

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA A-DIURNO (PROVA TIPO A)
SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 4.
- A regra de L'Hopital não deveria ser utilizada nessa prova. Se utilizada em algum exercício, o aluno NÃO receberá nota integral nesse exercício.
- Boa Prova!

EXERCÍCIOS

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{sen} x \cos 2 + \operatorname{sen} 2 \cos x}{x^2 - x - 6}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 5x^{213} - 2x^{500}}{x^2 + 3x^{114} + x^{314}}$$

Resolução: (a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{sen} x \cos 2 + \operatorname{sen} 2 \cos x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{sen}(x+2)}{(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{5}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 5x^{213} - 2x^{500}}{x^2 + 3x^{114} + x^{314}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{500}(x^{-499} - 5x^{-287} - 2)}{x^{314}(x^{-312} + 3x^{-200} + 1)} = -\infty$$

Exercício 2. Um cardióide (curva em formato de coração) tem equação $(x^2 + y^2 - 25x)^2 = 25^2(x^2 + y^2)$. Encontre a equação da reta tangente ao cardióide no ponto $P = (-4, 3)$.

Resolução:

Derivando $(x^2 + y^2 - 25x)^2 = 25^2(x^2 + y^2)$ implicitamente em x temos:

$$2(x^2 + y^2 - 25x)(2x + 2yy' - 25) = 25^2(2x + 2yy').$$

Substituindo x por -4 e y por 3 e isolando y' temos:

$$y' = -\frac{13}{9}.$$

Daí a equação da reta é:

$$r : (y - 3) = -\frac{13}{9}(x + 4).$$

Exercício 3. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sec x$;

(b) $f(x) = \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{x}$;

(c) $f(x) = x|x|$ (Justifique a derivada em $x = 0$)

Resolução: (a) Temos $f(x) = (\cos x)^{-1}$. Daí $f'(x) = \sec x \tan x$.

(b)

$$f'(x) = \frac{\left(2 \cos(\sqrt{x}) (-\operatorname{sen}(\sqrt{x})) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) x - \cos^2(\sqrt{x})}{x^2}$$

(c) Temos:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

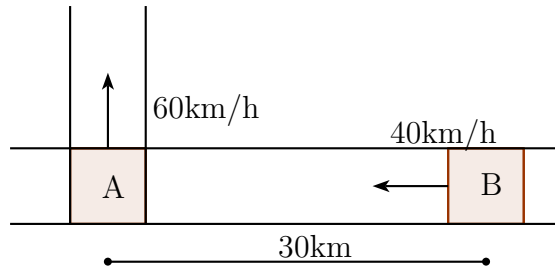
Daí:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$ temos:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = 0$$

Exercício 4. Um carro B se encontra 30km a leste de um carro A . Ao mesmo tempo, o carro A começa a se mover para o norte com velocidade de 60km/h e o carro B para oeste com velocidade de 40km/h. Encontre a distância mínima entre os carros.



Resolução:

Equação do movimento de A: $y(t) = 60t$.

Equação do movimento de B: $x(t) = 30 - 40t$.

Se $d(t)$ é a distância entre A e B no instante t temos $d(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$. Seja $f(t) = d(t)^2$. Temos que o mínimo de f e d devem coincidir (pois $d \geq 0$ e x^2 é função crescente para $x \geq 0$). Assim:

$$f(t) = 5200t^2 - 2400t + 900.$$

O mínimo deve ocorrer quando $f'(t) = 0$:

$$10400t - 2400 = 0.$$

Daí $t = 3/13$.

Substituindo nas equações:

$$d(t) = \sqrt{\left(\frac{180}{13}\right)^2 + \left(\frac{270}{13}\right)^2}.$$

Exercício 5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$.

[Dica: Estude $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$.]

Resolução:

Se $f(0) = f(1/2)$ não há nada a fazer. Caso contrário tome $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$. Como f é contínua em $[0, 1]$ g é contínua em $[0, 1/2]$.

Note que:

$$g(0) = f(0) - f(1/2) = f(1) - f(1/2) = -(f(1/2) - f(1)) = -g(1/2).$$

Assim $g(0)$ e $g(1/2)$ têm sinais opostos.

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x_0 \in (0, 1/2)$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - f(x_0 + 1/2) = 0$. Mas daí:

$$f(x_0) = f(x_0 + 1/2).$$