FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA B-DIURNO
(PROVA 2 - TIPO I)
SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões.
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) **(1,5)**

$$\lim_{x\to+\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) **(1,0)**

$$\lim_{x\to 0+} x^x$$

Resolução: (a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-1/x^2)\sec^2(1/x)}{(-1/x^2)} = 1$$

Ou:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\cot(1/x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(-1/x^2)(-\csc^2(1/x))} = \lim_{x\to+\infty}(x\text{sen}(1/x))^2 = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = e^0 = 1$$

Pois

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

Exercício 2. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(1,0)**

$$\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$$

(b) **(1,0)**

$$\int e^x\cos(x)dx$$

(c) **(1,0)**

$$\int \ln(x)dx$$

Resolução: (a) $u = \text{sen}x$

$$\int\text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx = \int u^2(1-u^2)du = \frac{\text{sen}^3x}{3} - \frac{\text{sen}^5x}{5} + C$$

Assim:

$$\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx = \frac{2}{15}$$

(b) 2 partes: $u_1 = \cos x$, $v_1' = e^x$; $u_2 = \text{sen}x$, $v_2' = e^x$

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x(\cos x + \text{sen}x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Daí:

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{e^x(\cos x + \text{sen}x)}{2} + C$$

(c) $u = \ln x$, $v' = 1$

$$\int \ln(x)dx = x\ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx = x\ln x - x + C$$

Exercício 3. Calcule as integrais dos seguintes quocientes de polinômios:

(a) **(1,0)**

$$\int \frac{x^2+3}{x-1}dx$$

(b) **(1,5)**

$$\int \frac{2x^2-2x-3}{x^3-3x+2}dx$$

Resolução: (a) **(1,0)**

$$\frac{x^2+3}{x-1} = x + 1 + \frac{4}{x-1}$$

Logo:

$$\int \frac{x^2+3}{x-1}dx = \frac{x^2}{2} + x + 4\ln(x-1) + C$$

(b) **(1,5)**

$$\frac{2x^2-2x-3}{x^3-3x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$$

Logo:

$$\int \frac{2x^2-2x-3}{x^3-3x+2}dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| + C$$

Exercício 4. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar as **derivadas** das seguintes funções:

(a) **(1,0)**

$$f(x) = \int_2^{x^2} \cos(\sqrt{t})dt$$

(b) **(1,5)**

$$g(x) = \int_{1/x}^{x^2} (\sqrt{t})e^t dt$$

Resolução: (a) Seja $F(t)$ primitiva de $\cos(\sqrt{t})$.

$$f'(x) = F'(x^2)2x = 2x\cos|x|$$

(b) Seja $G(t)$ primitiva de $(\sqrt{t})e^t$.

$$g'(x) = G'(x^2)2x - G'(1/x)(-1/x^2) = 2x|x|e^{x^2} + \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1}{x}}e^{1/x}$$

Exercício 5. (a) **(1,0)** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação no eixo Ox da região do plano limitada por $y = x^2$ e $y = x$.

(b) **(1,5)** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação no eixo Oy da região do plano limitada por $y = 2x^2 - x^3$.

Resolução: (a)

$$V = \int_0^1 \pi (x^2)^2 dx - \int_0^1 \pi x^2 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}\pi$$

(b)

$$V = \int_0^2 2\pi x(2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{5}\pi$$