{q}(p,\cdot) : N \to P_x \times_G N$ é a mesma que $\hat{p}$ e, portanto, a seta pontilhada no diagrama leva $(0,u)$ em u, para todo $u \in T_n N$. Para concluirmos a demonstração, mostraremos que a referida seta leva $(X,0)$ em $X^N(n)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$; isso segue do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P_x \arrow[r, "\mathfrak{q}(\cdot,n)"] & P_x \times_G N \\ G \arrow[u, "\beta_p"] \arrow[r, "\beta_n"'] & N \arrow[u, "\hat{p}"'] \end{tikzcd}$$

por diferenciação. □

A.3 Conexão generalizada em fibrados associados

Nessa seção mostramos que uma conexão no fibrado principal P induz uma conexão generalizada em todos os fibrados associados a P. Antes disso porém lembramos o seguinte resultado sobre fibrados vetoriais cuja demonstração pode ser encontrada em [19, Proposição 1.5.31].

Proposição A.3.1. *Sejam E, E' fibrados vetoriais sobre uma mesma variedade diferenciável M e seja $L : E \to E'$ um morfismo de fibrados vetoriais. Então:*

(a) se L é injetora então sua imagem $L(E)$ é um subfibrado vetorial de E';

(b) se L é sobrejetor então seu núcleo (kernel) $\mathrm{Ker}(L) = \bigcup_{x\in M} \mathrm{Ker}(L_x)$ *é um subfibrado vetorial de E.*

Agora, estabelecendo mais precisamente o que queremos, temos:

Lema A.3.2. *Sejam $\Pi : P \to M$ um fibrado G-principal e N um G-espaço diferenciável. Considere o fibrado associado $P \times_G N$ e denote por $\mathfrak{q} : P \times N \to P \times_G N$ a aplicação quociente. Dada uma conexão* $\mathrm{Hor}(P)$ *em P então existe uma única distribuição* $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ *em $P \times_G N$ tal que:*

$$\mathrm{Hor}_{[p,n]}(P \times_G N) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{Hor}_p(P) \oplus \{0\}\big), \tag{A.12}$$

para todos $p \in P$, $n \in N$. Além disso, a distribuição $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ *é lisa e horizontal em relação a projeção $\Pi : P \times_G N \to M$, i.e.,* $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ *é uma conexão generalizada em $P \times_G N$.*

Demonstração. Dado $g \in G$, denote por $\gamma_g^P : P \to P$ e por $\gamma_g^N : N \to N$ os difeomorfismos dados pela ação de g em P e em N, respectivamente. A ação de g no produto $P \times N$ é dado por $\gamma_{g^{-1}}^P \times \gamma_g^N$. Temos, assim, um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P \times N \arrow[d, "\gamma_{g^{-1}}^P \times \gamma_g^N"'] \arrow[dr, "\mathfrak{q}"] & \\ & P \times_G N \\ P \times N \arrow[ur, "\mathfrak{q}"'] & \end{tikzcd} \tag{A.13}$$

Dados $p \in P$, $n \in N$, então a diferencial de $\gamma_{g^{-1}}^P$ leva $\mathrm{Hor}_p(P)$ em $\mathrm{Hor}_{p\cdot g^{-1}}(P)$ e, assim, a diferencial de $\gamma_{g^{-1}}^P \times \gamma_g^N$ leva $\mathrm{Hor}_p(P) \oplus \{0\}$ em $\mathrm{Hor}_{p\cdot g^{-1}}(P) \oplus \{0\}$. Diferenciando o diagrama (A.13) obtemos, então:

$$\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{Hor}_p(P) \oplus \{0\}\big) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p\cdot g^{-1}, g\cdot n)}\big(\mathrm{Hor}_{p\cdot g^{-1}}(P) \oplus \{0\}\big),$$

o que prova que $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ é bem-definida pela igualdade (A.12). A unicidade da distribuição $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ satisfazendo (A.12) é óbvia. O fato da distribuição $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ ser horizontal segue, com um pequeno trabalho, da comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_pP \oplus T_nN \arrow[rr, "\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}"] \arrow[dr, "\mathrm{d}\Pi_p \circ \mathrm{pr}_1"'] & & T_{[p,n]}(P \times_G N) \arrow[dl, "\mathrm{d}\Pi_{[p,n]}"] \\ & T_xM & \end{tikzcd} \tag{A.14}$$

Finalmente, provemos que $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ é, de fato, lisa. Considere o morfismo de fibrados vetoriais:

$$\overline{\mathrm{d}\mathfrak{q}} : T(P \times N) \longrightarrow \mathfrak{q}^* T(P \times_G N).$$

Observe que temos que a restrição de $\overline{\mathrm{d}\mathfrak{q}}$ ao subfibrado vetorial $\mathrm{Hor}(P) \oplus \{0\}$ de $T(P \times N)$ é injetora; assim, pela Proposição A.3.1, $\overline{\mathrm{d}\mathfrak{q}}\big(\mathrm{Hor}(P) \oplus \{0\}\big)$ é um subfibrado vetorial de $\mathfrak{q}^* T(P \times_G N)$. Seja $f : A \to P \times N$ uma seção local lisa da submersão $\mathfrak{q}$, onde A é um aberto de $P \times_G N$. Uma vez que $\mathfrak{q} \circ f$ é a identidade de A, facilmente identificamos $T(P \times_G N)|_A$ com o pull-back $f^* \mathfrak{q}^* T(P \times_G N)$. Então:

$$\mathrm{Hor}(P \times_G N) \cap T(P \times_G N)|_A = f^* \overline{\mathrm{d}\mathfrak{q}}\big(\mathrm{Hor}(P) \oplus \{0\}\big)$$

e assim $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ é um subfibrado de $T(P \times_G N)$. $\square$

Definição A.3.3. *A conexão generalizada* $\mathrm{Hor}(P \times_G N)$ *cuja existência é dada pelo Lema A.3.2 é chamada de* conexão generalizada associada *a conexão principal* $\mathrm{Hor}(P)$ *de* P.

Mostremos como a derivada covariante de uma seção local de $P \times_G N$ pode ser calculada usando sua representação com respeito a uma seção local lisa de P (lembre (A.9)).

Lema A.3.4. *Seja* $\Pi : P \to M$ *um fibrado* G*-principal com conexão* $\mathrm{Hor}(P)$*; denote por* ω *sua forma de conexão. Seja* N *um* G*-espaço diferenciável e* $P \times_G N$ *o correspondente fibrado associado de* P *munido com a conexão generalizada associada a* $\mathrm{Hor}(P)$*. Sejam* $s : U \to P$, $\epsilon : U \to P \times_G N$ *seções locais lisas; denote por* $\tilde{\epsilon}$ *e* $\bar{\omega}$ *respectivamente as representações de* ϵ *e de* ω *com respeito a* s*. Dados* $x \in U$, $v \in T_xM$ *e fazendo* $p = s(x)$, $n = \tilde{\epsilon}(x)$ *então a derivada covariante* $\nabla_v \epsilon$ *é dada por (onde para* $X \in \mathfrak{g}$*, denotamos por* X^N *o campo vetorial induzido na variedade* N*):*

$$\nabla_v \epsilon = \mathrm{d}\hat{p}_n\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \big(\bar{\omega}_x(v)\big)^N(n)\big] \in \mathrm{Ver}_{[p,n]}(P \times_G N).$$

Demonstração. Como $\epsilon = \mathfrak{q} \circ (s, \tilde{\epsilon})$, temos que:

$$\mathrm{d}\epsilon_x(v) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\mathrm{d}s_x(v), \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big);$$

escrevendo $\mathrm{d}s_x(v) = \zeta_{\mathrm{hor}} + \zeta_{\mathrm{ver}}$ com $\zeta_{\mathrm{hor}} \in \mathrm{Hor}_p(P)$ e $\zeta_{\mathrm{ver}} \in \mathrm{Ver}_p(P)$ então:

$$\mathrm{d}\epsilon_x(v) = \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}(\zeta_{\mathrm{hor}}, 0) + \mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\zeta_{\mathrm{ver}}, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big), \tag{A.15}$$

e $\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}(\zeta_{\mathrm{hor}}, 0) \in \mathrm{Hor}_{[p,n]}(P \times_G N)$. O Lema A.2.4 implica, então, que o segundo termo do lado direito de (A.15) é igual a $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon_x(v)\big)$ e que:

$$\mathrm{d}\mathfrak{q}_{(p,n)}\big(\zeta_{\mathrm{ver}}, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v)\big) = \mathrm{d}\hat{p}_n\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + X^N(n)\big],$$

onde $X \in \mathfrak{g}$ satisfaz $\zeta_{\mathrm{ver}} = \mathrm{d}\beta_p(1)\cdot X$. Claramente, $X = \omega_p\big(\mathrm{d}s_x(v)\big) = \bar{\omega}_x(v)$. Assim, segue a tese. □

Corolário A.3.5. *Seja* $\Pi : P \to M$ *um fibrado* G*-principal com conexão* $\mathrm{Hor}(P)$ *e denote por* ω *sua forma de conexão. Sejam* E_0 *um espaço vetorial real de dimensão finita e* $\rho : G \to \mathrm{GL}(E_0)$ *uma representação lisa de* G *em* E_0*; considere o fibrado associado correspondente* $P \times_G E_0$*, munido da conexão generalizada associada a* $\mathrm{Hor}(P)$*. Sejam* $s : U \to P$, $\epsilon : U \to P \times_G E_0$ *seções locais lisas e denote por* $\tilde{\epsilon}$ *e* $\bar{\omega}$ *respectivamente as representações* *de ϵ e de ω com respeito a s. Dados $x \in U$, $v \in T_xM$ e fazendo $p = s(x)$, então a derivada covariante $\nabla_v\epsilon$ é dada por:*

$$\nabla_v\epsilon = \hat{p}\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\rho}\big(\bar{\omega}_x(v)\big)\cdot\tilde{\epsilon}(x)\big] = \big[p, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\rho}\big(\bar{\omega}_x(v)\big)\cdot\tilde{\epsilon}(x)\big],$$

onde $\bar{\rho} = \mathrm{d}\rho(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E_0)$. Em particular, se G é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(E_0)$ e ρ é a inclusão então:

$$\nabla_v\epsilon = \hat{p}\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v)\cdot\tilde{\epsilon}(x)\big] = [p, \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v)\cdot\tilde{\epsilon}(x)]. \tag{A.16}$$

Demonstração. Segue de modo direto do Lema A.3.4 □

A.4 Sobre Conexões Generalizadas

De modo a relacionarmos conexões lineares e conexões principais na próxima seção, precisamos de alguns resultados fundamentais a respeito de conexões generalizadas. Assim sendo, começamos com o seguinte:

Lema A.4.1. *Sejam $\Pi : \mathcal{E} \to M$, $\Pi' : \mathcal{E}' \to M$ submersões lisas e $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$, $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ conexões generalizadas em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ respectivamente. Denote por ∇ e ∇' respectivamente os operadores de derivada covariante correspondentes a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ e $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$. Dada uma função lisa $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ que preserva fibra então as seguintes condições se equivalem:*

(a) ϕ preserva conexão;

(b) $\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) \subset \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$, para todo $e \in \mathcal{E}$;

(c) para qualquer seção local lisa $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ de Π, vale:

$$\nabla'_v(\phi\circ\epsilon) = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}(\nabla_v\epsilon), \tag{A.17}$$

para todo $x \in U$ e todo $v \in T_xM$.

Se $\Pi : \mathcal{E} \to M$ tem a propriedade de extensão global então as condições (a), (b) e (c) são equivalentes a:

(d) para toda seção global lisa $\epsilon : M \to \mathcal{E}$ de Π, a igualdade (A.17) vale, para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$.

Demonstração. Na equivalência entre (a) e (b) é obvio que (a) implica (b). Para a recíproca, observe o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} T_e\mathcal{E} \arrow[rr, "\mathrm{d}\phi_e"] \arrow[dr, "\mathrm{d}\Pi_e"'] & & T_{\phi(e)}\mathcal{E}' \arrow[dl, "\mathrm{d}\Pi'_{\phi(e)}"] \\ & T_xM & \end{tikzcd} \tag{A.18}$$

Como ambas $\mathrm{d}\Pi_e$ e $\mathrm{d}\Pi'_{\phi(e)}$ são sobrejetoras, com $T_e\mathcal{E} = \mathrm{Hor}_e(\mathcal{E}) \oplus \mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})$, segue que é $\mathrm{d}\phi_e$ injetora e que $T_{\phi(e)}\mathcal{E}' = \mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) \oplus \mathrm{Ver}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$. Uma vez que $\mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}') \cap \mathrm{Ver}_{\phi(e)}(\mathcal{E}') = \{0\}$, segue que $\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) \subset \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$ só e somente se $\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) = \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$.

Assuma, agora, (a) e provemos (c). Denote por $\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}$ e $\mathfrak{p}'_{\mathrm{ver}}$ as projeções verticais determinadas por $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ e por $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$, respectivamente. A partir de (2.5) e de $\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Ver}_e(\mathcal{E})\big) \subset \mathrm{Ver}_{\phi(e)}(\mathcal{E}')$ obtemos:

$$\mathfrak{p}'_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\phi_e(\zeta)\big) = \mathrm{d}\phi_e\big(\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}(\zeta)\big),$$

para todo $e \in \mathcal{E}$ e todo $\zeta \in T_e\mathcal{E}$. Assim, dada uma seção local lisa $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ de Π, temos:

$$\begin{aligned}\nabla'_v(\phi \circ \epsilon) = \mathfrak{p}'_{\mathrm{ver}}\big[\mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}\big(\mathrm{d}\epsilon_x(v)\big)\big] = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}\big[\mathfrak{p}_{\mathrm{ver}}\big(\mathrm{d}\epsilon_x(v)\big)\big]& \\ = \mathrm{d}\phi_{\epsilon(x)}(\nabla_v\epsilon),&\end{aligned}$$

para todo $x \in U$ e todo $v \in T_xM$. Isso prova (c). Reciprocamente, assuma (c) e provemos (a). Seja $e \in \mathcal{E}$ fixado e defina $\Pi(e) = x \in M$. Escolha uma subvariedade arbitrária S de $\mathcal{E}$ com $e \in S$ e $T_eS = \mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})$. Já que:

$$\mathrm{d}(\Pi|_S)_e = \mathrm{d}\Pi_e|_{T_eS} : T_eS \longrightarrow T_xM$$

é um isomorfismos então, tomando um S possivelmente menor, assumimos $\Pi|_S$ como sendo um difeomorfismo liso sobre uma vizinhança aberta U de x em M. Então:

$$\epsilon = (\Pi|_S)^{-1} : U \longrightarrow \mathcal{E}$$

é uma seção local lisa de Π, $\epsilon(x) = e$ e ϵ é paralelo em x com respeito a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$. Agora (A.17) implica que $\phi \circ \epsilon$ é paralelo em x com respeito a $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}')$ e, assim:

$$\mathrm{d}\phi_e\big(\mathrm{Hor}_e(\mathcal{E})\big) = (\mathrm{d}\phi_e \circ \mathrm{d}\epsilon_x)(T_xM) = \mathrm{d}(\phi \circ \epsilon)_x(T_xM) = \mathrm{Hor}_{\phi(e)}(\mathcal{E}'),$$

provando (a). Finalmente, assumindo que $\Pi : \mathcal{E} \to M$ tem a propriedade de extensão global, provemos que (a), (b) e (c) são todos equivalentes a (d). Obviamente (c) implica (d). Para provarmos que (d) implica (a) repetimos os mesmos passos da demonstração de que (c) implica (a), tendo em mente que a seção local lisa $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ de Π construída naquela prova pode ser substituída por uma seção global lisa $\bar{\epsilon} : M \to \mathcal{E}$. □

Corolário A.4.2. *Seja* $\Pi : \mathcal{E} \to M$ *uma submersão lisa munida de conexões generalizadas* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ *e* $\mathrm{Hor}'(\mathcal{E})$*; denote por* ∇ *e* ∇' *respectivamente os operadores derivada covariante correspondentes a* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E})$ *e* $\mathrm{Hor}'(\mathcal{E})$*. Se:*

$$\nabla_v \epsilon = \nabla'_v \epsilon, \tag{A.19}$$

para toda seção local lisa $\epsilon : U \to \mathcal{E}$ *de* Π *e para todo* $v \in TM|_U$*, então* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}) = \mathrm{Hor}'(\mathcal{E})$*. Além disso, se* Π *possui a propriedade de extensão global e se* (A.19) *vale para toda seção global lisa* $\epsilon : M \to \mathcal{E}$ *de* Π *e para todo* $v \in TM$ *então* $\mathrm{Hor}(\mathcal{E}) = \mathrm{Hor}'(\mathcal{E})$*.*

Demonstração. Aplique o Lema A.4.1 com ϕ sendo a aplicação identidade de $\mathcal{E}$. □

A.5 A relação entre conexões lineares e conexões principais

Sejam $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M com fibra típica E_0 e $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ uma conexão principal no fibrado de referenciais $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Tal conexão principal induz uma conexão associada $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0\big)$ no fibrado associado $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0$ (veja a Seção A.3). A *função contração* $\mathcal{C}^E$ definida por

$$\mathcal{C}^E : \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0 \ni [p, e_0] \longmapsto p(e_0) \in E, \tag{A.20}$$

leva $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0\big)$ na conexão generalizada $\mathrm{Hor}(E)$ em E, i.e., $\mathrm{Hor}(E)$ é a única conexão generalizada em E que faz com que o difeomorfismo liso $\mathcal{C}^E$ preserve conexão. Mais explicitamente, $\mathrm{Hor}(E)$ é definida por:

$$\mathrm{Hor}_{p(e_0)}(E) = \mathrm{d}\mathcal{C}^E_{[p,e_0]}\big[\mathrm{Hor}_{[p,e_0]}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0\big)\big], \tag{A.21}$$

para todo $[p, e_0] \in \mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0$.

Definição A.5.1. *Sejam* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável* M *com fibra típica* E_0 *e* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *uma conexão principal no fibrado de referenciais* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$*. A conexão generalizada* $\mathrm{Hor}(E)$ *em* E *definida por* (A.21) *é chamada de conexão generalizada* induzida *por* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$*.*

A conexão generalizada no fibrado vetorial E e no fibrado associado $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0$ define os operadores derivada covariante para seções locais lisas de E e de $\mathrm{FR}_{E_0}(E) \times E_0$, respectivamente; usemos o símbolo ∇ para denotar ambos os operadores. Como $\mathcal{C}^E$ preserva conexão, pelo Lema A.4.1 temos:

$$\nabla_v\epsilon = \mathrm{d}\mathcal{C}^E\big[\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon\big)\big],$$

para toda seção local lisa $\epsilon : U \to E$ e para todo $v \in TM|_U$. Já que $\mathcal{C}^E$ é linear nas fibras, sua diferencial restrita ao espaço vertical é apenas a restrição da função contração $\mathcal{C}^E$; assim:

$$\nabla_v\epsilon = \mathcal{C}^E\big[\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon\big)\big], \tag{A.22}$$

para todo $v \in TM|_U$ e todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$.

Seja agora $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ um E_0-referencial local liso do fibrado vetorial E e seja $\tilde{\epsilon} : U \to E_0$ a representação da seção local lisa $\epsilon : U \to E$ de E em relação a s; então:

$$(\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon = \mathfrak{q}\circ(s,\tilde{\epsilon}),$$

onde $\mathfrak{q} : \mathrm{FR}_{E_0}(E)\times E_0 \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)\times_{\sim} E_0$ denota a função quociente. A representação de $(\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon$ em relação a s é, também, igual a $\tilde{\epsilon}$. Usando a igualdade (A.16) obtemos:

$$\nabla_v\big((\mathcal{C}^E)^{-1}\circ\epsilon\big) = [s(x), \mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v)\cdot\tilde{\epsilon}(x)], \tag{A.23}$$

para todo $x \in U$ e todo $v \in T_xM$, onde $\bar{\omega}$ denota a representação com respeito a s da forma de conexão ω correspondente a $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$. A partir de (A.22) e (A.23) obtemos:

$$\nabla_v\epsilon = s(x)\big[\mathrm{d}\tilde{\epsilon}_x(v) + \bar{\omega}_x(v)\cdot\tilde{\epsilon}(x)\big], \tag{A.24}$$

para todo $\epsilon \in \mathbf{\Gamma}(E|_U)$, todo $x \in U$ e todo $v \in T_xM$. Se fizermos:

$$\Gamma_x(v) = \mathcal{I}_{s(x)}\big(\bar{\omega}_x(v)\big) = s(x)\circ\bar{\omega}_x(v)\circ s(x)^{-1} \in \mathfrak{gl}(E_x), \tag{A.25}$$

para todo $x \in U$, $v \in T_xM$, então a fórmula (A.24) torna-se (lembre-se de (2.9)):

$$\nabla_v\epsilon = \mathfrak{d}^s_v\epsilon + \Gamma_x(v)\cdot\epsilon(x).$$

Segue, então, que ∇ é de fato uma conexão no fibrado vetorial E e que o tensor de Christoffel Γ de ∇ em relação ao E_0-referencial local liso s é dado por (A.25). Provamos assim:

Proposição A.5.2. *Sejam* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável* M *com fibra típica* E_0 *e* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *uma conexão principal no fibrado de referenciais* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$*; denote por* $\mathrm{Hor}(E)$ *a conexão generalizada induzida em* E*. O operador derivada covariante* ∇ *correspondente a* $\mathrm{Hor}(E)$ *é uma conexão linear no fibrado vetorial* E*; além disso, se* $s : U \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$ *é um* E_0*-referencial local liso de* E *então o tensor de Christoffel de* ∇ *com respeito ao* E_0*-referencial local liso* s *e a representação* $\bar{\omega} = s^*\omega$ *da forma de conexão* ω *de* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *em relação a* s *são relacionados pela igualdade* (A.25).

Como recíproca da Proposição A.5.2, mostraremos que toda conexão linear ∇ em E é induzida por uma única conexão principal no fibrado principal de referenciais de E.

Nota A.5.3. *Se* U *é um aberto de* M *e* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *é uma conexão em* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ *então temos uma conexão correspondente* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)|_U\big)$ *em* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)|_U = \mathrm{FR}_{E_0}(E|_U)$*. Claramente, se* ∇ *é a conexão em* E *associada a* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *então a conexão em* $E|_U$ *associada a* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)|_U\big)$ *é apenas* ∇^U *(lembre-se do Lema 1.1.2).*

Proposição A.5.4. *Seja* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial com fibra típica* E_0*. Para toda conexão linear* ∇ *no fibrado vetorial* E *existe uma única conexão principal* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *no fibrado principal de referenciais* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ *tal que* ∇ *é o operador derivada covariante correspondente a conexão generalizada induzida* $\mathrm{Hor}(E)$ *em* E*.*

Demonstração. É fácil ver que para provarmos a proposição basta considerarmos o caso onde o fibrado de referenciais $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ admite uma seção local lisa globalmente definida $s : M \to \mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Para isso basta observar a Nota A.5.3 e os seguintes dois fatos:

Primeiro: Se $\Pi : P \to M$ é um fibrado G-principal e $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura de abertos de M. Assumindo que, para cada $i \in I$, é dada uma conexão $\mathrm{Hor}(P|_{U_i})$ no fibrado principal $P|_{U_i}$, e que para todo $i, j \in I$ e todo $x \in U_i \cap U_j$ temos $\mathrm{Hor}_x(P|_{U_i}) = \mathrm{Hor}_x(P|_{U_j})$. Então existe uma única conexão $\mathrm{Hor}(P)$ em P tal que $\mathrm{Hor}_x(P) = \mathrm{Hor}_x(P|_{U_i})$, para todo $i \in I$ e todo $x \in U_i$.

Segundo: Sejam $\Pi : E \to M$ um fibrado vetorial e ∇ uma conexão em E.

- Dados abertos U, V de M com $V \subset U$, se consideramos a conexão ∇^U induzida por ∇ em $E|_U$ e a conexão $(\nabla^U)^V$ induzida por ∇^U em $(E|_U)|_V = E|_V$, então $(\nabla^U)^V$ é igual a ∇^V.

- Seja ∇' uma outra conexão em E. Se todo ponto de M tem uma vizinhança aberta U em M tal que $\nabla^U = \nabla'^U$, então $\nabla = \nabla'$.

Assim, assumiremos que tal seção s existe. Seja Γ o tensor de Christoffel de ∇ em relação a s. Dada uma conexão $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ com forma de conexão ω, denotemos por $\bar{\omega}$ a representação de ω com respeito a s. Então ∇ é associada a $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ se e somente se (A.25) vale, para todo $x \in M$. No entanto (A.25) define uma única 1-forma C^∞ a valores em $\mathfrak{gl}(E_0)$ definida em M e, assim, o Lema 2.3.6 nos diz que existe uma única forma de conexão ω em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ com $\bar{\omega} = s^*\omega$, donde segue a tese. $\square$

Corolário A.5.5. *Seja* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial com fibra típica* E_0*. Dada uma conexão linear* ∇ *em* E *então existe uma única conexão generalizada* $\mathrm{Hor}(E)$ *em* E *cujo operador derivada covariante é* ∇*.*

Demonstração. A existência segue da Proposição A.5.4 e a unicidade do Corolário A.4.2, lembrando que a submersão Π tem a propriedade de extensão global. $\square$

Corolário A.5.6. *Seja* $\Pi : E \to M$ *um fibrado vetorial com fibra típica* E_0*. Se* $\mathrm{Hor}(E)$ *é uma conexão generalizada em* E *cujo operador derivada covariante* ∇ *é uma conexão linear em* E *então existe uma única conexão principal* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$ *no fibrado principal de referenciais* $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ *tal que* $\mathrm{Hor}(E)$ *é induzida por* $\mathrm{Hor}\big(\mathrm{FR}_{E_0}(E)\big)$*.*

O resultado das Proposições A.5.2, A.5.4 e dos Corolários A.5.5 e A.5.6 podem ser resumidos da seguinte maneira: o conjunto das conexões lineares num fibrado vetorial E tem uma correspondência um-a-um com um subconjunto do conjunto de todas as conexões generalizadas de E. Tal subconjunto do conjunto das conexões generalizadas de E é precisamente o conjunto das conexões generalizadas induzida por conexões principais em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$. Além disso, existe uma bijeção entre o conjunto das conexões principais em $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ e o conjunto das conexões generalizadas em E cujo operador derivada covariante é uma conexão linear, em especial, há uma bijeção entre o conjunto das conexões principais de $\mathrm{FR}_{E_0}(E)$ e o conjunto das conexões lineares de E.

Referências Bibliográficas

[1] C. B. Allendoerfer, *Rigidity for spaces of class greater than one*, Amer. J. of Math. **61** (1939), 633–644.

[2] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersion*, Mathematics Lecture Series, 13, (1990), Publish or Perish.

[3] M. Dajczer, D. Gromoll, *Real Kahler submanifolds and uniqueness of the Gauss map*, J. Diff. Geometry **22** (1985), 13-28.

[4] M. Dajczer, L. Rodrígues, *Rigidity of Real Käehler Submanifolds*, Duke Math. J. **53** (1986), 211-220

[5] B. Daniel, *Isometric immersions into $S^n \times \mathbb{R}$ and $H^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[6] B. Daniel, *Isometric Immersions into* 3*-Dimensional Homogeneous Manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici **82**, (2007), 87–131.

[7] S. Dumitrescu, A. Zeghib, *Géométries Lorentziennes de Dimension 3: Classification et Complétude*, preprint 2006 (`arXiv:math/0703846`).

[8] J. Eells, L. Lemaire, *A Report On Harmonic Maps*, Bull. London Math. Soc., 10 (1978) 1-68.

[9] J. Eells, J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 86 (1964) 109-160.

[10] E. Falbel, C. Gorodski, *On contact sub-Riemannian symmetric spaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28** (1995), n. 5, 571—589.

[11] E. Falbel, C. Gorodski, M. Rumin, *Holonomy of Sub-Riemannian Manifolds*, Internat. J. Math., 8 (1997), no. 3, 317–344.

[12] E. Falbel, P. Piccione, D. V. Tausk, *An isometric immersion theorem into contact sub-Riemannian spaceforms*, preprint 2008.

[13] M. Guediri, *Sur la complétude des pseudo-métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie nilpotens*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec., Torino, 52(4), (1994), 371-376.

[14] S. D. B. Lodovici, *An Isometric Immersion Theorem in* Sol^3, Matemática Contemporânea, **30**, (2006), 109-123.

[15] S. D. B. Lodovici, F. Manfio, *Isometric immersions into a homogeneous Lorentzian Heisenberg group and rigidity*, to appear at Mathematical Proceedings, Cambridge Philosophical Society.

[16] W. H. Meeks III, G. Tinaglia, *The rigidity of embedded constant mean curvature surfaces* , preprint 2008 (`arXiv:0801.3409`).

[17] J. Milnor, *Curvature of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, Advances in Mathematics, **21**, 293-329 (1976).

[18] P. Piccione, D. V. Tausk, *An existence theorem for G-structure preserving affine immersions*, Indiana Univ. Math. J., **57** (2008), 1431–1465.

[19] P. Piccione, D. V. Tausk, *The theory of connections and* **G***-structures. Applications to affine and isometric immersions*, XIV Escola de Geometria, UFBA, Salvador, ISBN 85-244-0248-2 (2006).

[20] N. Rahmani, S. Rahmani, *Lorentzian geometry of the Heisenberg group*, Geom. Dedicata, 118, (2006), 133-140.

[21] P. Scott, *The Geometries of 3-Manifolds*, The Bulletin of the London Mathematical Society, 15, 401-487 (1983).

[22] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer (2001).

[23] R. T. Smith, *Harmonic Maps of Spheres*, Amer. J. Math. **97**, No. 2 (1975) 364–385.

[24] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc., Houston (1979).

[25] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, ISBN 0-387-90894-3 (1983).

Índice Remissivo