Prova 1 - Geometria Diferencial II

1 — Mostre que a curvatura média H em $p \in S$ é dada por:

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ é a curvatura normal em p na direção que faz um ângulo θ com uma direção fixa.

2 — Mostre que se a curvatura média é zero em um ponto não-planar, então esse ponto tem duas direções assintóticas ortogonais.

3 — Mostre que:

a) Se uma superfície S_1 intersecta uma superfície S_2 ao longo de uma curva regular C, então a curvatura k de C em $p \in C$ é dada por

$$k^2 \operatorname{sen}^2\theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\theta,$$

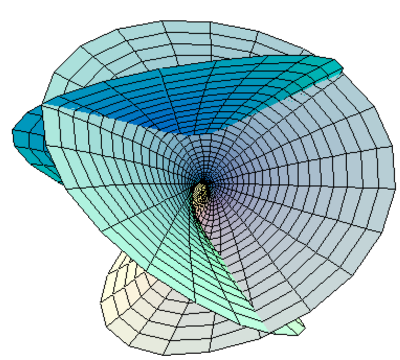
onde λ_1 e λ_2 são as curvaturas normais em p, ao longo da reta tangente a C, de S_1 e S_2, respectivamente, e θ é o ângulo formado pelos vetores normais a S_1 e S_2 em p.

b) (*Teorema de Joachimstahl*) Suponha que S_1 e S_2 se intersectam ao longo de uma curva regular C e fazem um ângulo $\theta(p)$, $p \in C$. Suponha que C é uma linha de curvatura de S_1. Prove que $\theta(p)$ é constante se e somente se C é uma linha de curvatura de S_2.

4 — Considere a superfície parametrizada (*Superfície de Enneper*)

$$\varphi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

e mostre que:



[Superficie di Enneper. (12 ottobre 2013). *Wikipedia, L'enciclopedia libera.* Tratto il 13 luglio 2016, 13:32 da //it.wikipedia.org/w/index.php?title=Superficie_di_Enneper&oldid=61933864.]

a) Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \qquad F = 0.$$

b) Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = 2, \qquad g = -2, \qquad f = 0.$$

c) As curvaturas principais são

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \qquad k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

d) As linhas de curvatura são curvas coordenadas.
e) As linhas assintóticas são $u + v = \mathtt{const.}$ e $u - v = \mathtt{const.}$.
f) Calcule a curvatura Gaussiana.
g) Mostre que tal superfície é mínima.

5 — a) Defina curvatura Gaussiana em uma superfície não-orientável.
b) Mostre que a faixa de Möebius parametrizada por

$$\varphi(u, v) = ((2 - v \operatorname{sen} u/2) \operatorname{sen} u, (2 - v \operatorname{sen} u/2) \cos u, v \cos u/2)$$

tem curvatura Gaussiana

$$K = -\frac{1}{[1/4v^2 + (2 - v \operatorname{sen} u/2)^2]^2}.$$

c) Pode-se definir curvatura média em uma superfície não-orientável?