

MA21 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (2017)
LISTA DE EXERCÍCIOS

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercício 1. Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O Teorema Chinês dos Restos afirma que, dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a , com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j . Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando dividido por 3 e 7, respectivamente. Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

Restos por 7 →	0	1	2	3	4	5	6
Restos por 3 ↓							
0		X				X	
1				X		19	X
2		X			X		

Qual a soma dos números das casas marcadas com 'X'?

Exercício 2 (2,5). Encontre todas as soluções dos sistemas:

(a)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2a \equiv 1 \pmod{11} \\ 3a \equiv 1 \pmod{13} \\ 5a \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

[Dica: *Escreva as congruências como* $[2, 3, 5]a \equiv \dots$ ']

(c)

$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \pmod{6} \\ 15x \equiv 6 \pmod{21} \\ 12x \equiv 4 \pmod{20} \end{cases}$$

[Cuidado! 6, 21 e 20 não são dois-a-dois primos.]

Exercício 3. Mostre que existem infinitos inteiros x que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^2 \equiv -1 \pmod{5} \\ x^2 \equiv -1 \pmod{17} \\ x^2 \equiv -1 \pmod{257} \end{cases}$$

Exercício 4. Determine todos os restos possíveis da divisão do quadrado de um número primo com 120 por 120.

Exercício 5. Mostre que existe um inteiro múltiplo de 241^2 terminado em 241.

[Dica: *Use o teorema de Bézout para 241 e 1000.*]

- Exercício 6.** (a) Determine todas as soluções inteiras da equação $5x + 9y = 1$.
 (b) Quais seriam as soluções naturais de $5x + 9y = 1$?

Exercício 7. Resolva nos inteiros a equação $2x + 3y + 5z = 11$.

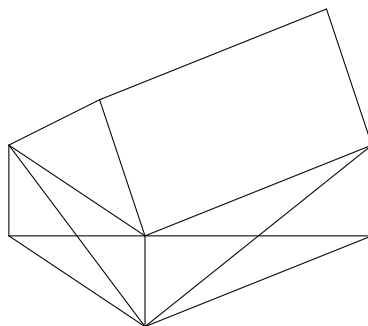
Exercício 8. Encontre todas as soluções em inteiros da equação $25x^2 - 9y^2 = 1$.
 [Dica: Resolva a equação Diofantina $25a + 9b = 1$.]

Exercício 9. Nas arestas de um dodecaedro regular marcam-se dois pontos, dividindo a aresta em três partes iguais. Trunca-se o dodecaedro de forma que planos passem nos três pontos mais próximos de cada vértice, marcados anteriormente. Após a retirada das 20 pirâmides geradas pelos planos, determine:

- (a) Quantos vértices, faces e arestas possui esse novo poliedro.
 (b) Quantas diagonais ele possui?

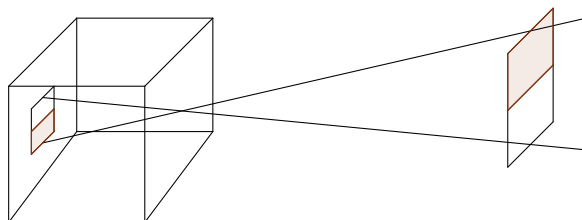
Exercício 10. Veja mapa da América do Sul. Existem 13 países mais o oceano, que também consideramos um país. Observa-se que não existe nenhum ponto que pertença a mais de 3 países. Quantas linhas de fronteira existem na América do Sul?

Exercício 11. Verifique se o desenho na figura abaixo, pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de uma linha já traçada.



Exercício 12. Uma câmera fotográfica rudimentar pode ser construída fazendo um pequeno furo em uma caixa, de modo que imagens de objetos sejam formadas na parede oposta e registradas em um filme, como ilustrado na figura abaixo. Suponha que a câmara da figura tenha 10 cm de profundidade.

- (a) Que dimensões terá a fotografia de uma janela de 3 m de comprimento e 1,5 m de largura, paralela ao plano do filme e situada a 6 m da câmera?
 (b) Se uma pessoa tem 1,75 m de altura e o filme usado é de $35 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$, a que distância mínima da câmera a pessoa deverá ficar para que possa ser fotografada de corpo inteiro?



Exercício 13. Qual o ângulo entre dois planos que contenham (duas) faces de um tetraedro regular?

Exercício 14. Use a regra de Cramer (sistemas lineares) para provar que os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$ (num sistema de coordenadas cartesiano) são coplanares se e somente se:

$$\begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercício 15. Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto de base quadrada, tem as dimensões, em centímetros $24 \times 24 \times 40$.

Sera produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em quantos por cento?

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: <http://shins.yolasite.com/>