Geometria Não-Euclideana

Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Origens da Geometria

Geometria surge a partir de:

- experimentação,
- analogia,
- adivinhação,
- ocasional intuição.

Nasce como uma "caixa de ferramentas" usada principalmente na medição de terras.

Do grego:

Geo: terra.
metrein: medir.

Locais de origem: Egito, Babilônica, Índia, China.

Curiosidades

Aproximações de π

- Babilônia (2.000 - 1.600 a.C.): 3,
- Egito (1800 a.C.):

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1604$$

Evidências mostram que os babilônios conheciam o Teorema de Pitágoras antes mesmo do nascimento de Pitágoras.

Geometria na Grécia

- **Tales de Mileto** ($\sim$ 623 a.C - 546 a.C.):
  Geometria como resultado de dedução lógica.
- **Pitágoras** ($\sim$ 570 a.C. - 500 a.C):
  - Prega a elevação da alma e união com Deus pelo estudo da música e matemática.
  - Acredita que a Geometria e o Universo são identificáveis.
  - Escola Pitagórica estuda:
    - Intervalos harmônicos;
    - Propriedades dos números (obtendo a irracionalidade de $\sqrt{2}$).
- **Platão** ($\sim$ 428 a.C. - 347 a.C):
  - Acredita na realidade como uma sombra de um universo perfeito, matemático (Mito da Caverna).
  - $\sqrt{2}$ é o exemplo de um comprimento perfeito, impossível de medir na realidade.

Euclides : “Os Elementos”

Os 13 livros:

Conteúdo

- Livros I - IV: Geometria Plana
- Livros V - X: Razões e Proporções
- Livros XI-XIII: Geometria Espacial

Inspiração

- Livros I - IV, VII e IX: Pitagóricos
- Livros VII: Arquitas de Tarento
- Livros V, VI e XII: Eudoxo de Cnido
- Livros X e XII: Teaetetus

O Método Axiomático

Requisitos:

1

Aceitação de certas afirmações, denominadas axiomas ou postulados, sem justificativa alguma.

2

Acordo em como e quando uma afirmação “segue logicamente” de uma outra (regras do raciocínio lógico).

0

Entendimento mútuo do significado das palavras e símbolos utilizados no discurso.

Termos Não Definidos

O Método Axiomático

Silogismos (Aristóteles)

- *Modus ponens:*
$$(p \to q, p) \longrightarrow q$$
- *Modus tollens:*
$$(p \to q, \neg q) \longleftrightarrow \neg p$$
- *Silogismo hipotético:*
$$(p \to q \text{ e } q \to r) \longrightarrow (p \to r)$$
- *Silogismo disjuntivo:*
$$(p \text{ ou } q) \longleftrightarrow (\neg p \to q)$$

Os Elementos: Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E extremidades de uma superfície são retas.
6. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

$\ldots$

23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Os Elementos: Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Os Elementos: Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso seja adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

$$\dots$$

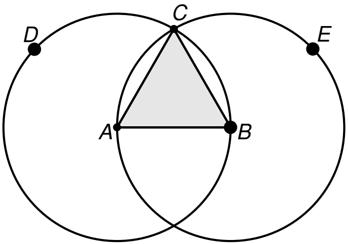
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Os Elementos: Proposições

Proposição

Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.

...



Fique descrito, por um lado, com o centro A, e por outro lado, com distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

...

Os Elementos: Algumas Falhas

- Postular a continuidade de círculos e retas.
- Postular a extensão infinita de uma reta (ou, ao menos, sobre a existência de pontos numa reta).
- Afirmar que se uma reta entra num triângulo por um de seus vértices, então necessariamente ela deve intersectar o lado oposto a esse vértice (*Teorema de Pasch*).
- Axiomatizar sobre a ordem de pontos numa reta.
- Garantir a unicidade de uma reta sobre dois pontos.
- Listagem de termos não definidos.
- Estabelecer melhor a congruência de figuras.

Hilbert: Termos não definidos

- **ponto**
- **reta**
- "**estar em**", "**incidente com**" ou "**pertence a**" (como em "dois pontos **pertencem a** uma única reta")
- "**estar entre**" (como em "o ponto C **está entre** os pontos A e B")
- "**ser congruente**"

Hilbert: Axiomas (Greenberg)

Incidência

1. Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P existe uma única reta r que passa por P e Q.
2. Para toda reta r existe ao menos dois pontos distintos incidentes com r.
3. Existem três pontos distintos com a propriedade de que não existe reta incidente com todos os três pontos.

Hilbert: Axiomas (Greenberg)

Ordem

1. Se $A * B * C$, então A, B e C são três pontos distintos todos pertencentes a uma mesma reta, e $C * B * A$.
2. Dados quaisquer dois pontos B e D, existem pontos A, C e E na reta $\overline{BD}$ tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
3. Se A, B e C são três pontos distintos colineares, então um e exatamente um deles está entre os outros dois.
4. (*Separação do Plano*) Para toda reta r e quaisquer três pontos A, B e C fora de r:
    1. Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.
    2. Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r, então A e C estão do mesmo lado de r.

Hilbert: Axiomas (Greenberg)

Congruência

1. Se A e B são pontos distintos e se A' é um ponto qualquer, então para cada semi-reta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $AB \cong A'B'$.
2. Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento de reta é congruente a si mesmo.
3. Se $A * B * C$ e $A' * B' * C'$, e $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.
4. Dado um ângulo $\angle BAC$, e dada uma semi-reta $\overrightarrow{A'B'}$, então existe uma única semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ num dado lado da reta $\overline{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.
5. Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle B \cong \angle C$, então $\angle A \cong \angle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.
6. (LAL) Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles são congruentes a dois lados e o ângulo de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Hilbert: Axiomas (Greenberg)

Continuidade

1. (*Axioma de Dedekind*) Suponha que o conjunto $\{r\}$ de todos os pontos da reta r seja a união disjunta $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de dois conjuntos não vazios tais que nenhum ponto de um esteja entre dois pontos do outro. Então existe um único ponto O em r tal que um dos subconjuntos é igual a uma semi-reta de origem O e o outro subconjunto é igual ao seu complemento.

Paralelismo

1. Para toda reta r e todo ponto P fora de r existe **no máximo uma** reta s por P paralela a r.

Hilbert: Conseguências do Axioma de Dedekind

- (*Princípio da continuidade circular*) Se um círculo γ tem um ponto no interior de um círculo γ' e outro no seu exterior, então os círculos se intersectam em dois pontos.
- (*Princípio elementar de continuidade*) Se um dos extremos de um segmento está dentro de um círculo e o outro extremo está fora, então o segmento intersecta o círculo.
- (*"Axioma de Arquimedes"*) Se CD é um segmento qualquer, A um ponto qualquer , e r uma semi-reta com origem A, então para qualquer $B \neq A$ em r existe n inteiro positivo tal que, se $E \in r$ é tal que $n \cdot CD \cong AE$, então ou $B = E$ ou $A * B * E$.

Birkhoff: Axiomas (Ramsay)

1. Se A e B são dois pontos distintos, então existe uma e apenas uma reta passando por ambos esses pontos. Denotaremos tal reta por $\overline{AB}$.
2. (*Espaço métrico*) Existe uma função $|PQ|$ definida para todo par de pontos P e Q do plano, tal que:
   (a) $|PQ| = 0$ se $P = Q$;
   (b) $|PQ| > 0$ se $P \neq Q$;
   (c) $|PQ| = |QP|$;
   (d) (*Desigualdade Triangular*) $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$.
3. Para toda reta r existe uma bijeção $x : r \to \mathbb{R}$, denominada **sistema de coordenada** (ou **parametrização**) de r, tal que, para todo para de pontos A, B em r, vale:

$$|AB| = |x(A) - x(B)|.$$

   Dizemos que $x(A)$ é a **coordenada** de A (no sistema de coordenada x).

Birkhoff: Axiomas (Ramsay)

4. Se r é uma reta qualquer do plano $\mathbb{P}$, existem dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{P}$, HP_1 e HP_2, denominados **semi-planos**, tais que:
   (a) (*União disjunta*) O plano $\mathbb{P}$ é a união disjunta de $\mathbb{P}$, HP_1 e HP_2.
   (b) (*Convexidade*) Se P e Q estão no mesmo semi-plano, então o segmento PQ está contido nesse mesmo semi-plano;
   (c) Se P e Q estão em semi-planos opostos, então o segmento PQ contém um (único) ponto de r.

Birkhoff: Axiomas (Ramsay)

5. (*Medida de Ângulos*) Para cada ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$ existe um número $(\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})^{\mathrm{rad}}$ no intervalo $[0, \pi]$, chamado **medida** (em radianos) do ângulo, tal que:
   (a) Se $\overrightarrow{h}$ e $\overrightarrow{k}$ são a mesma semi-reta, a sua medida é 0; se elas são semi-retas opostas sua medida é π;
   (b) a soma da medida de um ângulo com a de seu suplementar é π;
   (c) se $\overrightarrow{j}$ está no interior do ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$, então $(\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{j})^{\mathrm{rad}} + (\angle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})^{\mathrm{rad}} = (\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})^{\mathrm{rad}}$
   (d) se uma semi-reta $\overrightarrow{k}$ com origem em Z está na reta r, então, em cada semi-plano limitado por r, existe uma bijeção entre o conjunto de semi-retas $\overrightarrow{j}$ com origem Z e os números reais α em $(0, \pi)$ de tal maneira que α é igual a medida $(\angle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})^{\mathrm{rad}}$ do ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$; e
   (e) na condições do item (d), se a semi-reta $\overrightarrow{j}$ é determinada por $\overrightarrow{ZP}$, onde P é um ponto de $\overrightarrow{j}$, então o ângulo α depende continuamente de P, isto é, se P' é uma variável ponto e α' seu ângulo correspondente, então $(\alpha - \alpha') \to 0$ a medida que $|PP'| \to 0$.

Birkhoff: Axiomas (Ramsay)

6. (*LAL*) Se os dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo interno de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes. Isto é, os demais lados e ângulos são também congurentes.

Axioma das Paralelas

7. (*Euclideano*) Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, existe uma única reta por tal ponto que nunca intersecta a reta dada.
7. (*Hiperbólico*) Existe uma reta e um ponto fora dela tais que, por tal ponto, passam ao menos duas retas que não intersectam a reta dada.

Postulado das Paralelas

Equivalências

- Por um ponto exterior a uma reta passa uma única paralela a ela.
- Duas paralelas determinam ângulos correspondentes congruentes com uma transversal.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.
- Dois pontos situados a um mesmo lado e a uma mesma distância de uma reta determinam uma paralela a essa.
- Dadas duas paralelas, as distâncias de uma delas à outra estão limitadas.
- Existem triângulos com área arbitrariamente grande.
- Existem triângulos semelhantes não congruentes.

Geometria Hiperbólica

Nikolai Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802 - 1860)

Axioma Hiperbólico: Existe uma reta r e um ponto P não pertencente a r tal que, por P, passam pelo menos duas retas distintas paralelas à primeira.

Na geometria hiperbólica os triângulos devem necessariamente ter a soma de seus ângulos internos inferior a dois retos.

Geometria Hiperbólica: Consistência

Eugenio Beltrami (1835-1900), Felix Klein (1849-1925)

- **Teorema de Consistência**: Se a geometria euclideana é consistente, então o mesmo ocorre com a geometria hiperbólica.
- **Corolário**: Se a geometria euclideana é consistente, então não se pode provar verdadeiro ou falso o postulado das paralelas a partir dos demais postulados de Hilbert, i.e., o postulado das paralelas é independente dos demais.

Números Reais: Axiomas

Corpo

1. (*Comutativa*) $x + y = y + x$, $xy = yx$.
2. (*Associativa*) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
3. (*Distributiva*) $x(y + z) = xy + xz$.
4. (*Existência de Identidade*) Existe dois números reais distintos, usualmente denotados por 0 e 1, tais que para todo x real temos $x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x$.
5. (*Existência de Negativos*) Para todo número real x existe um real y tal que $x + y = 0$. Usualmente denotamos $y = -x$.
6. (*Existência de Inverso*) Para todo real $x \neq 0$ existe y tal que $xy = 1$. Usualmente denotamos $y = x^{-1}$.

Números Reais: Axiomas

Ordem

Existe $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ tal que:

1. Se x e y estão em $\mathbb{R}^+$, então $x + y$ e xy também estão.
2. Para todo real $x \neq 0$, temos $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$, mas não ambos.
3. $0 \notin \mathbb{R}^+$

Completude

1. Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo (menor cota superior); isto é existe um real b tal que $b = supS$.

Continuidade . . .