FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA A-DIURNO (PROVA 2 - TIPO I) SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões.
- **Formulário:**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Exercícios

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) **(0,5)**

$$\lim_{x\to\pi/2-}(\sec x - \tan x)$$

(b) **(1,0)**

$$\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}}$$

(c) **(1,0)**

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mathrm{sen}(x)}$$

Resolução: (a)

$$\lim_{x\to\pi/2-}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\pi/2-}\frac{1-\mathrm{sen}x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2-}\frac{-\cos x}{-\mathrm{sen}x} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{-1/x^2} = +\infty$$

(c)

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mathrm{sen}(x)} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{1/\mathrm{sen}x}} = e^0 = 1$$

Pois:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\mathrm{sen}x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-\cos x/\mathrm{sen}^2 x} = 0$$

Exercício 2. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(0,5)**

$$\int_1^e \frac{2+\ln(x)}{x}dx$$

(b) **(0,5)**

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}^2(x)dx$$

(c) **(1,0)**

$$\int x\mathrm{sen}(3x)dx$$

(d) **(1,0)**

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Resolução: (a) $u = 2 + \ln x$:

$$\int \frac{2+\ln(x)}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(2+\ln(x))^2}{2} + C$$

Assim:

$$\int_1^e \frac{2+\ln(x)}{x}dx = \frac{5}{2}$$

(b) $u = \text{sen}x$, $v' = \text{sen}x$:

$$\int \text{sen}^2(x)dx = -\text{sen}x\cos x + \int (1-\text{sen}^2 x)dx$$

Logo:

$$\int \text{sen}^2(x)dx = -\frac{\text{sen}x\cos x}{2} + \frac{x}{2} + C$$

Assim:

$$\int_0^\pi \text{sen}^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

(c) $u = x$, $v' = \text{sen}(3x)$:

$$\int x\text{sen}(3x)dx = -\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3}\int \cos(3x)dx = -\frac{x\cos(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(3x)}{9} + C$$

(d) $x = \text{sen}u$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \text{sen}^2 udu = -\frac{\text{sen}u\cos u}{2} + \frac{u}{2} + C = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\text{arcsen}x}{2} + C$$

Exercício 3. Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

(a) **(1,5)**

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx$$

(b) **(1,0)**

$$\int \frac{x^3-x^2-3x+1}{x^2-x-6}dx$$

Resolução: (a)

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-3}$$

Logo:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx = \ln|x+2| + 2\ln|x-3| + C$$

(b)

$$\frac{x^3-x^2-3x+1}{x^2-x-6} = x + \frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

Logo:

$$\int \frac{x^3-x^2-3x+1}{x^2-x-6}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| + 2\ln|x-3| + C$$

Exercício 4. Esboce as regiões limitadas pelas curvas descritas abaixo e calcule suas áreas:

(a) **(1,0)** $y = \cos(x)$ e $y = 1 - 2x/\pi$.

(b) **(1,5)** $x = y^2 - 4y$ e $x = 2y - y^2$.

Resolução: (a)

$$A = \int_0^{\pi/2} (\cos x) - (1 - \frac{2x}{\pi})dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \frac{2x}{\pi}) - (\cos x)dx =$$

$$\left(\text{sen}x - x + \frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \left(x - \frac{x^2}{\pi} - \text{sen}x\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

(b)

$$A = \int_0^3 (2y - y^2) - (y^2 - 4y)dy = \left(-\frac{2}{3}y^3 + 3y^2\right)\Big|_0^3 = 9$$

Exercício 5. (a) **(1,5)** Use a soma de Riemann com extremos à direita e partição do intervalo de integração em n intervalos iguais para estimar a integral:

$$\int_0^2 (x^2 + 2x)dx.$$

[*Deixe sua resposta em função de* n.]

(b) **(1,0)** Calcule a integral acima (pelo Teorema Fundamental do Cálculo) e a aproximação usando a soma de Riemann para $n = 5$.

[*Pode deixar as contas indicadas apenas.*]

Resolução: (a)

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2}{n}\right) f\left(\frac{2i}{n}\right)\right],$$

onde $f(x) = x^2 + 2x$. Daí:

$$S(n) = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 n(n+1)$$

(b)

$$\int_0^2 (x^2 + 2x)dx = \frac{20}{3}$$

$$S(5) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 5 \cdot 11 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 5 \cdot 6$$