# FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA B-DIURNO (PROVA TIPO A)
# SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

**IMPORTANTE:**

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número** 1 **a** 4**.**
- A regra de L'Hopital não deveria ser utilizada nessa prova. Se utilizada em algum exercício, o aluno NÃO receberá nota integral nesse exercício.
- Boa Prova!

## Exercícios

**Exercício 1.** Calcule os seguintes limites:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2}$$

ERRATA (informada em sala): $\lim_{x\to-\infty}$

(b)

$$\lim_{x\to0+}\frac{-x^{231}+3x^{240}}{4x^{250}+5x^{302}-x^{400}}$$

**Resolução:** (a)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2-3}{x+2}\right)^{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^{-\frac{x+2}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}$$

(b)

$$\lim_{x\to0+}\frac{-x^{231}+3x^{240}}{4x^{250}+5x^{302}-x^{400}}=\lim_{x\to0+}\frac{x^{231}(-1+3x^{9})}{x^{250}(4+5x^{52}-x^{150})}=-\infty$$

**Exercício 2.** Uma lemniscata ("símbolo do infinito") tem equação $7(x^2+y^2)^2=25^2(x^2-y^2)$. Encontre a equação da reta tangente à lemniscata no ponto $P=(4,3)$.

**Resolução:**
Derivando $7(x^2+y^2)^2=25^2(x^2-y^2)$ implicitamente em $x$ temos:

$$14(x^2+y^2)(2x+2yy')=25^2(2x-2yy').$$

Substituindo $x$ por 4 e $y$ por 3 e isolando $y'$ temos:

$$y'=\frac{44}{117}.$$

Daí a equação da reta é:

$$r:(y-3)=\frac{44}{117}(x-4).$$

**Exercício 3.** Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x)=x^3|x|$ (Justifique a derivada em $x=0$)
(b) $f(x)=x\tan x$;
(c)

$$f(x)=\frac{\sqrt{\text{sen}x^2}}{x}$$

**Resolução:** (a) Temos:

$$f(x) = x^3|x| = \begin{cases} x^4 \text{ se } x \geq 0 \\ -x^4 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Daí:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ se } x \geq 0 \\ -4x^3 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$ temos:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3|h|}{h} = 0$$

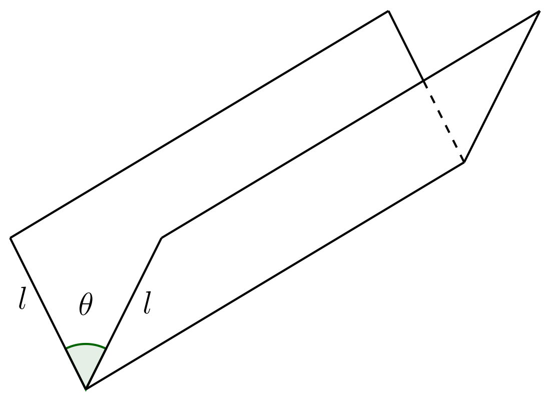
(b)

$$f'(x) = \tan x + x \sec^2 x$$

(c)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{\text{sen}x^2}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x\right) x - \sqrt{\text{sen}x^2}}{x^2}$$

**Exercício 4.** Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura $2l$ dobrando-se essa ao meio de modo que os lados da calha façam ângulo $\theta$ entre si. Qual deve ser $\theta$ de modo que a capacidade de carregar água na calha seja máxima?




**Resolução:**
Para que a capacidade de carregar água seja máxima a área do triângulo de lados $l$ e ângulo $\theta$ deve ser máxima. Se $S(\theta)$ é a área desse triângulo temos:

$$S(\theta) = \frac{l^2 \text{sen}\theta}{2}$$

(Olhar triângulo com base $l$...)

A área máxima ocorre quando $S'(\theta) = 0$. Daí:

$$\frac{l^2}{2} \cos\theta = 0.$$

Assim devemos ter $\cos\theta = 0$, ou seja $\theta = \pi/2$.

**Exercício 5.** Seja $f(x) = 1/(x^2 - 1)$.

(a) Determine o domínio de $f$ e, caso existam, suas assíntotas.
(b) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $f$.
(c) Estude a concavidade de $f$.
(d) Use os itens anteriores para esboçar o gráfico de $f$.

**Resolução:** (a) Domínio: $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1/(x^2 - 1) = 0$$

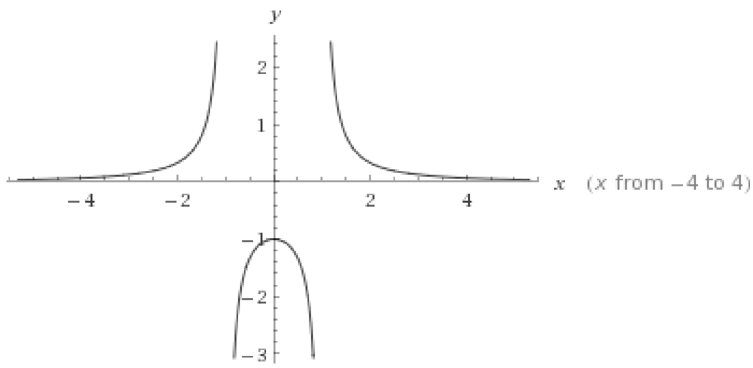
Assíntotas Verticais:

$$\lim_{x\to 1+} 1/(x^2-1) = \lim_{x\to(-1)-} 1/(x^2-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-} 1/(x^2-1) = \lim_{x\to(-1)+} 1/(x^2-1) = -\infty$$

(b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Daí $f$ é crescente em $x<0$ ($f'>0$) e decrescente em $x>0$ ($f'<0$).

(c) $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x-1)^3}$. Daí $f$ tem concavidade para cima em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (onde $f''>0$) e concavidade para baixo em $(-1,1)$ (onde $f''<0$).




(d)