CAPíTULO 1

# Sistemas de Equações Lineares com Coeficientes Reais

## 1. Introdução

Um conjunto de $m$ equações na forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.1}$$

é chamado sistema $(\Sigma)$ com $n$ incógnitas, também representado pelo produto de matrizes:

$$(\Sigma): \qquad \boldsymbol{A_{m\times n}}\, \boldsymbol{X_{n\times 1}} = \boldsymbol{B_{m\times 1}}, \qquad \text{onde}$$
$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m,\\ j=1,\ldots,n}} \quad \boldsymbol{B} = (b_{i1})_{i=1,\ldots,m}, \quad \boldsymbol{X} = (x_{i1})_{i=1,\ldots,n}$$

O conjunto de soluções de $(\Sigma)$ será dado por $[\Sigma] = \{\boldsymbol{X_{n\times 1}} \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}\}$, i.e., $\boldsymbol{X}$ satisfaz *todas* as equações de (1.1).

Afirmação. $[\Sigma] = [\Sigma']$, onde $(\Sigma')$ é obtido de $(\Sigma)$ através de um número *finito* de operações elementares do tipo (1),(2) e (3), que consistem em:

(1) Trocar a ordem de duas linhas de $(\Sigma)$.
(2) Multiplicar *uma* linha de $(\Sigma)$ por um escalar[1] $k$, $k \neq 0$.
(3) Substituir a i-ésima linha pela soma da $i$-ésima com a $j$-ésima linha de $(\Sigma)$.

Demonstração. Para provar (1), basta verificar que, aplicada a operação (1), as equações do sistema $(\Sigma')$ a serem satisfeitas são as mesma de $(\Sigma)$, o que trivialmente implica o mesmo conjunto solução.

Para provar (2), seja a $i$-ésima linha de $(\Sigma)$ multiplicada por $k$, $k \neq 0$,

$$k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k b_i$$

Como $k$ é escalar não-nulo, a $i$-ésima linha de $(\Sigma')$ é igual à $i$-ésima linha de $(\Sigma)$. Assim, $(\Sigma') = (\Sigma)$, o que implica $[\Sigma'] = [\Sigma]$.

Finalmente, para provar (3),

(a) Seja $\boldsymbol{X_0}$ tal que satisfaça $(\Sigma)$.
Obtendo $(\Sigma')$ por (3), temos que todas as equações de $(\Sigma')$, *exceto a i-ésima*, permanecem inalteradas, sendo portanto satisfeitas por $\boldsymbol{X_0}$.
Para que $\boldsymbol{X_0}$ satisfaça também a $i$-ésima equação de $(\Sigma')$, é necessário que para $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_0}$ verifique-se

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{jk}) x_k = (b_i + b_j) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_i + b_j$$

[1] Por escalar, entenda-se qualquer número real

Ou seja, $\boldsymbol{X_0}$ deve satisfazer a $i$- e $j$-ésima linha de $(\Sigma)$, o que é verdade por hipótese.
Portanto, $\boldsymbol{X_0}$ satisfaz $(\Sigma') \Longrightarrow [\Sigma] \subseteq [\Sigma']$.

(b) Seja $\boldsymbol{Y_0}$ tal que satisfaça $(\Sigma')$. Logo, pela operação (3), todas as equações de $(\Sigma)$, *exceto a $i$-ésima*, são iguais às de $(\Sigma')$, sendo portanto satisfeitas por $\boldsymbol{Y_0}$. Como $\boldsymbol{Y_0}$ satisfaz à $i$-ésima equação de $(\Sigma')$ e à $j$-ésima equação de $(\Sigma)$, então $\boldsymbol{Y_0}$ satisfaz à diferença entre as duas,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + a_{jk})x_k - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = (b_i + b_j) - b_j \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$$

Ou seja, $\boldsymbol{Y_0}$ satisfaz também à $i$-ésima equação de $(\Sigma)$. Portanto, todas as equações de $(\Sigma)$ são satisfeitas por $\boldsymbol{Y_0} \Longrightarrow [\Sigma'] \subseteq [\Sigma]$.

Com isso, concluímos que $[\Sigma] = [\Sigma']$ □

## 2. Método de Solução do Sistema por Escalonamento

Como acabamos de verificar na seção anterior, cada vez que aplicamos qualquer uma das operações (1),(2) e (3) em $(\Sigma)$, obtemos um sistema $(\Sigma')$ com a mesma solução. Dizemos portanto que $(\Sigma)$ e $(\Sigma')$ são equivalentes. Assim, se aplicamos essas operações elementares de forma sistemática, chegaremos a um sistema equivalente ao inicial que poderá ser resolvido por inspeção. Este consite no chamado Método de Solução do Sistema por Escalonamento da Matriz Aumentada[2], onde a matriz aumentada $\boldsymbol{D_{m\times n}}$ de $(\Sigma)$ é dada por

$$\boldsymbol{D_{m\times n+1}} = \begin{cases} (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \\ (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=n+1}} \end{cases} \tag{2.1}$$

Apresentaremos a seguir exemplos práticos de aplição do método.

Exemplo 1.1. Consideremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 40 \\ -2 & -4 & 18 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -38 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

A matriz aumentada associada a tal sistema é

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 40 & 68 \\ -2 & -4 & 18 & -38 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Primeiramente, devemos obter 1 como entrada em $a_{11}$, o que pode ser feito através da operação (1) ou (2). Optamos por aplicar (1),

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -2 & -4 & 18 & -38 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix}$$

O próximo passo é zerar as demais entradas da primeira coluna.
Para tanto, podemos – segundo a operação (2) – multiplicar a linha 2 por $(\frac{1}{2})$ e

[2]também conhecido como Método de Gauss-Jordan

somar a ela a linha 1 1 – pela operação (3)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 9 & -19 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & 40 & 68 \end{pmatrix}$$

Somando a linha 1 à linha 3

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 5 & 35 & 75 \end{pmatrix}$$

Repetindo o procedimento, devemos obter $a_{22} = 1$ e zerar a entrada em $a_{32}$. Como já temos $a_{22} = 1$, basta multiplicar a última linha por $(\frac{1}{5})$ e somar a linha 2 a ela.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

E por fim, multiplicando a linha 3 por $(-\frac{1}{3})$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta é a forma escalonada da matriz (2.3).

Assim, o sistema (2.2) reduz-se à

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuja solução é

$$x = 60 \qquad y = -16 \qquad z = 1$$

Nesse caso, temos a seguinte interpretação geométrica: cada equação deste sistema representa um hiperplano 2-dimensionais em $\mathbb{R}^3$. Temos portanto três hiperplanos que interseccionam-se exatamente no ponto $(60, -16, 1)$.

Exemplo 1.2. Dado o sistema $(\Gamma)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 \\ 6 & 48 & 276 & -30 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 96 \\ 9 \\ -27 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Pelo método de escalonamento:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 & -28 \\ 6 & 48 & 276 & -30 & 96 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ -3 & -3 & 9 & -6 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 6 & 48 & 276 & -30 & 96 \\ -4 & 4 & 68 & -16 & -28 \\ -3 & -3 & 9 & -6 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & -8 & -46 & 5 & -16 \\ -1 & 1 & 17 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 3 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -49 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, nosso sistema $(\Gamma)$ acaba reduzido a

$$\left\{\begin{aligned} x+y-3z+2w &= 9 \\ y+7z-w &= 1 \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Resolvendo o sistema (2.5) em função dos parâmetros livres $\lambda$ e $\varphi \in \mathbb{R}$, temos como solução

$$(x,y,z,w) = (8+10\lambda-3\varphi, 1-7\lambda+\varphi, \lambda, \varphi) \tag{2.6}$$

que pode ser reescrito como

$$(x,y,z,w) = (8,1,0,0) + \lambda(10,-7,1,0) + \varphi(-3,1,0,1) \tag{2.7}$$

Podemos interpretar geometricamente o sistema, com cada equação representando um hiperplano 3-dimensionais em $\mathbb{R}^4$, sendo que os hiperplanos dados pela terceira e quarta equações de (2.4) coincidem. A intersecção desses quatro hiperplanos resulta num subespaço afim 2-dimensionais, parametrizado em (2.6).

## 3. Sistemas Homogêneos Associados

A todo sistema linear $(\Sigma)$ em $\mathbb{R}^n$, podemos associar um sistema linear homogêneo $(\Sigma_0)$, dado por

$$(\Sigma_0): \quad \boldsymbol{AX} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Definimos $\alpha$ como uma transformação linear[3]

$$\alpha(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}$$

cujo espaço nulo (kernel) é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\ker\alpha := \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha(\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}\}$$

Concluimos portanto que o espaço solução $[\Sigma_0]$ será justamente o kernel de $\alpha$.

Podemos determinar o espaço solução $[\Sigma]$ a partir do kernel de $\alpha$.

$$[\Sigma] = \ker\alpha + \boldsymbol{X_B} = [\Sigma_0] + \boldsymbol{X_B} \tag{3.2}$$

onde $[\Sigma_0]$ é a solução de (3.1) e $\boldsymbol{X_B}$ é uma solução particular de $(\Sigma)$.

[3] A ser estudado detalhadamente em Álgebra Linear

No exemplo 1.2, o sistema homogêneo associado seria

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 68 & -16 \\ 6 & 48 & 276 & -30 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \vec{0}$$

O espaço solução desse sistema seria o subespaço 2-dimensionais de $\mathbb{R}^4$, parametrizado por

$$\ker \alpha = \{(x, y, z, w) = \lambda(10, -7, 1, 0) + \varphi(-3, 1, 0, 1), \quad \lambda, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

*Uma* possível solução *particular* para o sistema não-homogêneo (2.4) seria o ponto $(x, y, z, w) = (12, -4, 1, 2)$. Assim, por (3.2), obteríamos como solução para (2.4) o mesmo subespaço parametrizado em (2.6),

$$[\Gamma] = \{(x, y, z, w) = (12, -4, 1, 2) + \mu(10, -7, 1, 0) + \nu(-3, 1, 0, 1), \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$$

## 4. Exercícios

(1) Determinar $a$ e $b$ para que o sistema abaixo seja possível e determinado :

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

(2) Determinar o valor de $k$ para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

tenha :
  (a) solução única;
  (b) nenhuma solução;
  (c) mais de uma solução.

(3) Resolver, por escalonamento, os seguintes sistemas, expressar as soluções em termos de geradores e interpretar geometricamente os resultados obtidos :
  (a)
$$\begin{cases} 4x + 3y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - t = 0 \end{cases}$$
  (b)
$$\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$$
  (c)
$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

(4) Dado o sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

  (a) Determine a solução do sistema homogêneo associado.
  (b) Determine a solução do sistema dado.
  (c) Expresse a solução anterior em termos de geradores.

(5) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

(6) Discuta os seguintes sistemas

(a)

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 9 \\ 6x + 7z = 13 \\ 4x + 2y + az = b \end{cases}$$

(7) Qual é a condição necessária e suficiente para que a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x - 4y = a \\ 6x + ky = b \end{cases}$$

seja um par de números inteiros, quaisquer que sejam $a$ e $b$ inteiros ?

(8) Sabendo que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 7 \\ m^2 x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$$

admite uma única solução, podemos concluir que $m$ pode assumir todos os valores do intervalo real :

(a) [0,1] (b) [1,2] (c) [2,3] (d) [3,4] (e) [0,4]

(9) Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz ampliada de um sistema linear. Para que valores de $a$ e $b$ o sistema admite :

(a) solução única
(b) solução com um parâmetro
(c) solução com dois parâmetros
(d) nenhuma solução

(10) Discuta a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema e encontre um valor de $k$ que o torne impossível.

(11) Determine os valores de $a$, $b$ e $c$ que façam com que o graáfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1,2), (-1,6), (2,3)$.
(12) Dados $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax + b$, determine os valore de $a$, $b$ e $c$ para que $f$ passe pelos pontos $(-1,0), (2,-9)$ e que 2 seja raiz de $g$.
(13) Determinar os polinômios reais $q(x)$ do segundo grau que verificam a identidade $q(x) = q(1-x) \forall x \in \mathbb{R}$.
(14) Considere as matrizes reais: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Determine valores reais para $k, x$ e $y$ tais que $AB = kB$.
(15) Repita o exercício anterior para as matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este exercício merece algum comentário. Cada valor obtido para o escalar $k$ é chamado um **autovalor** da matriz $A$, e cada solução $B$ correspondente é chamada de **autovetor** de $A$ associado ao autovalor $k$. Você seria capaz de interpretar geométricamente a situação com a qual estamos lidando ?
(16) Encontre os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(17) Considere os seguintes sistemas lineares abaixo, onde os coeficientes tomam valores no corpo dos complexos ($\mathbb{C}$).

$$\begin{cases} 2x + (-1+i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(1 + \frac{i}{2}\right)x + 8y - iz - w = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + z + 7w = 0 \end{cases}$$

O segundo sistema pode ser obtido a partir do primeiro através de operações elementares ?
(18) Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (1-i)x - iy = 0 \\ 2x + (1-i)y = 0 \end{cases}$$

(19) Considere o sistema de equações $AX = 0$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz com coeficientes complexos. Mostre que :
  (a) Se $ad - bc \neq 0$, o sistema $AX = 0$ possui apenas a solução trivial $x = y = 0$.
  (b) Se $ad - bc = 0$ e alguma entrada de $A$ é não nula, então existe uma solção $(x^0, y^0)$ tal que $(x, y)$ é solução se, e somente se, existe um escalar complexo $k$ tal que $x = kx^0$ e $y = ky^0$.
(20) Encontre duas matrizes $2 \times 2$ distintas tais que $A^2 = 0$ mas $A \neq 0$.
(21) Sejam $A, B$ matrizes tais que $AB = I$, onde $I$ é a matriz identidade da ordem necessária. Mostre que $BA = I$. Isto é válido para matrizes de quaisquer ordens ?
(22) Seja

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

uma matriz $2 \times 2$. Mostre que existem matrizes $2 \times 2$ tais que $C = AB - BA$ se, e somente se, $C_{11} + C_{22} = 0$.

(23) Mostre que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

é inversível.

CAPíTULO 2

# Vetores

## 1. Definição algébrica

A seguir, definiremos *axiomaticamente* um espaço vetorial real ($\mathbb{R}^n$).

DEFINIÇÃO 2.1. Um espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ é estabelecido pela seguinte estrutura:

(1) O conjunto de todas as n-uplas $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, com $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(2) Duas operações, denominadas Soma e Multiplicação por escalar, definidas de forma a possuirem as seguintes propriedades.
Sejam $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{Y} = (y_1, \ldots, y_n), \boldsymbol{Z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Propriedades da Soma

(S1) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}$

(S2) $(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z})$

(S3) Existe um único elemento $\boldsymbol{O}$ tal que $\boldsymbol{O} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$

(S4) Para cada elemento $\boldsymbol{X}$ existe um único elemento $-\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X} + (-\boldsymbol{X}) = 0$.

Propriedades da Multiplicação por escalar

(M1) $r(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = r\boldsymbol{X} + r\boldsymbol{Y}$

(M2) $\boldsymbol{0}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$

(M3) $r\,s(\boldsymbol{X}) = r(s\,\boldsymbol{X})$

(M4) $(r + s)\boldsymbol{X} = r\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{X}$

Assim, definimos as duas operações como

(A) A soma $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ é dada por

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e portanto também pertence a $\mathbb{R}^n$.

(B) A multiplicação por escalar $r\boldsymbol{X}$ é dada por

$$r\boldsymbol{X} = (rx_1, \ldots, rx_n)$$

e portanto também pertence a $\mathbb{R}^n$.

## 2. Definição Geométrica

A noção mais primária que temos de vetor é aquela de caráter puramente geométrico, amplamente usada na Física para representar forças, velocidades, momentos, etc. Isso nos motiva a formular uma definição geométrica para vetores, restrita a $\tilde{\mathbb{R}}^2$ e $\tilde{\mathbb{R}}^3$.[1]

DEFINIÇÃO 2.2. A uma classe de equivalência de segmentos de reta orientados chamamos de vetor $\vec{v}$. Portanto, todas as setas com mesma magnitude, direção e sentido constituem uma mesma classe de equivalência e são representadas por um vetor $\vec{v}$.

[1] Espaço euclidiano bi e tridimensional, respectivamente.

Para um vetor $\vec{v}$ em $\tilde{\mathbb{R}}^2$ ou $\tilde{\mathbb{R}}^3$ definimos geometricamente as operações de soma e multiplicação por escalar (Fig.1), que têm como consequência o mesmo elenco de propriedades dadas em (A) e (B), agora, porém, derivadas a partir da geometria – conforme exemplificado nas Fig.2 e Fig.3.

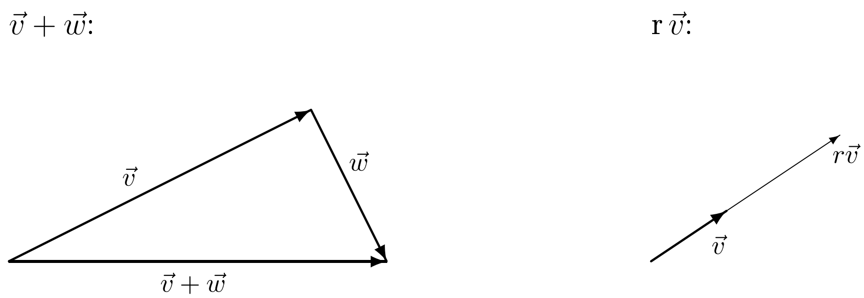


FIGURA 1. Soma e Multiplicação por escalar em $\tilde{\mathbb{R}}^2$

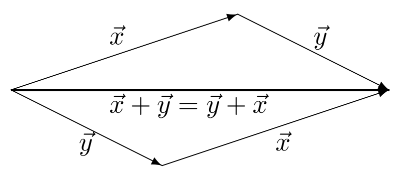


FIGURA 2. Propriedade Comutativa, pela soma dos lados do paralelogramo em $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

$$r(\vec{x}+\vec{y}) = r\vec{x}+r\vec{y}$$

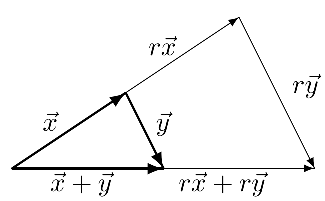


FIGURA 3. Propriedade Distributiva, por semelhança de triângulos em $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

## 3. A equivalência entre definação algébrica e definição geométrica

Por ora, nos restringiremos a $\tilde{\mathbb{R}}^2$. Todos os resultados aqui derivados podem ser analogamente estendidos a $\tilde{\mathbb{R}}^3$.

Demonstraremos a seguir que todo vetor $\vec{v} \in \tilde{\mathbb{R}}^2$ pode ser unicamente determinado por uma dupla $(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO. Em $\tilde{\mathbb{R}}^2$, fixamos um ponto $\mathbf{0}$ do plano (origem). Em $\mathbf{0}$, fixamos um par *ordenado* de vetores não-colineares $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

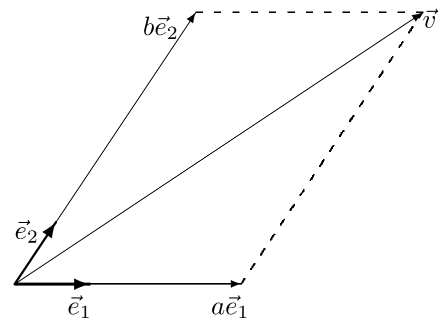


FIGURA 4. Representação única de $\vec{v}$, por soma de vetores

Pela Fig.4, vemos que todo $\vec{v} \in \tilde{\mathbb{R}}^2$ pode ser representado de *maneira única* através da soma de vetores

$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2,\ a, b \in \mathbb{R}$$

pois se houvesse uma segunda representação

$$\vec{v} = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2,\ a', b' \in \mathbb{R}$$

então

$$\vec{0} = (a - a')\vec{e}_1 + (b - b')\vec{e}_2$$

$$-(a - a')\vec{e}_1 = (b - b')\vec{e}_2 \Longrightarrow \begin{cases} (1)\, \vec{e}_1 \text{ e } \vec{e}_2 \text{ são colineares} \quad \textit{ou} \\ (2)\, a = a' \text{ e } b = b' \end{cases}$$

Por hipótese, $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ não são colineares, o que invalida (1). Resta-nos (2), que implica unicidade de coordenadas para $\vec{v}$.

Assim, podemos representar unicamente $\vec{v}$ por

$$\vec{v} \equiv (a, b) \tag{3.1}$$

□

TEOREMA 2.1. *Se* $\vec{v} \equiv (a, b)$ *e* $\vec{w} \equiv (c, d)$ *então*

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + c, b + d)$$

Para demonstração, vide Fig.5.

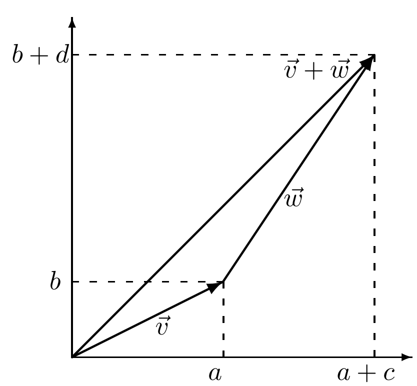


FIGURA 5. Teorema 2.1

Teorema 2.2. *Se $\vec{v} \equiv (a,b)$ e $r$ é escalar,*

$$r\vec{v} = (ra, rb)$$

Para demonstração, vide Fig.6.

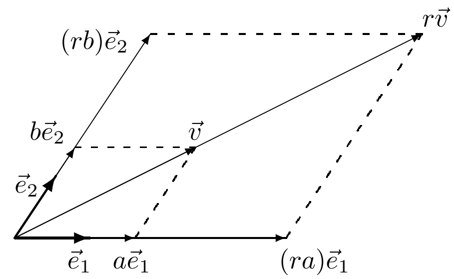


Figura 6. Teorema 2.2

De maneira análoga, dado um par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (sempre com $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\mathbf{0}$ fixos em $\tilde{\mathbb{R}}^2$) temos

$$\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \longmapsto \vec{v} \in \tilde{\mathbb{R}}^2 \text{ tal que } \vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

com as propriedades

$$\text{(a) } (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \longmapsto \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$
$$\text{(b) } \lambda(a,b) \longmapsto \lambda\vec{v}$$

Portanto, o ponto $\mathbf{0}$ (que agora também pode ser identificado por $\vec{0}$) e o par ordenado $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ fixados nos permitem uma identificação entre $\mathbb{R}^2$ e $\tilde{\mathbb{R}}^2$, que respeita soma e multiplicação por escalar, e, consequentemente, suas respectivas propriedades (seção 1).

Exemplo 2.1. Num plano cartesiano, dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, determinaremos a seguir qual é o vetor $\vec{c}$ que vai de $A$ a $B$.

No plano $xy$, tomamos como ponto $\vec{0}$ a origem do plano e como $\{e_1, e_2\}$ os vetores unitários sobre os eixos $x$ e $y$, $\hat{\imath} = (1,0)$ e $\hat{\jmath} = (0,1)$.

O ponto $A = (a_1, a_2)$ deste plano pode ser identificado através do vetor $\vec{a}$, que vai da origem ao ponto $A$. Da mesma forma, o ponto $B = (b_1, b_2)$ também pode ser identificado através do vetor $\vec{b}$, indo da origem ao ponto $B$. Dessa forma, $\vec{c}$ pode ser facilmente encontrado através da soma de vetores $\vec{b} + (-1)\vec{a}$. Pelos teoremas 2.1 e 2.2, teremos $\vec{c} \equiv (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Analogamente, em $\mathbb{R}^3$, dados os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, teremos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ que vai do ponto $A$ ao ponto $B$ é $\overrightarrow{AB} \equiv (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Exemplo 2.2. Exemplificaremos a seguir como a escolha de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afeta a identificação entre $\mathbb{R}^2$ e $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Dado o vetor $\vec{v}$, tomamos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ e a origem $\vec{0}$. Podemos descrever o vetor $\vec{v}$ como $\vec{v} \equiv (9,7)$ (dado).

Tomaremos agora os vetores $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\} = \{(-1,2), (5,3)\}$ (em relação à origem e a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, estabelecidos inicialmente). Mantendo a origem e usando este novo par ordenado de vetores, a descrição de $\vec{v}$ será alterada para $\vec{v} \equiv (6,1)$.

Aqui torna-se evidente a importância do par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ser *ordenado*: se ao invés de $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\} = \{(-1,2), (5,3)\}$ tivéssemos tomado $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\} = \{(5,3), (-1,2)\}$, a descrição de $\vec{v}$ seria alterada para $\vec{v} \equiv (1,6)$. Portanto, a ordenação adotada no conjunto de $n$ vetores linearmente independentes interefere na descrição vetorial por meio de $n$-uplas.

## 4. Exercícios

**Wexler, C.,** ***Analytic Geometry – A vector approach.*** Grupos de Exercícios 2-1, 2-2 e 2-3.

CAPíTULO 3

# Independência Linear em $\mathbb{R}^n$

## 1. Introdução

Vimos no capítulo anterior que um vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ pode ser representado a partir de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ não-colineares, através da combinação linear $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

Em $\mathbb{R}^n$, interessa-nos saber quantos vetores $\vec{e}_i$ podemos encontrar, tais que nenhum deles possa ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores $\vec{e}_i$. Dizemos nesse caso que $\{\vec{e}_i\} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ são linearmente independentes.

Definição 3.1. Dados $\{\vec{v}_i\} = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, dizemos que tais vetores são linearmente independentes quando

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \qquad \text{se e somente se} \qquad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \tag{1.1}$$

Se o conjunto de vetores $\{\vec{v}_i\}$ não é linearmente independente, dizemos que é então linearmente dependente.

A definição nos afirma portanto que o vetor $\vec{0}$ possui uma representação *única* – que é a trivial – através da combinação linear dos vetores em $\{\vec{v}_i\}$.

Na prática, o conceito de independência linear implica que, fixados $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linearmente independentes, então qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ou é representado *de forma única* por combinação linear de $\{\vec{v}_i\}$ ou não existe $b_i,\ i = 1, \ldots, k$ tal que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} b_i \vec{v}_i$.

Demonstração. Seja $\vec{u}$ tal que possa ser representado por uma combinação linear de $\{\vec{v}_i\}$,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{v}_i$$

Suponhamos que esta representação não é única. Então,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} c'_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{k} c'_i \vec{v}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} (c_i - c'_i) \vec{v}_i = 0$$

Seja $a_i = c_i - c'_i$,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = 0$$

Mas, por hipótese, $\{\vec{v}_i\}$ é linearmente independente. Então, para todo $i$,

$$a_i = 0 \Longrightarrow c_i = c'_i$$

A representação é portanto única. □

Note que se $\{\vec{v}_i\}$ for linearmente dependente, teremos pela definição que para

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_j\vec{v}_j + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$$

existe *pelo menos* um $\alpha_j \neq 0$. Então,

$$\alpha_j\vec{v}_j = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k \tag{1.2}$$

$$\vec{v}_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j}\vec{v}_1 + \ldots + \frac{\alpha_k}{\alpha_j}\vec{v}_k \tag{1.3}$$

O fato de $\{\vec{v}_i\}$ ser linearmente dependente permite que elementos do conjunto possam ser escritos como combinação linear dos demais, o que acaba tendo como consequência representações de $\vec{u}$ não únicas.

Exemplo 3.1. Tomemos $k$ vetores $\vec{v}_i$ em $\mathbb{R}^n$. Com eles, construimos a matriz $\boldsymbol{L}$, cuja i-ésima coluna é determinada por $\vec{v}_i$.

$$\boldsymbol{L} = \left( \ \vec{v}_1 \ \middle| \ \vec{v}_2 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \vec{v}_k \ \right) \tag{1.4}$$

Logo, qualqer dependência linear entre $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ implicará dependência linear entre as respectivas colunas de $\boldsymbol{L}$.

Discutir a independência linear de $\{\vec{v}_i\}$ corresponde a resolver o sistema

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

onde $\boldsymbol{X} = (x_{i1})_{i=1,\ldots,k}$ são os escalares da combinação linear que determinará $\boldsymbol{0}$.

Para (1.5) podemos ter

(1) Solução única $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$. As colunas de $\boldsymbol{L}$ serão linearmente independentes.
(2) Se a solução de $\boldsymbol{X}$ não for única, o vetor $\boldsymbol{0}$ não terá representação única em $\{\vec{v}_i\}$ e portanto, as colunas não serão linearmente independentes. Conforme visto no Capítulo 1, tal solução será um subespaço em $\mathbb{R}^n$ com $d$ parâmetros livres e, como se trata de um sistema homogêneo, esse subespaço será o kernel de $\alpha(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{X}$. Veremos na próxima seção que, nesse caso, dentre os k vetores em $\{\vec{v}_i\}$, teremos apenas $(n-d)$ vetores linearmente independentes.

Exemplo 3.2. Em $\mathbb{R}^n$, dados k vetores $\vec{v}_i$, é plausível perguntar-nos acerca do número *máximo* de vetores linearmente independentes que podemos encontrar em tal espaço. Provaremos a seguir que, escolhendo adequadamente, teremos *no máximo* $n$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

Tomando os $k$ vetores em $\mathbb{R}^n$, seja $k > n$. A matriz $\boldsymbol{M}$ cujas linhas são $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ é

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \ldots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

Podemos escalonar $\boldsymbol{M}$. Porém, a forma escalonada da matriz nos obrigará a ter, no máximo, n linhas linearmente independentes, pois o escalonamento mais completo que se pode obter de $\boldsymbol{M}$ é

$$\boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix} 1 & v'_{12} & \dots & v'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v'_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Embora as linhas de $\boldsymbol{M}'$ contenham vetores $\vec{v'}_i$ diferentes dos $\vec{v}_i$ iniciais, a quantidade de vetores linearmente independentes em $\{\vec{v}_i\}$ e $\{\vec{v'}_i\}$ é a mesma: no escalonamento, os vetores em $\{\vec{v}_i\}$ foram submetidos às três operações elementares do Capítulo 1, que nada mais fazem do que realizar combinações lineares entre os vetores-linhas. Mas, sabemos de (1.3) que vetores linearmente dependentes são expressos como combinações lineares dos vetores linearmente independentes. O escalonamento procede-se de forma a eliminar somente esses vetores linearmente dependentes da matriz $\boldsymbol{M}$. Sabemos, também do Capítulo 1, que essa perda de linhas não acarreta perda de informação alguma para o sistema, uma vez que o escalonamento preserva a solução do sistema. Portanto, vemos que as linhas linearmente independentes descrevem de forma completa o espaço solução do sistema e as linhas linearmente dependentes, sendo apenas combinações lineares dos demais, são redundantes e portanto, desnecessárias a descrição completa do espaço solução.

Portanto, o número máximo de vetores linearmente independentes em $\boldsymbol{M}$ é o mesmo que em $\boldsymbol{M}'$, ou seja, $n$.

TEOREMA 3.1. *Chamamos de posto linha o número de linhas linearmente independentes de uma matriz e de posto coluna o número de colunas linearmente independentes. Em qualquer matriz o posto linha é igual ao posto coluna.*

DEMONSTRAÇÃO. Do resultado anterior, sabemos que que dentre os $k$ vetores em $\{\vec{v}_i\}$, podemos ter no máximo $n$ vetores linearmente independentes. Se tivermos exatamente $n$ vetores linearmente independentes, a prova do teorema decorre diretamente. É possível ainda que tenhamos $j < n$ vetores linearmente independentes. Nesse caso, após o escalonamento da matriz $\boldsymbol{M}$, teríamos

$$\boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix} 1 & v'_{12} & \dots & v'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & v'_{jn} \end{pmatrix}$$

Se tomarmos a transposta $(\boldsymbol{M}')^t$,

$$(\boldsymbol{M}')^t = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ v'_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v'_{1n} & \dots & v'_{jn} \end{pmatrix}$$

Agora, pelo escalonamento (1.6) de $(\boldsymbol{M}')^t$, teremos, com um raciocínio análogo ao utilizado no Exemplo 3.2, *no máximo* $j$ linhas linearmente independentes (ou seja, em $\boldsymbol{M}'$, no máximo $j$ *colunas* são linearmente independentes.)

$$(\boldsymbol{M}'^{\,t})' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v''_{1j} & \dots & v''_{jj} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Porém, teremos agora *necessariamente* o número máximo $j$ de linhas linearmente independentes: se fosse possível ter $i < j$ linhas linearmente independentes em $(\boldsymbol{M}'^{\,t})'$, poderíamos realizar uma nova transposição na matriz, obtendo $(\boldsymbol{M}')'^{\,t}$, na qual haveria uma contradição. Essa nova matriz teria $i < j$ colunas linearmente independentes e $j$ linhas, que sabemos linearmente independentes, de $\boldsymbol{M}'$. No entanto, efetuando o escalonamento de $(\boldsymbol{M}')'^{\,t}$, teremos que só é possível ter no máximo $i$ linhas linearmente independentes, o que é portanto falso, por hipótese. Assim, não podemos ter $i < j$ linhas linearmente independentes em $(\boldsymbol{M}'^{\,t})'$. Logo, o posto linha da matriz é igual ao seu posto coluna. □

## 2. Geradores e Bases de um Espaço Vetorial

Em $\mathbb{R}^n$, dizemos que um certo conjunto de vetores $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ gera um subespaço vetorial $L(S)$ se todo vetor $\vec{l} \in L(S)$ puder ser representado por uma combinação linear do tipo

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i, \quad \text{onde os } \lambda_i \text{ são escalares quaisquer.} \tag{2.1}$$

Exemplo 3.3. Consideremos o vetor $\vec{v} = (1, 2)$ em $\mathbb{R}^2$. Podemos multiplicá-lo por um parâmetro livre $\lambda_1$ e assim, ele gerará a reta $(x, y) = (\lambda_1, 2\lambda_1)$, de coeficiente angular $\alpha = 2$ passando pela origem. Da mesma forma, o vetor o vetor $\vec{v} = (2, 4)$, quando multiplicado pelo parâmetro livre $\lambda_2$ gerará a mesma reta.

Sabendo da seção anterior que todo vetor linearmente dependente pode ser descrito como combinação linear de vetores lineamente independentes, podemos afirmar que um conjunto gerador $S$ composto por vetores linearmente independentes é o menor conjunto gerador do subspaço $L(S)$. Ou seja: a forma mais econômica de se gerar o subespaço é através de geradores linearmente independentes. Essa conclusão nos leva a definição de base de um espaço.

Definição 3.2. Dizemos que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ são uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$ se eles forem linearmente independentes e gerarem $\mathbb{V}$ – ou seja, se qualquer vetor de $\mathbb{V}$ puder ser expresso como uma combinação linear da base. Chamamos de dimensão o número $k$ de vetores linearmente independentes necessários para gerar o espaço.

É importante notar que as bases de um espaço vetorial não são únicas: por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, quaisquer três vetores linearmente independentes nos fornecem uma base para tal espaço. Da mesma forma, quaisquer $n$ vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ determinam uma possível base para tal espaço. Assim, podemos afirmar que cada base nos fornece um sistema de coordenadas, as quais são determinadas pelos escalares $\lambda_i$. Um exemplo claro disso está dado no exemplo 2.2 do capítulo anterior.

Frequentemente, utilizamos como base de $\mathbb{R}^n$ o conjunto de vetores $\{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$, que formam uma base ortonormal (cada vetor da base é ortogonal a todos os demais e a norma de cada um deles é unitária). Veremos que a preferência por essa base deve-se ao fato de que a deteminação das coordenadas de qualquer vetor do espaço com respeito a essa base torna-se imediata. Em particular, em $\mathbb{R}^3$ representamos essa base por $\{\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Exemplo 3.4. Do exemplo 3.1, sabemos que se o conjunto de vetores $\{\vec{v}_i\}$ em $\boldsymbol{L}$ for linearmente dependente, a solução será um subespaço de dimensão $d$, ou seja, $\dim(\ker \alpha) = d \neq 0$. Mostraremos agora que $\{\vec{v}_i\}$ possui $(n - d)$ vetores linearmente independentes.

Inicialmente, temos a matriz $\boldsymbol{L}$ cujas colunas são os vetores em $\mathbb{R}^n$ que queremos verificar, e que portanto, tem $n$ linhas. No sistema $\boldsymbol{L}'$ escalonado, sabemos que as linhas da matriz que são linearmente dependentes serão eliminadas. A cada linha que é eliminada, podemos atribuir um parâmetro livre ao subespaço solução do sistema homogêneo (kernel). Portanto, $\dim(\ker \alpha) = d$ corresponderá ao número de linhas linearmente *dependentes* de $\boldsymbol{L}'$. Logo, restarão no sistema $(n-d)$ linhas, linearmente *independentes*. Ou seja, $posto\ linha = (n-d)$. Como $posto\ linha = posto\ coluna$, teremos $(n-d)$ colunas linearmente independentes em $\boldsymbol{L}'$, sendo portanto esse o número de vetores linearmente independentes em $\{\vec{v}_i\}$.

## 3. Exercícios

(1) Encontre em cada caso os escalares $x$ e $y$ tais que $x(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}) + y(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})$ seja igual a
   (a) $\hat{\boldsymbol{\imath}}$
   (b) $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
   (c) $3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 5\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
   (d) $7\hat{\boldsymbol{\imath}} + 5\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

(2) Se $\boldsymbol{A} = (2,-1,1)$, $\boldsymbol{B} = (1,2,-1)$ e $\boldsymbol{C} = (2,-11,7)$ são três vetores em $\mathbb{R}^3$, encontre escalares $x$ e $y$ tais que $\boldsymbol{C} = x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{B}$.

(3) Prove que o Exercício 3 não tem solução se $\boldsymbol{C}$ for substituído por $(2,11,7)$. Por que isso ocorre?

(4) Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois vetores não-nulos em $\mathbb{R}^n$. Prove que
   (a) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são paralelos, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são linearmente dependentes.
   (b) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são não-paralelos, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são linearmente independentes.

(5) Sejam $\boldsymbol{A} = (1,1,1,0), \boldsymbol{B} = (0,1,1,1)$ e $\boldsymbol{C} = (1,1,0,0)$ vetores de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Detemine se $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ são linearmente independentes ou dependentes.
   (b) Exiba um vetor $\boldsymbol{D}$ tal que $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ sejam linearmente dependentes.
   (c) Exiba um vetor $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}$ sejam linearmente independentes.
   (d) Usando o vetor $\boldsymbol{E}$ determinado no item anterior, expresse $\boldsymbol{X} = (1,2,3,4)$ como combinação linear de $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}$.

(6) Prove que um conjunto $S$ de três vetores em $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ *se e somente se* o espaço $L(S)$ por ele gerado contiver os três vetores $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$.

(7) Enuncie e prove a generalização do item anterior para $\mathbb{R}^n$.

(8) Considere os seguintes conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^3$:
   $S = \{(1,1,1),(0,1,2),(1,0,-1)\}$
   $T = \{(2,1,0),(2,0,-2)\}$
   $U = \{(1,2,3),(1,3,5)\}$
   (a) Prove que $L(T) \subseteq L(S)$.
   (b) Determine todas as relações de inclusão válidas entre os conjuntos $L(S)$, $L(T)$ e $L(U)$.

CAPíTULO 4

# Produto Escalar

## 1. Definição

Em $\mathbb{R}^n$, podemos definir o produto interno entre dois vetores $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ como qualquer operação $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle$ que possua as seguintes propriedades.

Sejam $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ escalar.

(P1) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle$
(P2) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} \rangle = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} \rangle$
(P3) $c \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle (c\boldsymbol{X}), \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{X}, (c\boldsymbol{Y}) \rangle$
(P4) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle > 0$, se $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$
(P5) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = 0$ se $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

Um produto interno de especial interesse em geometria analítica é o chamado produto escalar, também representado por $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$.

Definição 4.1. Sejam $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.1}$$

Por essa definição, pode-se facilmente verificar que o produto escalar obedece às propriedades mecionadas.

Teorema 4.1. *A Desigualdade de Schwarz é dada por*

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle \tag{1.2}$$

*onde a igualdade vale se e somente se $\boldsymbol{X}$ for paralelo a $\boldsymbol{Y}$.*

Demonstração. A desigualdade pode ser demonstrada através das cinco propriedades do produto interno. Portanto, (1.2) vale para qualquer produto interno, não se limitando apenas ao produto escalar.

Seja $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Por (P4) e (P5),

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$$

Podemos reescrever isso como

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle &= \langle \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B} \rangle \\
&\overset{P2}{=} \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle + \langle \boldsymbol{A}, -\lambda \boldsymbol{B} \rangle + \langle -\lambda \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle + \langle -\lambda \boldsymbol{B}, -\lambda \boldsymbol{B} \rangle \\
&\overset{P3}{=} \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle - \lambda \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle - \lambda \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle + \lambda^2 \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle \\
&\overset{P1}{=} \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle - 2\lambda \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle + \lambda^2 \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

Reescrevendo como uma inequação do tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$

$$\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle \lambda^2 - 2 \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle \lambda + \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle \geq \boldsymbol{0} \tag{1.3}$$

Para que a desigualdade acima seja satisfeita para todo $\lambda$, a imagem em (1.3) deve encontrar-se acima do eixo $x$. Uma vez que $\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{B}$, basta portanto que verifiquemos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle^2 - 4 \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle \leq 0$$

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle$$

Note que o sinal de igualdade vale apenas quando $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = 0$, ou seja, quando $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B} = 0$. Isso implica $\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{B}$, ou seja, os vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ devem ser paralelos. □

Nas próximas seções, utilizaremos a definição de produto escalar para generalizar em $\mathbb{R}^n$ alguns conceitos que são, por enquanto, puramente geométricos e restritos a $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

## 2. Algumas consequências do produto escalar

A seguir, apresentaremos as definições de norma e ângulo em termos de produto escalar.

A definição de norma decorre das propriedades P4 e P5 do produto escalar, ou seja, do fato desta operação ser "positiva definida".

Definição 4.2. Seja $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$. Sua norma $\|\boldsymbol{X}\|$ será dada por

$$\|\boldsymbol{X}\| = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle^{1/2} \tag{2.1}$$

Assim, pela definição (1.1) de produto escalar, temos

$$\|\boldsymbol{X}\| = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{2.2}$$

A definição 1.1 corresponde ao comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^n$. Utilizando a geometria do ensino médio, para $n = 2, 3$ podemos aplicar o Teorema de Pitágoras nas componentes do vetor para obter seu comprimento, que resultará no mesmo valor obtido com 1.1.

Com (2.2), a Desigualdade de Schwarz (1.2) pode também ser expressa por meio de normas,

$$| \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle | \leq \|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|$$

Com esse formato da desigualdade,considerando que a norma de qualquer vetor é sempre positiva, efetuamos a seguinte manipulação,

$$\begin{aligned} \frac{| \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle |}{\|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|} &\leq 1 \\ -1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle}{\|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|} &\leq 1 \end{aligned}$$

A função de $x$ e $y$ na desigualdade acima apresenta a mesma propriedade da função cosseno. Com base nisso, definimos de forma generalizada o ângulo entre dois vetores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.3. Dados $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$\cos \measuredangle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := \frac{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle}{\|\boldsymbol{X}\| \, \|\boldsymbol{Y}\|} \tag{2.3}$$

Notamos que essa definição também concorda com a noção geométrica usual de ângulo em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Basta aplicar a Lei dos Cossenos nos vetores $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ posicionados na origem $\mathbf{0}$ para se verificar (2.3).

Ainda tomando $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$, por (2.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}\|^2 &= \langle (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}), (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle^2 + 2 \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle^2 \end{aligned}$$

Em termos de normas, teremos

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|^2 = \|\boldsymbol{X}\|^2 \|\boldsymbol{Y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle \tag{2.4}$$

Se $\boldsymbol{X}$ é perpendicular a $\boldsymbol{Y}$ em $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema de Pitágoras,(2.4) se reduziria à

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|^2 = \|\boldsymbol{X}\|^2 \|\boldsymbol{Y}\|^2$$

o que implica

$$2\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = 0, \text{ se } X \perp Y$$

Essa noção de ortogonalidade em $\mathbb{R}^2$ nos sugere uma definição geral para ortogonalidade entre dois vetores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.4. Dois vetores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais se

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = 0 \tag{2.5}$$

A projeção ortogonal ($\mathrm{pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{u}$) de vetor $\vec{u}$ sobre a reta definida por $\vec{v}$ (Fig.1) é dada, em módulo, por

$$\|\mathrm{pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{u}\| = \|\vec{u}\| \cos\theta$$

que por (2.3) se reduz a

$$\|\mathrm{pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{u}\| = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|}$$

Como a projeção tem a mesma direção de $\vec{v}$, tomamos o vetor unitário[1] $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ para determinar a direção do vetor $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{u}$.

$$\mathrm{pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \tag{2.6}$$

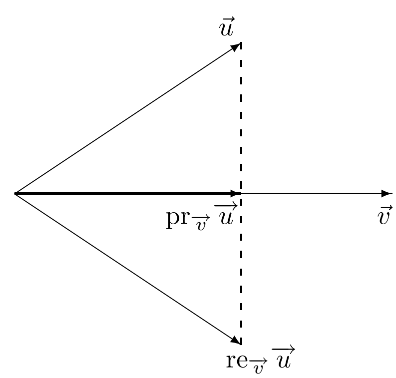


Figura 1. Projeção e Reflexão do vetor $\vec{u}$

A partir da projeção, podemos facilmente determinar o vetor $\mathrm{re}_{\vec{v}}\overrightarrow{u}$ obtido a partir da reflexão ortogonal de $\vec{u}$ em torno de $\vec{v}$, o qual é obtido mantendo a mesma componente de $\vec{u}$ na direção $\vec{v}$ e invertendo o sentido das demais componentes – e.g.

[1] Todo vetor com norma valendo uma unidade

$re_{(1,0)}(1,1) = (1,-1)$. Basta observar que $\mathrm{re}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ é determinado através da soma vetorial

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \mathrm{re}_{\vec{v}}\,\vec{u} &= 2\,\mathrm{pr}_{\vec{v}}\,\vec{u} \\
\mathrm{re}_{\vec{v}}\,\vec{u} &= 2\,\mathrm{pr}_{\vec{v}}\,\vec{u} - \vec{u} \\
&= 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} - \vec{u}
\end{aligned}$$

## 3. Aplicações

Uma vez estabelecidos o pduto interno e a condição de ortogonalidade, podemos agora definir o que é um hiperplano $(n-1)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.5. Todo ponto $\boldsymbol{X}$ que satisfizer

$$\left\langle \boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}, \vec{N} \right\rangle = 0 \tag{3.1}$$

pertence ao hiperplano $\pi$ que é normal (ortogonal) ao vetor $\vec{N}$ e contém o ponto $\boldsymbol{P}$.

Assim, todos os vetores $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}$ ortogonais a $\vec{N}$ pertencerão ao hiperplano $\pi$.

Exemplo 4.1. Dados $\boldsymbol{P}_1 = (r,s)$ e $\vec{N}_1 = (a,b)$ em $\mathbb{R}^2$, teremos, por (3.1)

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{X} - (r,s), (a,b)\rangle &= 0 \\
(x-r)a + (y-s)b &= 0 \\
ax + by - (ra + sb) &= 0
\end{aligned}$$

que é a equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$ (Fig.**??**).

Exemplo 4.2. Da mesma forma, dados $\boldsymbol{P}_2 = (r,s,t)$ e $\vec{N}_2 = (a,b,c)$ em $\mathbb{R}^3$, teremos

$$\langle \boldsymbol{X} - (r,s,t), (a,b,c)\rangle = 0 \Longrightarrow ax + by + cz - (ar + bs + ct) = 0$$

que é a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$.

Uma outra aplicação importante de projeções está no cálculo de distâncias em $\mathbb{R}^n$.

## 4. Exercícios

**Wexler, C.,** ***Analytic Geometry – A vector approach.*** Grupo de Exercícios 2-4.

CAPíTULO 5

# Hiperplanos em $\mathbb{R}^n$

## 1. Introdução

Sabemos que, em $\mathbb{R}^2$, uma equação do tipo $ax_1 + bx_2 = c$ representa uma reta (hiperplano 1-dimensional) em $\mathbb{R}^2$. Da mesma forma, em $\mathbb{R}^3$, a equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ representa um plano (hiperplano 2-dimensionais) em $\mathbb{R}^3$. Analogamente,em $\mathbb{R}^n$, uma equação do tipo $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ representa um hiperplano $(n-1)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.1. A equação

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.1}$$

representa o lugar geométrico $L = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ ***Todas e apenas*** as coordenadas de $\boldsymbol{X} \in L$ satisfazem (1.1).

Note que a recíproca dessa afirmação não vale: podemos ter equações diferentes com o mesmo conjunto $L$ (e.g. basta multiplicar (1.1) por um escalar não-nulo: teremos duas equações diferentes com a mesma solução).

## 2. Equações Paramétricas

Podemos também descrever hiperplanos em $\mathbb{R}^n$ por meio da sua respectiva equação paramétrica, em termos de geradores, como foi descrito anteriormente nos exemplos 1.1 e 1.2.

Exemplo 5.1. Obteremos a equação paramétrica da reta dada em $\mathbb{R}^2$

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

Podemos atribuir a $y$ o parâmetro livre $\lambda \in \mathbb{R}$. Escrevendo $x$ em função do parâmetro livre também,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\lambda + c \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Reescrevendo em termo de geradores, obtemos a seguinte representação paramétrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b/a \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Portanto decorre diretamente de (2.2) que a reta (2.1) passa pelo ponto $(c, 0)$ e tem $(\frac{b}{a}, 1)$ como vetor diretor (gerador). Os pontos da reta consistem nas combinações lineares desse único vetor linearmente independente – que no caso, reduzem-se simplesmente a uma multiplicação por escalar.

Exemplo 5.2. Obteremos a equação paramétrica do plano dado em $\mathbb{R}^3$

$$ax + by + cz = d \tag{2.3}$$

Podemos atribuir a $y$ e a $z \in \mathbb{R}$ os parâmetros livres $\varphi$ e $\theta$, de forma que $x$ deverá ser escrito em função desses dois parâmetros.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - b\varphi - c\theta \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$

A equação paramétrica será

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Por (2.4), podemos afirmar que esse plano corta o eixo $x$ no ponto $x = d$. Neste ponto, podem ser posicionados os vetores $(-b, 1, 0)$ e $(-c, 0, 1)$, linearmente independentes. Por meio de combinações lineares desses dois vetores (dadas pleos escalares $\varphi$ e $\theta$) estaremos parametrizando todos os pontos do plano, assim gerando o lugar geométrico dado em (2.3).

É importante notar que essa atribuição de parâmetros é arbitrária: poderíamos igualmente atribuir parâmetros $\alpha$ e $\beta$ a $x$ e $z$, por exemplo, obtendo uma representação paramétrica (2.4) diferente, mas que no entanto descreve exatamente *o mesmo lugar geométrico.*

Exemplo 5.3. Em $\mathbb{R}^3$, dado o sistema de equações linearmente independentes

$$\begin{cases} a_1x+b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y + c_2z &= d_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Podemos afirmar que tal sistema nos fornece o lugar geométrico de uma reta em $\mathbb{R}^3$.

Por escalonamento, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ \qquad\;\; y + c'_2z = d'_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

Atribuindo a $z$ o parâmetro livre $\gamma \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 - b'_1d'_2 + (c'_2b'_1 - c'_1)\gamma \\ d'_2 - c'_2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Que resulta na equação paramétrica de uma reta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 - b'_1d'_2 \\ d'_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c'_2b'_1 - c'_1 \\ -c'_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Para parametrizar a reta (2.5) em $\mathbb{R}^3$, adotamos o mesmo procedimento dos exemplos anteriores: posicionamos o vetor $(c'_2b'_1-c'_1, -c'_2, 1)$ no ponto $(d'_1-b'_1d'_2, d'_2, 0)$, obtendo os pontos da reta por meio de combinações lineares desse único vetor.

Seguindo essa linha de raciocínio, podemos fazer a seguinte generalização: a parametrização de um subespaço afim $k$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ será dada por

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}_0 + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k \tag{2.8}$$

onde os vetores $\{\vec{v}_i\}, i = 1, \ldots, k$ são linearmente independentes. Como nos exemplos anteriores, a idéia é fixar no ponto $\boldsymbol{P}_0$ esses $k$ vetores, cujas combinações lineares dadas pelos parâmetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ "localizarão" todos os pontos desse subespaço afim.

O número de parâmetros livres $k$ nos informará *os graus de liberdade* do subespaço afim: nos exemplos 5.1 e 5.3, vemos que a reta possui um único parâmetro livre, e portanto, um grau de liberdade, o qual diz respeito ao fato de que, se "caminharmos" sobre uma reta, haverá *uma única* direção linearmente independente a ser seguida.

Estendendo essa generalização para as equações de lugar geométrico (1.1), temos que

- uma equação linearmente independente representa um hiperplano $(n-1)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$.
- um sistema de duas equações linearmente independentes representa um subespaço afim $(n-2)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$.
- um sistema de três equações linearmente independentes representa um subespaço afim $(n-3)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$.

$$\vdots$$

- um sistema de n equações linearmente independentes representa um subespaço afim 0-dimensional em $\mathbb{R}^n$, ou seja, um ponto.

Vemos que cada equação acrescentada acarreta a perda de um grau de liberdade no hiperplano, até que não reste mais grau de liberdade algum (ponto).

## 3. Distâncias

Faremos agora uma generalização em $\mathbb{R}^n$ do seguinte problema: dado um subespaço afim $r$-dimensionais e um ponto $\boldsymbol{Q}$, encontrar o ponto $\boldsymbol{P_X}$ no subespaço afim que é mais próximo ao ponto $\boldsymbol{Q}$ dado. Seja

$$\boldsymbol{P_0} + t_1\vec{w_1} + \ldots + t_r\vec{w_r} \tag{3.1}$$

a equação paramétrica deste subespaço afim $r$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$, com

$$\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = \delta_{ij}, \text{ onde } \quad \delta_{ij} \begin{cases} \delta_{ij} & = 0, \text{ se } i \neq j \\ \delta_{ij} & = 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

Nesse caso, dizemos que $\{\vec{w}_i\}$ forma uma base ortonormal do subespaço. Em Álgebra Linear, veremos que qualquer conjunto de vetores pode ser ortonormalizado através do Processo de Gram-Schimdt. Essse processo leva a eliminação de qualquer eventual dependência linear existente no conjunto de vetores iniciais, através da redução do número de vetores no conjunto final.

Dado $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^n$, calcularemos o ponto $\boldsymbol{P}_X$ em (3.1) mais próximo de $\boldsymbol{Q}$. Para tanto, notamos primeiramente que os pontos $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{P}_X$ determinam a distância realizada do ponto $\boldsymbol{Q}$ ao subespaço afim dado. Assim, o ponto $\boldsymbol{P}_X$ é determinado através da projeção ortogonal do ponto $\boldsymbol{Q}$ no subespaço afim (3.1). Portanto, $\boldsymbol{P}_X$ deve ser tal que o vetor $\boldsymbol{P}_X - \boldsymbol{Q}$ seja ortogonal a todos os vetores da base $\{\vec{w}_i\}$. Como $\boldsymbol{P}_X$ pertence a (3.1), podemos escrever esse conceito geométrico da seguinte forma

$$\left\langle \boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{P}_0 + \sum_{i=1}^{r} t_i w_i), w_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, r \tag{3.2}$$

Essa equação nos permitirá determinar os valores dos parâmetro $t_j$, fixando assim o ponto $\boldsymbol{P}_X$ no subespaço afim.

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{P}_0 + \sum_{i=1}^{r} t_i \vec{w}_i), \vec{w}_j \right\rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}_0, \vec{w}_j \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{r} t_i \vec{w}_i, \vec{w}_j \right\rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}_0, \vec{w}_j \rangle + \sum_{i=1}^{r} t_i \langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}_0, w_j \rangle + t_j &= 0 \\
t_j &= \langle \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{Q}, w_j \rangle
\end{aligned}$$

Temos assim os $r$ parâmetros livres $t_1, \ldots, t_r$ que determinam o ponto $\boldsymbol{P}_X$. De acordo com (3.1), tal ponto será dado por

$$\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{P}_0 + \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}, w_i \rangle \, w_i \tag{3.3}$$

## 4. Exercícios

**Wexler, C.,** ***Analytic Geometry – A vector approach.*** Grupo de Exercícios 2-6.

CAPíTULO 6

# Produto Vetorial

## 1. Definição

Vimos nos capítulos anteriores que os vetores ortogonais a um conjunto de vetores dado desempenham um papel importante no estudo de hiperplanos. Assim, o *produto vetorial* é uma operação definida em $\mathbb{R}^3$ de grande interesse em Geometria Analítica: sua peculiaridade está no fato de que submetendo dois vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ a essa operação, obteremos como resultado um terceiro vetor $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *ortogonal* aos dois vetores iniciais, e portanto, normal ao plano gerado por $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, conforme mostraremos neste capítulo.

DEFINIÇÃO 6.1. Sejam $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3)$ $\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, c_3)$ e $c$ escalar.

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &:= \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} \ + \ (-a_3 b_1 \ + \ a_1 b_3)\hat{j} \ + \ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da definição 1.1 decorrem as seguintes propriedades.

(P1) Linearidade com respeito a $\boldsymbol{A}$:
$(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{B}$
$(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{B}$

(P2) Anti-simetria: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow$ Linearidade com respeito a $\boldsymbol{B}$.

(P3) Produto Misto: $\langle \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \rangle = \langle (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}), \boldsymbol{C} \rangle = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

(P4) $\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\|^2 \|\boldsymbol{B}\|^2 - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange)

(P5) $\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| \sin\theta$, onde $\theta$ é o ângulo entre os dois vetores.

DEMONSTRAÇÃO. Provaremos apenas a propriedade (P5). As demais decorrem trivialmente da definição.

De P4, temos

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\|^2 &= \|\boldsymbol{A}\|^2 \|\boldsymbol{B}\|^2 - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle^2 \\ &= \|\boldsymbol{A}\|^2 \|\boldsymbol{B}\|^2 - (\|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| \cos\theta)^2 \\ &= \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| (\sin^2\theta) \end{aligned}$$

mas como $0 \leq \theta \leq \pi$, temos sempre $\sin\theta \geq 0$. Consequentemente,

$$\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\| \sin\theta$$

□

COROLÁRIO 6.1.

*(1)* $\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\|$ *corresponde à área do paralelogramo cujos lados são formados pelos vetores* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$.
*(2)* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *não-nulos e paralelos em* $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$
*(3)* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *não-nulos e não-paralelos* $\Rightarrow\ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \perp \boldsymbol{A}$ *e* $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \perp \boldsymbol{B}$
*(4)* $\|\,\langle(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}), \boldsymbol{C}\rangle\,\|$ *corresponde ao volume do paralelepíedo formado pelo vetores* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) e (2) decorrem trivialmente de (7). Provaremos (3) e (4). Para provar (3), basta verficar que $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 0$ e $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0$, o que implica ortogonalidade do vetor $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ com respeito a $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

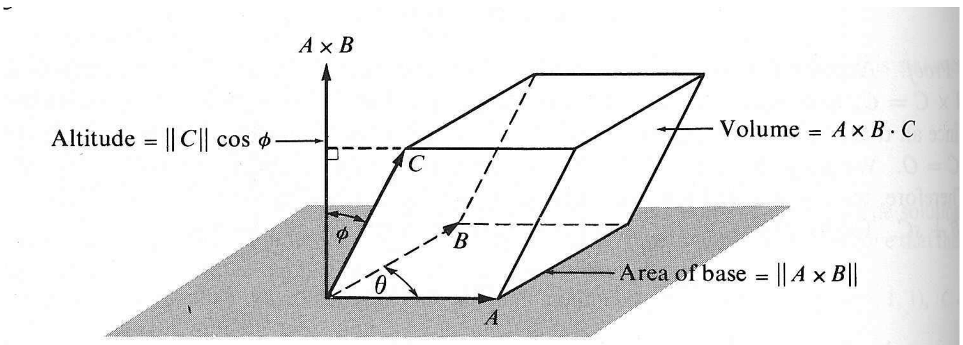


FIGURE 13.6 Geometric interpretation of the scalar triple product as the volume of a parallelepiped.

Para provar (4), vemos na figura acima

$$\begin{aligned} \|\,\langle(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}), \boldsymbol{C}\rangle\,\| &= \|\boldsymbol{C}\|\,\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| \cos\phi \\ &= h\ \|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 6.1. Pela definição 6.1, mostre que $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ é uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Indique qual é a combinação linear, em função de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$.

EXEMPLO 6.2. Dizemos que $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ são produtos triplos de $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$. Prove que $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, ou seja, o produto triplo vetorial não é associativo.

Qual é a combinação linear de vetores dada por $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, em função de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$? [1]

[1] $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$