

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

RESUMO. Exercícios Resolvidos - Geometria Analítica (BC 0404).

### 1. PROVA DE 23/07/2009

Todas as questões se referem a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $\Sigma = (O, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$  fixado.

**Obs.:** *Esboce os desenhos referentes aos exercícios para uma melhor compreensão do texto.*

**Exercício 1.** Seja  $\mathcal{E} = (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$  base de  $V^3$  e sejam  $\vec{u} = 2\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ ,  $\vec{v} = \vec{p} + 2\vec{q}$ , e  $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{r}$ . Mostre que  $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é base.

#### Resolução:

Uma vez que  $V^3$  é um espaço vetorial de dimensão 3 ( $\mathcal{E}$  é uma base com 3 vetores) basta mostrar que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são linearmente independentes (LI).

Considere  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tais que

$$(1.1) \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = 0.$$

Mostremos que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} &= \alpha(2\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) + \beta(\vec{p} + 2\vec{q}) + \gamma\left(\frac{1}{3}\vec{r}\right) \\ &= (2\alpha + \beta)\vec{p} + (\alpha + 2\beta)\vec{q} + \left(\frac{1}{3}\gamma - \alpha\right)\vec{r} \end{aligned}$$

Como  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  são LI segue de (1.1) e (1.2) que

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \frac{1}{3}\gamma - \alpha = 0 \end{cases}$$

Donde segue que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . □

#### Exercício 2.

(a) Sendo  $\vec{a} = (1, 1, 2)$  e  $\vec{b} = (0, 2, -1)$ , determine todos os vetores de norma 2 que são simultaneamente ortogonais aos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

(b) No quadrado  $ABCD$ ,  $M$  é o ponto médio de  $BC$  e  $N$  é o ponto médio de  $MC$ . Calcule  $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ , sabendo que o lado do quadrado mede 3.

#### Resolução:

- (a) Buscamos, aqui, um vetor  $\vec{v} = (x, y, z)$  tal que  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$  e  $\|\vec{v}\| = 2$ . Assim, temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = (x, y, z) \cdot (1, 1, 2) = x + y + 2z = 0;$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = (x, y, z) \cdot (0, 2, -1) = 2y - z = 0.$$

Deste sistema de equações obtemos facilmente que  $z = 2y$  e  $x = -5y$ . Daí segue que  $\vec{v}$  é da forma  $(-5y, y, 2y)$  para  $y \in \mathbb{R}$ .

Como queremos  $\|\vec{v}\| = 2$  temos que:

$$\|\vec{v}\| = \|(-5y, y, 2y)\| = \sqrt{25y^2 + y^2 + 4y^2} = \sqrt{30y^2} = \sqrt{30}|y| = 2.$$

Donde  $y = \pm \frac{2}{\sqrt{30}}$  e, portanto

$$\vec{v} = \left( \mp \frac{10}{\sqrt{30}}, \pm \frac{2}{\sqrt{30}}, \pm \frac{4}{\sqrt{30}} \right).$$

- (b) Considerarei aqui  $\mathcal{E} = (e_0, e_1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Tome o quadrado  $ABCD$  apoiado sobre o eixo das abcissas com  $A = (0, 0)$ . É fácil ver que  $M = (3, \frac{3}{2})$  e  $N = (3, 3 \cdot \frac{3}{4})$ . Daí segue que

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \left( 3, \frac{3}{2} \right) \cdot \left( 3, \frac{9}{4} \right) = \frac{99}{8}.$$

□

**Exercício 3.** São dados os pontos  $P = (1, 0, 1)$ ,  $A = (-1, 1, 3)$ ,  $B = (1, 0, 4)$  e  $C = (3, 2, 2)$ . Sejam  $m$  e  $a$ , respectivamente, as retas-suporte da mediana e da altura do  $\triangle ABC$ , relativas ao vértice  $B$ .

- Mostre que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  são mesmo vértices de um triângulo.
- Obtenha as coordenadas do baricentro  $G$  do  $\triangle ABC$ .
- Verifique se  $G \in a$ .
- Obtenha equações paramétricas de  $m$ .
- Obtenha equações paramétricas de  $a$ .
- Obtenha equações paramétricas da reta que contém a bissetriz do ângulo  $\widehat{APC}$ .

**Resolução:**

Reescrevendo os dados e realizando alguns cálculos preliminares:

$$A = (-1, 1, 3)$$

$$B = (1, 0, 4)$$

$$C = (3, 2, 2)$$

$$P = (1, 0, 1)$$

$$\vec{AB} = (2, -1, 1) \quad (B - A)$$

$$\vec{BC} = (2, 2, -2) \quad (C - B)$$

$$\vec{AC} = (4, 1, -1) \quad (C - A)$$

- (a) Mostrar que  $A, B, C$  são mesmo vértices de um triângulo significa mostrar que  $A, B, C$  não estão sobre uma mesma reta. Para isso, basta mostrar que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são LI.

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = 0$ . Então

$$(2\alpha, -\alpha, \alpha) + (4\beta, \beta, -\beta) = 0.$$

Donde deve ser satisfeito o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}.$$

Isso implica, como queríamos mostrar, em  $\alpha = \beta = 0$ .

- (b) Chamemos de  $B'$  e  $C'$  os pontos médios dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Temos:

$$B' = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$C' = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Daí segue:

$$\overrightarrow{BB'} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \left(-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Observemos agora que

$$G = B + \lambda\overrightarrow{BB'} = \left(1, \frac{3}{2}\lambda, 4 - \frac{3}{2}\lambda\right)$$

$$G = C + \theta\overrightarrow{CC'} = \left(3 - 3\theta, 2 - \frac{3}{2}\theta, 2 + \frac{3}{2}\theta\right)$$

para certos  $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ . Donde vale:

$$\begin{cases} 3\theta = 2 \\ 3\theta + 3\lambda = 4 \end{cases}.$$

Assim temos que  $\theta = \frac{2}{3}$  e  $G = (1, 1, 3)$ .

- (c) Observe que  $G \in a$  se e somente se a reta que passa por  $B$  e  $G$  contém  $a$ . Isso ocorre, por sua vez, se e somente se  $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{AC}$ . No entanto  $\overrightarrow{GB} = (1, 0, 4) - (1, 1, 3) = (0, -1, 1)$  e  $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$ . Portanto  $G \notin a$ .
- (d) Temos que  $m : X = B + \beta\overrightarrow{BB'}$  para  $\beta \in \mathbb{R}$ . Daí segue:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 4 - \frac{3}{2} \end{cases}.$$

- (e) Para escrevermos as equações de  $a$ , tome  $X = (x, y, z) \in a$ . Devemos ter então  $\overrightarrow{BX}$  perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$ , i.e., tal que  $\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ . Para isso  $(x - 1, y, z - 4)$  devem satisfazer

$$4(x - 1) + y - (z - 4) = 0$$

Por outro lado,  $a$  está no plano gerado por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  que contém  $A$ . Donde segue que  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BX}$  devem ser sempre linearmente dependentes (LD). Assim  $X = (x, y, z) \in a$  deve obedecer

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ x-1 & y & z-4 \end{vmatrix} = 0.$$

Isso mostra que deve também valer  $y + z = 4$ . A reta  $a$  pode ser então descrita pelo sistema

$$\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 4 \end{cases}.$$

Observe agora que  $H = (0, 2, 2)$  é uma solução do sistema. Podemos então escrever  $a : X = B + \alpha \overrightarrow{BH} = (1, 0, 4) + \alpha(-1, 2, -2)$ . Assim temos as seguintes equações paramétricas para  $a$ :

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 4 - 2\alpha \end{cases}.$$

(f) Antes de mais nada, observe que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= (-2, 1, 2) \\ \overrightarrow{PC} &= (2, 2, 1), \end{aligned}$$

e que  $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PC}\|$ . Disso segue que  $\triangle APC$  é um triângulo isósceles e a reta-suporte da mediana por  $P$  é igual a bissetriz do ângulo  $\widehat{APC}$ . Agora  $\overrightarrow{PB'} = (0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . O vetor  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  é paralelo a  $\overrightarrow{PB'}$ . Assim podemos escrever  $X = P + \alpha \vec{u}$  o que nos dá as seguintes equações paramétricas para a reta procurada:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}.$$

□

**Exercício 4.** Dados a reta  $r = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  e o ponto  $P = (0, 1, 1)$ , obtenha uma equação geral do plano  $\pi$  tal que  $P \in \pi$  e  $\pi \perp r$ .

**Resolução:**

Observe inicialmente que  $A = (0, 0, 0)$  e  $B = (1, 1, -2)$  são dois pontos pertencentes a  $r$ .

Para escrevermos uma equação geral do plano  $\pi$  encontremos dois vetores LI  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  perpendiculares a reta  $r$  (perpendiculares a  $\overrightarrow{AB}$ ).

Seja  $(x, y, z) \perp \overrightarrow{AB}$ . Então temos  $(x, y, z) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , o que implica em  $(x, y, z)$  tal que  $x + y - 2z = 0$ . Tome então  $\vec{a} = (1, -1, 0)$  e  $\vec{b} = (1, 1, 1)$  (escolha arbitrária de vetores LI que satisfaçam  $x + y - 2z = 0$ ).

Seja agora  $X = (x, y, z)$  um ponto arbitrário de  $\pi$  (não confundir com a tripla  $(x, y, z)$  usada no parágrafo anterior). Para escrever uma equação

geral do plano  $\pi$  que passa por  $P = (0, 1, 1)$  é gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  basta observar que os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\overrightarrow{PX}$  devem ser LD para qualquer  $X \in \pi$ , i.e., deve ser satisfeita a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

O que nos leva a:

$$x + y - 2z + 3 = 0.$$

□

**Exercício 5.** Considere um trapézio isósceles  $ABCD$ , i.e., com  $AD$  e  $BC$  congruentes,  $AB \parallel CD$ ,  $AB$  não congruente a  $CD$ . Dados  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (2, -1, 1)$ , e  $D = (0, 1, 3)$ , obtenha as coordenadas de  $C$ .

**Resolução:**

Dados:

$$A = (1, 0, 1)$$

$$B = (2, -1, 1)$$

$$D = (0, 1, 3)$$

Temos dois dados fundamentais para a determinação de  $C$ . São eles:

(a)  $AB \parallel CD$ ;

(b)  $AD$  e  $BC$  são congruentes.

De (a) segue que  $C = D + \lambda \overrightarrow{AB}$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como  $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$  isso equivale a dizer que  $C = (\lambda, 1 - \lambda, 3)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A congruência de  $AD$  e  $BC$  será usada da seguinte forma: como  $AB \parallel CD$ , a projeção ortogonal de  $\overrightarrow{AD}$  sobre  $\overrightarrow{AB}$  é igual a projeção de  $\overrightarrow{CD}$  sobre  $\overrightarrow{AB}$  (igual a *menos* a projeção de  $\overrightarrow{DC}$  sobre  $\overrightarrow{AB}$ ).

Calculemos essa projeção ( $\overrightarrow{AD}$  sobre  $\overrightarrow{AB}$ ), observando que  $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 2)$ :

$$\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} = \frac{(-1, 1, 2) \cdot (1, -1, 0)}{(1, -1, 0) \cdot (1, -1, 0)} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$$

Logo  $C$  está sobre o plano  $\pi$  perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  que passa por  $B + \overrightarrow{AB} = (3, -2, 3)$ .

Um vetor  $\vec{v} = (x, y, z) \in V^3$  é perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  se e somente se  $x - y = 0$ , i.e., se  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ . Escolha arbitrariamente dois vetores LI perpendiculares a  $\overrightarrow{AB}$ , por exemplo  $(1, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Assim, podemos escrever  $\pi : X = B + \overrightarrow{AB} + \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$ , ou melhor,  $\pi : X = (3 + \alpha, -2 + \alpha, 1 + \beta)$ .

A intersecção de  $\pi$  com a reta que contém  $CD$  nos dá as coordenadas de  $C$ :

$$\begin{cases} 3 + \alpha = \lambda \\ \alpha - 2 = 1 - \lambda \\ 3 = 1 + \beta \end{cases} .$$

Donde segue que  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$  e  $\lambda = 3$ . Assim  $C = (3, -2, 3)$ . □

**Exercício 6.** Ache os pontos de  $r : x - 3 = y - 2 = z - 1$  que distam  $\sqrt{21}$  do ponto  $a = (1, 1, 1)$ .

**Resolução:**

Escrevamos uma equação paramétrica para  $r$ . Considere  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda = x - 3$ . Vale:

$$\begin{cases} x - 3 = \lambda \\ y + 2 = \lambda \\ z - 1 = \lambda \end{cases} .$$

Donde segue que  $r : X = (\lambda + 3, \lambda - 2, \lambda + 1)$ . Queremos  $P \in r$  tal que  $\|PA\|^2 = 21$ . Considere  $\lambda_0$  tal que  $P = (\lambda_0 + 3, \lambda_0 - 2, \lambda_0 + 1)$ . Temos que  $\overrightarrow{PA} = (\lambda_0 + 2, \lambda_0 - 3, \lambda_0)$ . Assim,

$$\|PA\|^2 = (\lambda_0 + 2)^2 + (\lambda_0 - 3)^2 + \lambda_0^2 = 3\lambda_0^2 - 2\lambda_0 - 8 = 0.$$

Usando a *fórmula de Bhaskara* pra resolver essa equação de segundo grau, obtemos  $\lambda_0 = 2$  ou  $-\frac{4}{3}$ . Disso segue, então, que os pontos procurados são  $(5, 0, 3)$  e  $(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{1}{3})$ .  $\square$

**Exercício 7.** O triângulo  $\triangle ABC$  é equilátero e tem seus vértices  $B$  e  $C$  na reta  $r : X = (-3, 4, 2) + \lambda(-1, 1, 0)$ . Sendo  $A = (2, 2, -1)$ , determine  $B$  e  $C$ .

**Resolução:**

Dados:  $A = (2, 2, -1)$ ,  $r : X = (-3 - \lambda, 4 + \lambda, 2)$ . Considere  $\beta$  e  $\gamma$  tais que  $B = (-3 - \beta, 4 + \beta, 2)$  e  $C = (-3 - \gamma, 4 + \gamma, 2)$ . Assim temos:

$$\overrightarrow{AB} = (-\beta - 5, \beta + 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-\gamma - 5, \gamma + 2, 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (\beta - \gamma, \gamma - \beta, 0)$$

Considerando  $\alpha^2 = \|AB\|^2 = \|AC\|^2 = \|BC\|^2$ , temos:

$$\begin{cases} 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\beta\gamma = \alpha^2 \\ 2\beta^2 + 14\beta + 38 = \alpha^2 \\ 2\gamma^2 + 14\gamma + 38 = \alpha^2 \end{cases} .$$

Resolvamos esse sistema. Subtraindo as duas últimas equações temos:

$$2(\beta^2 - \gamma^2) + 14(\beta - \gamma) = 0$$

Como, por hipótese  $\beta \neq \gamma$ , isso se simplifica a:

$$2(\beta + \gamma) + 14 = 0$$

Substituindo  $\gamma$  por  $-\beta - 7$  na primeira equação chegamos a:

$$\beta^2 + 7\beta + 10 = 0$$

Resolvendo esta equação obtemos  $\beta = -5$  e  $\gamma = -2$  ou  $\beta = -2$  e  $\gamma = -5$ . Disso concluímos que  $B = (-1, 2, 2)$  e  $C = (2, -1, 2)$  ou  $C = (-1, 2, 2)$  e  $B = (2, -1, 2)$ .  $\square$

**Exercício 8.** Dado um paralelogramo  $ABCD$ , escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$  (ou seja, a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados das suas diagonais).

**Resolução:**

Observe inicialmente que  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ . Note, então, que

$$\|\overrightarrow{CA}\|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC};$$

$$\|\overrightarrow{DB}\|^2 = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{DA}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Como  $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$  temos que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ . Somando as duas equações acima chegamos a:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

□