FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL: TURMA B-DIURNO (PROVA SUBSTITUTIVA - TIPO I) SÃO BERNARDO DO CAMPO

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- A nota final desta prova será o mínimo entre $10,0$ e a pontuação obtida nas questões.
- **Formulário:**
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$
- Boa Prova!

Exercícios

Exercício 1. Calcule os seguintes limites:

(a) **(1,0)**
$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sen}(x)\ln(x)$$

(b) **(1,5)**
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}$$

Resolução: (a)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1/(\operatorname{sen}(x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{(1/x)}{-\cos(x)/(\operatorname{sen}^2(x))} = 0$$

(b)
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = 0$$

Exercício 2. (a) **(1,5)** Use a soma de Riemann com extremos à direita e partição do intervalo de integração em n intervalos iguais para estimar a integral:
$$\int_0^1 (x^3 - x)dx.$$

[*Deixe sua resposta em função de n.*]

(b) **(1,0)** Calcule a integral acima (pelo Teorema Fundamental do Cálculo) e a aproximação usando a soma de Riemann para $n = 5$.

[*Pode deixar as contas indicadas apenas.*]

Resolução: (a) Seja $f(x) = x^3 - x$
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^4 \sum_{i=1}^{n} i^3 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{1}{n}\right)^4 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

(b)
$$\int_0^1 (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4}$$
$$S(5) = -\frac{6}{25}$$

Exercício 3. Calcule as seguintes integrais:

(a) **(1,5)**

$$\int x^2 \text{sen} x dx$$

(b) **(1,5)**

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

[*Justificar o resultado usando as técnicas de integração conhecidas.*]

Resolução: (a) 2 partes: $u_1 = x^2$, $v_1' = \text{sen}x$; $u_2 = x$, $v_2' = \cos x$

$$\int x^2 \text{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \text{sen} x + 2 \cos x + C$$

(b) $x = 2\text{sen}u$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int \cos^2 u du = 4 \int \frac{\cos(2u)+1}{2} du = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Daí:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$$

Exercício 4. **(2,5)** Encontre o ponto na parábola $y^2 = 2x$ mais próximo ao ponto $(1, 4)$.

Resolução:
Seja $P = (1, 4)$ e $Q = (x, y)$ um ponto da parábola. Temos que:

$$d(P, Q)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2.$$

Além disso, temos que Q é da forma $(y^2/2, y)$. Logo o ponto procurado é mínimo de:

$$f(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

Fazendo $f'(y) = 0$ obtemos $y = 2$, donde segue que o ponto procurado é $(2, 2)$.

Exercício 5. **(2,5)** Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

no ponto $(-5, 9/4)$.

Resolução:
Derivando implicitamente:

$$\frac{2x}{16} - \frac{2yy'}{9} = 0$$

Fazendo $x = -5$ e $y = 9/4$ obtemos $y' = -5/4$. Assim:

$$r : \left(y - \frac{9}{4}\right) = -\frac{5}{4}(x+5).$$

Exercício 6. **(3,0)** Calcule a integral pelo método de frações parciais:

$$\int \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} dx$$

Resolução:

$$\frac{x^2-5x-10}{x^3-x^2-5x-3}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-3}$$

Assim:

$$\int \frac{x^2-5x-10}{x^3-x^2-5x-3}dx = 2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\ln|x-3|+C$$