FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA A-DIURNO
(PROVA SUBSTITUTIVA - TIPO I)
SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões.
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) **(1,0)**

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$$

(b) **(1,5)**

$$\lim_{x\to +\infty} x - \sqrt{x+5}$$

Resolução: (a)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-1/2}$$

Pois:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\text{sen} x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} x - \sqrt{x+5} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x-5}{x+\sqrt{x+5}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}} = +\infty$$

Exercício 2. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar as **derivadas** das seguintes funções:

(a) **(1,0)**

$$f(x) = \int_2^{(xe^x)} 2^{\text{sen}(t)}dt$$

(b) **(1,5)**

$$g(x) = \int_{(\ln x)/x}^{x^2} e^{t^2}dt$$

Resolução: (a) Seja $F(t)$ primitiva de $2^{\text{sen}(t)}$. Daí:

$$f'(x) = F'(xe^x)(e^x + xe^x) = 2^{\text{sen}(xe^x)}e^x(1+x)$$

(b) Seja $G(t)$ primitiva de e^{t^2}. Daí:

$$g'(x) = G'(x^2)2x - G'((\ln x)/x)\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = 2xe^{x^4} - \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)e^{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}$$

Exercício 3. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(1,0)**

$$\int \text{arcsen}(x)dx$$

(b) **(1,0)**

$$\int x(2-x)^{3/2}dx$$

(c) **(1,0)**

$$\int \text{sen}(x)\cos(2x)dx$$

Resolução: (a) $u = \text{arcsen}(x)$, $v' = 1$

$$\int \text{arcsen}(x)dx = x\text{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\text{arcsen}(x) + (1-x^2)^{1/2} + C$$

(b) $u = 2 - x$

$$\int x(2-x)^{3/2}dx = -\int (2-u)u^{3/2}du = -\frac{4}{5}(2-x)^{5/2} + \frac{2}{7}(2-x)^{7/2} + C$$

(c) **(1,0)**

$$\int \text{sen}(x)\cos(2x)dx = \int \frac{\text{sen}(3x)+\text{sen}(-x)}{2}dx = -\frac{\cos(3x)}{6} + \frac{\cos(-x)}{2} + C$$

Exercício 4. Seja $f(x) = x/(x^2+1)$.
(a) **(0,5)** Determine o domínio de f e, caso existam, suas assíntotas (escreva os limites).
(b) **(1,0)** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.
(c) **(1,0)** Estude a concavidade de f.
(d) **(0,5)** Use os itens anteriores para esboçar o gráfico de f.

Resolução: (a) $D = \mathbb{R}$, Assíntota Horizontal $x = 0$, pois:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

(b)

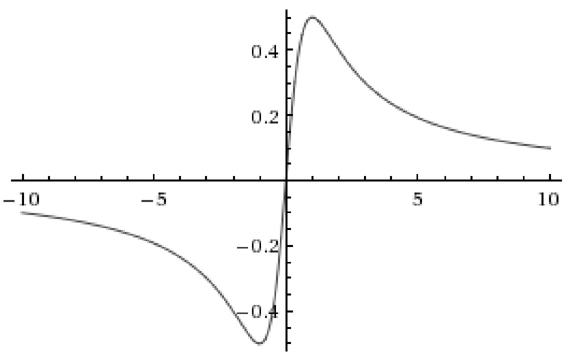
$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Logo f é crescente em $(-1,1)$, ou seja, onde $f' > 0$, e decrescente em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, ou seja, onde $f' < 0$.

(c)

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4}$$

Assim, f tem concavidade para cima em $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, ou seja, onde $f'' > 0$, e concavidade para baixo em $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$, ou seja, onde $f'' < 0$.



(d)

Exercício 5. (2,5) Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito num cone reto com 20cm de altura e 12cm de raio (da base).

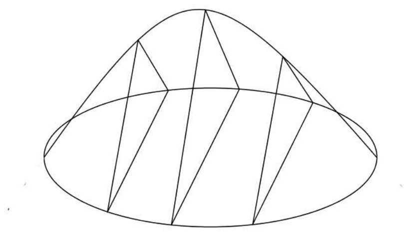
Resolução:
Sejam h e r a altura e raio do cilindro procurado, respectivamente.

$$h = 20 - \frac{5}{3}r$$

$$V = \pi r^2 h = 20\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3$$

Fazendo $V'(r) = 0$ obtemos $r = 8$ e, assim temos $h = 20/3$.

Exercício 6. (2,5) Considere o sólido que tem como base o círculo $x^2 + y^2 = 1$ e cujas seções perpendiculares ao eixo Ox são triângulos equiláteros. Calcule o volume desse sólido.



Resolução:

$$A(x) = \frac{\mathscr{L}(x)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathscr{L}(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Daí:

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\sqrt{3}dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$