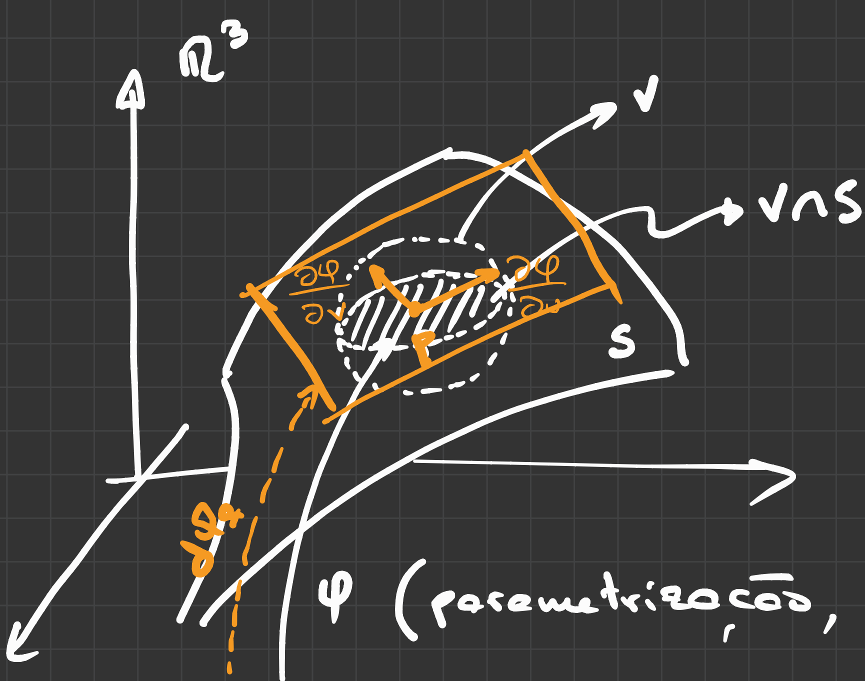
Geometria Diferencial I (Q1.2020)

Sinuê Lodovici

Superfície Regular (C^∞)



$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$

φ (parametrização, sistema de coords. locais, cartas)

$\varphi(q) = p$

Def: Um subconjunto $\boxed{S \subset \mathbb{R}^3}$ é <u>sup. reg.</u> se p/ cada $p \in S$, $\exists$ $V \subset \mathbb{R}^3$ viz. de p e aplicação

$\varphi : U \to V \cap S$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, tq:

1) φ é diferenciável (C^∞).

$$\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

(x, y, z têm derivs. parciais contínuas de todas as ordens)

$\hookrightarrow$ funções coordenadas

2) φ é homeomorfismo, ou seja φ é inversível (injetora) e tem inversa φ^{-1} contínua

3) $\forall q \in U$, $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva

$\{e_1, e_2\}$ base can. de $\mathbb{R}^2$

$\{f_1, f_2, f_3\}$ base can. de $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$$

$$d\varphi_q(e_1) = \frac{\partial \varphi(q)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q)\right)$$

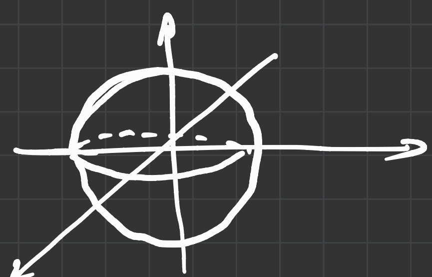
$$d\varphi_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

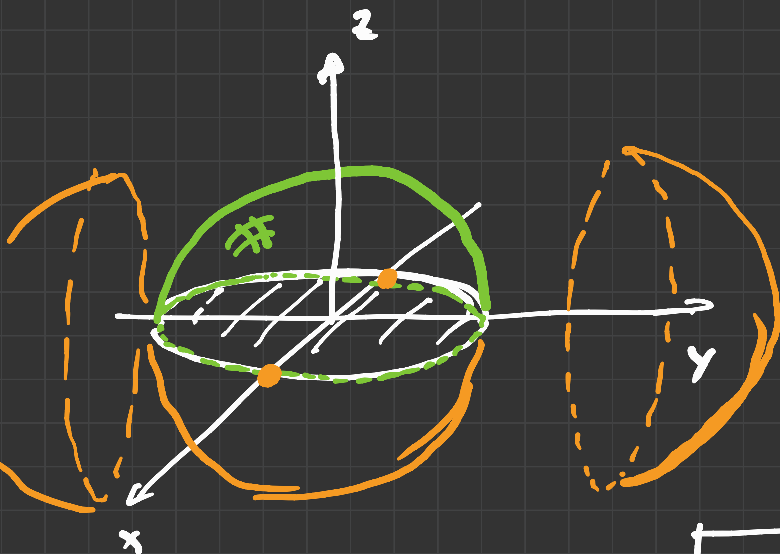
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$$

↳ um deles (pelo menos) é $\neq 0$

Ex 1: Esfera $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underline{x^2+y^2+z^2 = 1}\}$

Não é parametriz.





$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_1 : D\subset\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (u,v) &\longmapsto (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\end{aligned}}$$

$$\varphi_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{\dots})$$

$$\varphi_3(u,v)=(u,\sqrt{\dots},v)$$

$$\varphi_4(u,v)=(u,-\sqrt{\dots},v)$$

$$\varphi_5(u,v)=(\sqrt{\dots},u,v)$$

$$\varphi_6(u,v)=(-\sqrt{\dots},u,v)$$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$D=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2<1\}$$ Aberto

$$\varphi_1(u,v) = \left(u, v, \boxed{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

$$\varphi_1 : D \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad f$$

Em D, $1-u^2-v^2$ não se anula, e portanto $\sqrt{1-u^2-v^2}$ tem derivs. parcs. de todo ordem

$\boxed{x(u,v) = u}$ e $\boxed{y(u,v) = v}$ são C^∞

Logo vale 1.

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,y) \longrightarrow \text{contínua}$$

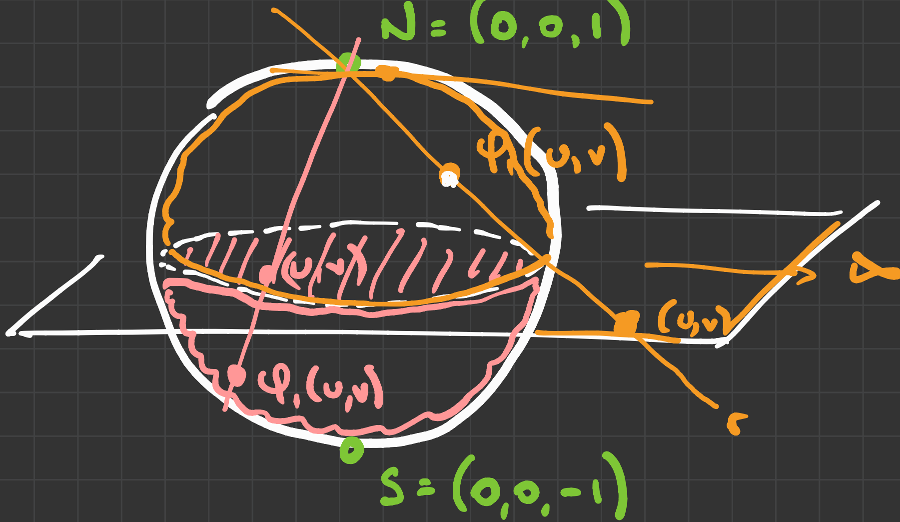
$$\pi(\varphi_1(u,v)) = (u,v)$$

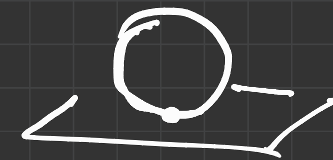
Logo vale 2

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vale 3

$$d\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$





$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus N$$

Projeção estereográfica

r : reta por $(0,0,1)$, $(u,v,0)$: $\vec{r} = (u,v,-1)$

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 + tu \\ y = 0 + tv \\ z = 1 - t \end{cases}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1$$

$$\boxed{(u^2 + v^2 + 1)t^2 - 2t = 0}$$

$$(u^2+v^2+1)t^2-2t=0$$

$$t\left[(u^2+v^2+1)t-2\right]=0$$

$$t=0$$

$$t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=tu\\ y&=tv\\ z&=1-t \end{aligned}\right\}$$

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1} \qquad y=\frac{2v}{u^2+v^2+1}$$

$$z=1-\frac{2}{u^2+v^2+1}=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

$$\varphi_1(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1} , \frac{2v}{u^2+v^2+1} , \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2\left(u^2+v^2+1\right) - 2u(2u)}{\left(u^2+v^2+1\right)^2} = \frac{-2u^2+2v^2+2}{\left(u^2+v^2+1\right)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-2u(2v)}{(\dots)^2} = \frac{-4uv}{(\dots)^2}$$

θ : colatitude

ψ : longitude

$$\varphi : (0,\pi) \times (0,2\pi) \longrightarrow S^2$$

$$\boxed{\varphi(\theta,\psi) = \left(\cos\psi \ \operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\psi \ \operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta\right)}$$

Superfícies: Imagem Inversa de valor regular

Prop 1: Se $f: U \to \mathbb{R}$ é C^∞, U aberto de $\mathbb{R}^2$ então $\operatorname{gr} f = \{(x,y,z) ; z = f(x,y)\}$ é superf. regular.

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Dem: $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$$df_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

(1) óbvio que φ é C^∞.

(3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

② $\varphi(u,v) = \varphi(m,n)$

$$(u, v, f(u,v)) = (m, n, f(m,n))$$

$$\Downarrow$$

$$u = m$$
$$v = n$$

$\therefore$ φ é injetora

$\pi : (x,y,z) \longmapsto (x,y)$ contínua

$$\pi \circ \varphi(u,v) = (u,v)$$

$$\therefore \pi = \varphi^{-1}$$

$\boxtimes$

Teo. Função Inversa:

Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fç C^∞

e $p_0 \in A$ tq dF_{p_0} é injetora (bijetora).

Então existem U viz de p_0 e V viz de

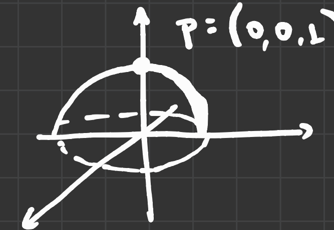
$F(p_0) = q_0$ tq $F|_U$ é difeomorfismo C^∞;

ou seja, $\exists\ F^{-1} : V \longrightarrow U$ C^∞

Esfera: $x^2+y^2+z^2=\boxed{1}$

$S^2 = f^{-1}(1)$

$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$



$$\varphi_1(u,v) = \left(u,v,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2}$$

1 é valor regular

$$S^2 = f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y,z);\ f(x,y,z)\in\{1\}\}$$

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) =$$

$$= (2x, 2y, 2z)$$

Ponto crítico:

$p = (0,0,0)$ $\quad f(p)=0$

$f(p)$: valor crítico

$$df_{(0,0,1)} = (0,0,2)$$

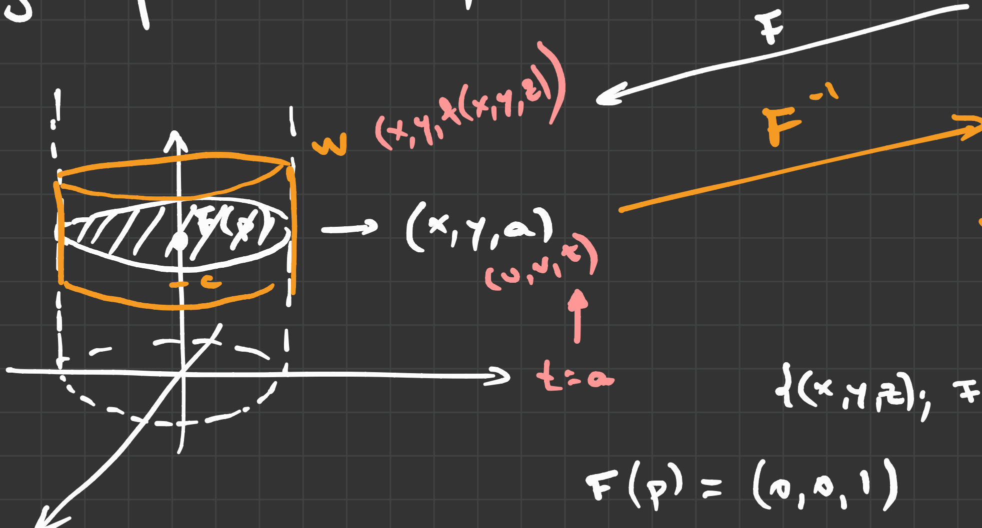
$$F(x,y,z) = (x, y, \overset{f}{x^2+y^2+z^2})$$

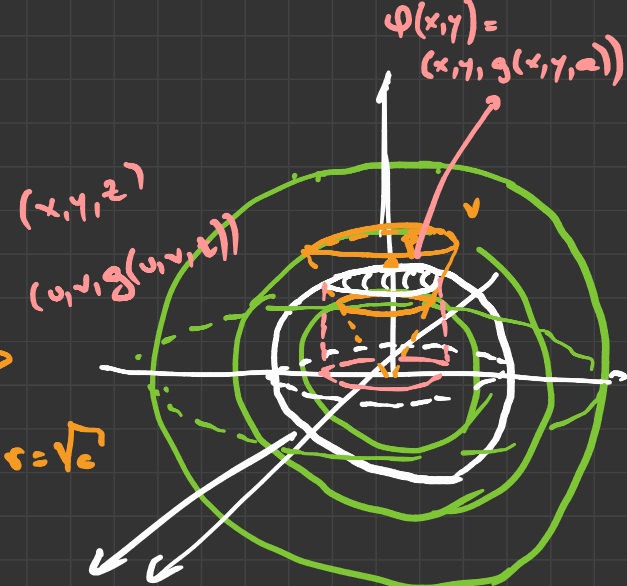
$f^{-1}(a) \quad a = r^2$

$$dF_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det dF_{(1,0,0)} = 2 \neq 0$$

Logo podemos aplicar TFI.





$$\{(x,y,z);\ F(x,y,z) = (x,y,a)\}$$

$$F(p) = (0,0,1)$$

Def: Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U aberto de $\mathbb{R}^n$.

p é **Ponto Crítico** se $dF_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora.

Se p é ponto crítico, $F(p)$ é **Valor Crítico**.

Um ponto $q \in \mathbb{R}^m$ que não é valor crítico é **Valor regular**.

Ou seja, $q \in \mathbb{R}^m$ é valor regular de F se $\underline{\forall}\, p$ tq $F(p) = q$ então dF_p é sobrej.

$(m < n)$

Prop 2: Se $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é fç. dif. e $a \in f(U)$ é valor regular, então $f^{-1}(a) = f^{-1}(\{a\})$ é sup. regular em $\mathbb{R}^3$.

f não é inversível

$f^{-1}(a) = \{p \in U ; f(p) = a\}$

Dem: $df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$ a valor regular

Seja $p \in f^{-1}(a)$.

df_p é sobrej. $\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ ou $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(p)}$ é $\neq 0$

Suponha sem perda de generalidade (SPG)

q. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0}$

Defina: $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por

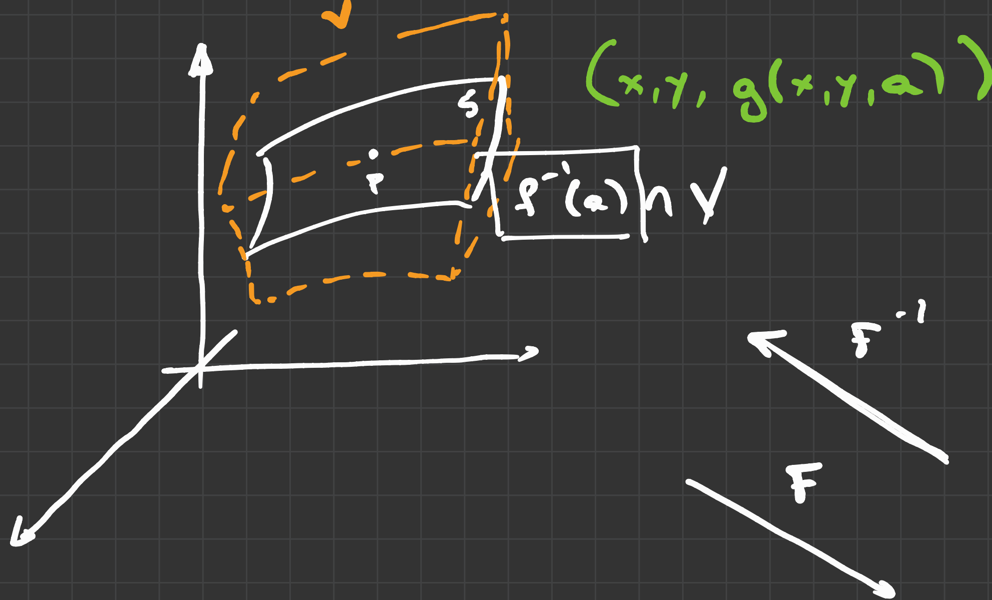
$$F(x,y,z) = \big(x, y, f(x,y,z)\big)$$

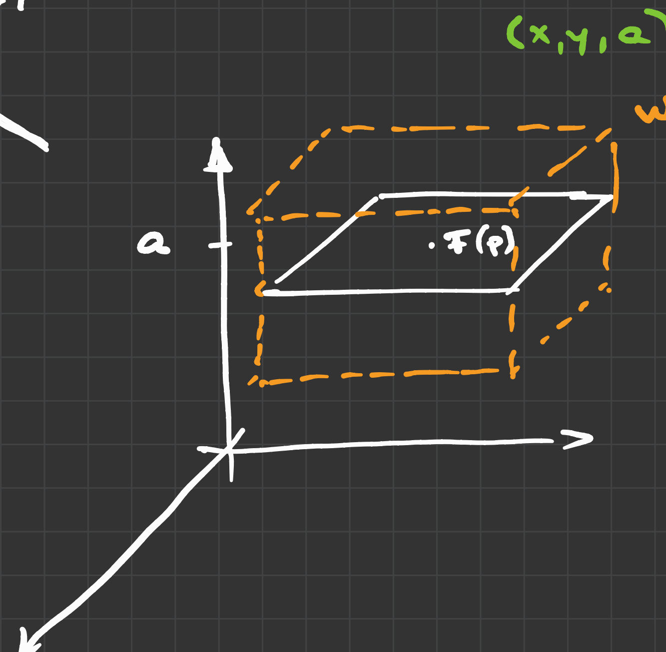
$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{pmatrix} \qquad \det(dF_p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$$

Logo dF_p é injetora.

Pelo TFI existem V viz de p e W viz de $F(p)$ tq $F\big|_V$ é difeo C^∞. Logo existe $F^{-1}: W \to V$ dif.

$$
\begin{array}{ccc}
V & \longrightarrow & W \\
(x,y,z) & \xmapsto{\;F\;} & (x,y,f(x,y,z)) \\
(u,v,\underline{\underline{g(u,v,t)}}) & \xleftarrow{\;F^{-1}\;} & (u,v,t)
\end{array}
$$





$$h(x,y) = g(x,y,a)$$

$$\varphi(x,y) = (x, y, h(x,y))$$

$F^{-1}(u,v,t) = (u, v, g(u,v,t)) \Rightarrow g(u,v,t)$ é C^∞

$\downarrow$

C^∞

$f(x,y,g(x,y,a)) = a$

Defina $h(x,y) = \boxed{g(x,y,a)}$.

h é C^∞.

Pela prop. 1 $gr\, h$ é superf. regular

Af: $gr\, h = f^{-1}(a) \cap V$

$\vdash$: $F(gr\, h) = \{(x,y,z) \in W;\ z = a\}$

✓

Quero mostrar que:

direto da def. de h.

Logo, em torno de p, existe param. de $f^{-1}(a)$.

$F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z))$

Como p é qualquer, temos que $f^{-1}(a)$ é superfície regular.

$\blacksquare$